Dreck am Rad

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Das haben sicher alle schon mal erlebt: Das Velo fährt durch eine Dreckpfütze. Für einen Physiker müsste es eigentlich ein Vergnügen sein: Die Bewegung des Drecks, der sich vom Radumfang löst, ist eine Kreisbewegung, die in eine Wurfparabel übergeht. Sowohl die Kreisbewegung als auch die Wurfbewegung sind Juwelen im Theoriefundus jeder Physiklehrkraft. Noch schöner, wenn man die zwei kombiniert antrifft. Da ich gerne akademische Beispiele durchrechne, liess ich zuerst einmal vom Computer ein Bildchen zeichnen (Abbildung 1)

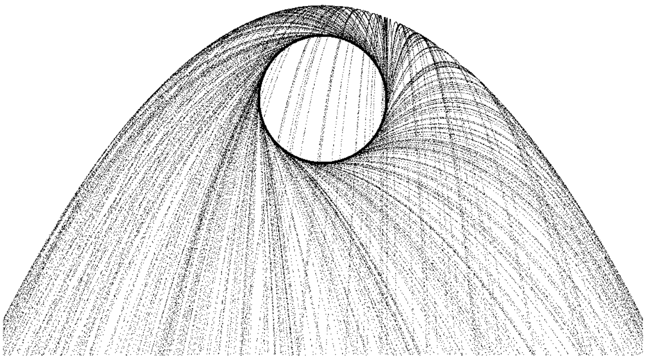

Abbildung 1: Wurfparabeln der Teilchen, die sich von einem vertikalen Rad lösen, das sich gleichmässig dreht. Es wird angenommen, dass die Teilchen tangential zum Kreis mit der momentanen Geschwindigkeit der Ablösestelle starten. Der Luftwiderstand wird selbstverständlich vernachlässigt.

Zuerst war ich überrascht: Die Einhüllende aller Wurfparabeln ist symmetrisch bezüglich der Vertikalen durch die Radnabe. Dabei sehen die Wurfparabeln in Fahrtrichtung offensichtlich anders aus als entgegen der Fahrtrichtung. Und die Einhüllende aller Wurfparabeln hat auch noch eine verdächtige Form (Abb. 2).

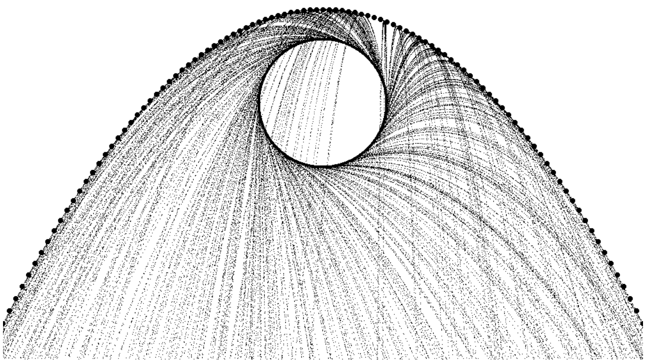

Abbildung 2: Durch Probieren gelingt es, eine Parabel (schwarze Punkte) über die Einhüllende der Wurfparabeln zu legen.

Theorie

Die Symmetrie der Einhüllenden lässt sich plausibel machen. Die Wurfparabeln können ja auch für Zeiten vor der Ablösung gezeichnet werden. Dann wird die Einhüllende der unsymmetrischen Wurfparabel-Äste zur Einhüllenden symmetrischer Parabeln, von der man dann eher Symmetrie erwartet.

Kann man zeigen, dass die Einhüllende der Wurfparabeln eine Parabel ist? Die Gleichung einer Wurfparabel findet man in den DMK/DPK Formeln und Tafeln:

$$y = x \cdot \tan\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} \cdot x^2$$

Diese Gleichung gilt aber für Abwurf im Nullpunkt des Koordinatensystems. Beim Abwurf vom Kreis beim Polarwinkel φ muss man die Parabel horizontal um $r \cdot \cos\varphi$ und vertikal um $r \cdot \sin\varphi$ verschieben. Der Abwurfwinkel ist $\alpha_0 = \varphi + \pi/2$. Man erhält für die Schar aller Wurfparabeln folgende vereinfachte Gleichung:

$$y = -(x - r \cdot \cos\varphi) \cdot \cot\varphi - \frac{g}{2v_0^2 \sin^2\varphi} \cdot (x - r \cdot \cos\varphi)^2 + r \cdot \sin\varphi$$

Die Einhüllende dieser Kurvenschar mit Scharparameter φ erhält man über die partielle Ableitung $\partial y / \partial\varphi = 0$. Aus der Ableitung folgen Bedingungsgleichungen für $\cos\varphi$ oder $\sin\varphi$. Setzt man diese in die Schargleichung ein, so erhält man nach längerer Rechnung die Hüllkurven. Die erste Hüllkurve ist natürlich ein Kreis (der Radumfang). Die zweite Hüllkurve ist eine Parabel mit folgender Funktionsgleichung:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{g}{2v_0^2}\left(r^2 - x^2\right)$$

Die Hüllkurven-Funktion ist in den Abbildungen 3-5 dargestellt.

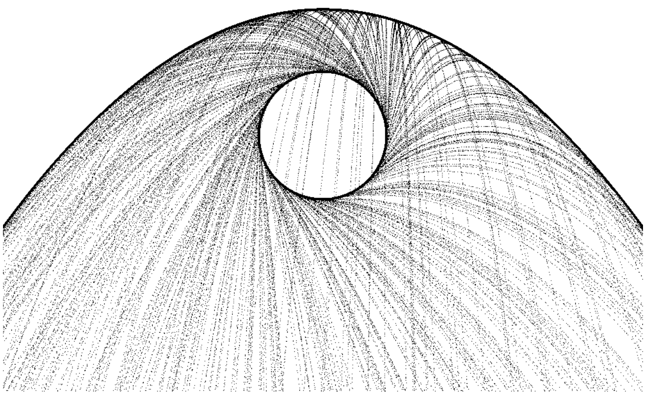

Abbildung 3: Parabolische Hüllkurve, wenn die Teilchen das Rad übersteigen.

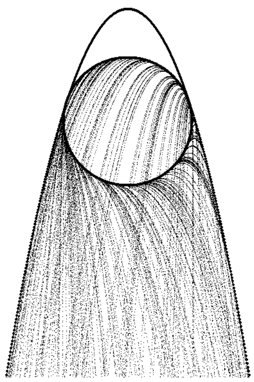

Abbildung 4: Parabolische Hüllkurve, wenn die Teilchen im oberen Teil nicht übers Rad steigen können

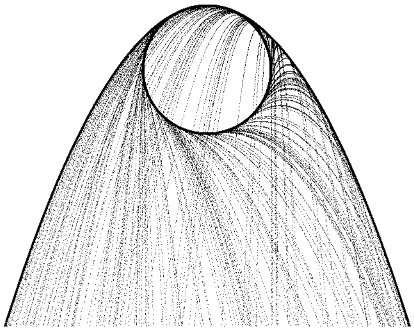

Abbildung 5: Einige Bahnkurve der Teilchen mit einhüllender Parabel im Grenzfall, wo die Hüllkurve das Rad berührt. Dann ist die Schnelligkeit des Radumfangs $v = \sqrt{rg}$.

21. Juli 2008 / Lie.