Nicht-Keplersche Ellipsenbahn

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Worauf ich mich in den Ferien immer freue, ist, die Artikel zu lesen, die sich bis dann angesammelt haben. Einige davon verarbeite ich zu Aufgaben oder Unterrichtssequenzen für meine Schülerinnen und Schüler, andere bereiten mir einfach Vergnügen. Ein Beispiel für den zweiten Fall ist ein Artikel von W. D. Pesnell zu Newtons Gedankenexperiment einer Kanone, die auf einem hohen Berg eine Kugel auf eine elliptische Erdumlaufbahn schiesst.[1] Der Autor hat sich gefragt, wie die Bahn der Kanonenkugel im Erdinnern weiterlaufen würde, wenn sie zu langsam abgeschossen wird und man ihr im Voraus einen passenden Tunnel durch die Erde gegraben hätte. Der Autor nahm eine homogene Erde an, weil die Aufgabe dann geschlossen lösbar wird: Die Bahnstücke in den Tunnels sind Ellipsen mit Mittelpunkt im Zentrum der Erde. Pesnells akademische Aufgabe ist eine Variation des berühmten "freien Falls durch den Erdmittelpunkt".

Erfüllen diese "nicht-keplerschen" Ellipsen auch eine Art keplersche Gesetze? Gibt es wie bei den echten Keplerellipsen einen einfachen Ausdruck für die Gesamtenergie?

Das erste keplersche Gesetz ist teilweise erfüllt: Die Geschossbahnen sind Ellipsen, wobei aber die *Ellipsenmittelpunkte* mit dem Erdmittelpunkt übereinstimmen. Die Begründung steckt implizit im restlichen Text.

Das zweite keplersche Gesetz ist natürlich erfüllt, denn es folgt aus dem Drehimpulserhaltungssatz.

Ob es ein Analogon zum dritten Gesetz gibt, werden wir noch sehen.

2 Ellipsenbahn

Eine Ellipse mit grosser Halbachse a und kleiner Halbachse b sowie Mittelpunkt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems wird durch folgende Relationen beschrieben.[2]

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \end{pmatrix} \qquad \text{oder ...}$$

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die ganze Ellipse im Erdinnern liegt, damit wir keine Fallunterscheidungen treffen oder die Bahn stückweise diskutieren müssen.

3 Umlaufzeit

Die Kanonenkugel mit Masse m auf ihrem Flug durch das homogene Erdinnere wird nur vom Anteil der Erdmasse innerhalb des Abstands r angezogen (Newtonsches Schalentheorem). Dann wächst die Gravitationkraft proportional zum Abstand r bis zum Wert $F_G = mg$ an der Erdoberfläche bei $r = r_E$.

$$F_G = k \cdot r \qquad \text{mit} \quad k = \frac{mg}{r_E}$$

Die Kraft gleicht formal dem hookeschen Federgesetz. Auf jeder Bahn gilt $\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_{\text{normal}} + m\vec{a}_{\text{tangential}}$. Im Hauptscheitel ist $a_{\text{tangential}} = 0$ und $a_{\text{normal}} = mv_a^2/\varrho$ mit dem Krümmungsradius $\varrho = b^2/a$.

$$F_{\text{res}} = \frac{mv_a^2}{\varrho} \rightarrow k \cdot a = \frac{mv_a^2 a}{b^2} \Rightarrow k = \frac{mv_a^2}{b^2}$$

Der Drehimpuls ist bei einer Zentralkraft erhalten. Die Kanonenkugel muss also das zweite keplersche Gesetz erfüllen: Die Verbindungslinie Zentrum-Kugel überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi ab}{T} = \tfrac{1}{2}av_a = \tfrac{1}{2}bv_b$$

Aus den genannten Beziehungen lässt sich die Umlaufzeit T bestimmen.

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{v_a}{b} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_E}{g}}$$

Die Umlaufzeit der Kanonenkugel ist unabhängig von der grossen oder kleinen Halbachse. $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ ist die Schwingungsdauer eines Federpendels. Wenn wir $k = mg/r_E$ einsetzen, folgt dasselbe Resultat wie beim freien Fall durch den Erdmittelpunkt.

4 Energie und Drehimpuls

Weil die Anziehungskraft auf die im Tunnel fliegende Kanonenkugel proportional zum Abstand vom Erdmittelpunkt zunimmt (Federgesetz), wächst die potentielle Energie quadratisch mit dem Abstand.

$$E_{\text{pot}} = \tfrac{1}{2}kr^2$$

Die Gesamtenergie ist konstant.

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kr^2 = \text{const} = \tfrac{1}{2}mv_a^2 + \tfrac{1}{2}ka^2$$

Mit $mv_a^2 = F_{\text{res}} \cdot \varrho = ka \cdot b^2/a$ folgt

$$E_{\text{tot}} = \tfrac{1}{2}kb^2 + \tfrac{1}{2}ka^2$$

Die Gesamtenergie sieht aus wie die Summe der Gesamtenergien zweier harmonischer Schwingungen mit Amplituden a und b. Das ist auch zu erwarten, denn wenn das Kraftgesetz $\vec{F}_{\text{res}} = -k \cdot \vec{r}$ linear ist, sind die Bewegungen der Komponenten nicht an einander gekoppelt. Man hätte durchaus mit dieser Überlegung starten können und hätte dieselben Resultate erhalten.

Um den Betrag des Drehimpulses auszurechnen, verwenden wir $\tfrac{1}{2}mv_a^2 = \tfrac{1}{2}kb^2$

$$\frac{L}{m} = a \cdot v_a = a \cdot b\sqrt{\frac{k}{m}} = ab\sqrt{\frac{g}{r_E}} = \frac{2\pi ab}{T} = \text{const} = \left|\vec{r} \times \vec{v}\right| = \frac{2dA}{dt}$$

Dies entspricht natürlich gerade wieder dem zweiten Keplerschen Gesetz.

24. Juli 2018, Lie.

---

[1] W. D. Pesnell, “The flight of Newton’s cannonball”, Am. J. Phys. **86** (5), May 2018, 338-343

[2] `https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse` (Abruf am 24. Juli 2018)