Institut für Informatik I
Prof. Dr. Heiko Röglin
Tobias Brunsch
Dennis den Brok

Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2012/13
Abgabe: 11.12.2012, 14:00 Uhr

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1

6 Punkte

Zeigen Sie mittels Diagonalisierung, dass die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.

Aufgabe 9.2

3+3 Punkte

(a) Seien k und n natürliche Zahlen, Σ ein Alphabet und $z \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge n. Wie viele Zerlegungen $z = u_1 \dots u_k$ von z in Wörter $u_i \in \Sigma^*$ gibt es?

(b) Wie viele verschiedene Wörter kann man durch das Permutieren der Zeichen des Wortes $w = \text{BANANE}$ erhalten?

Aufgabe 9.3

2+2+2 Punkte

Wir betrachten ein Gitter $G = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ mit $m, n \geq 20$. Wir starten in Punkt $(1, 1)$ und wollen uns in G bewegen. Zu jedem Zeitpunkt dürfen wir uns einen Schritt in x-Richtung (von (x, y) nach $(x + 1, y)$) oder einen Schritt in y-Richtung (von (x, y) nach $(x, y + 1)$) bewegen, sofern wir G nicht verlassen.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, zu Punkt (m, n) zu gelangen?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, zu Punkt (m, n) zu gelangen, ohne über Punkt $(10, 10)$ zu laufen?

(c) Wie viele mögliche Wege gibt es, die in einem Punkt (x, y) mit $y = n$ enden und die keinen weiteren Punkt (x', y') mit $y' = n$ enthalten?

Aufgabe 9.4

4+2 Punkte

(a) Der *binomische Lehrsatz* besagt, dass $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweisen Sie den binomischen Lehrsatz mittels vollständiger Induktion.

Hinweis: Verwenden Sie die Rekurrenz $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ und führen Sie im Induktionsschritt eine Indexverschiebung in einer der beiden Summen durch.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 9.5

4 Zusatzpunkte

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Für ein Wort $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ bezeichne $w^R = w_n w_{n-1} \dots w_2 w_1$ die Spiegelung von w. Sei L eine reguläre Sprache. Zeigen Sie mittels struktureller Induktion über reguläre Ausdrücke, dass dann auch die Sprache $L^R = \{w^R : w \in L\}$ regulär ist.

Hinweis: Definieren Sie zunächst rekursiv eine Funktion f, die jedem regulären Ausdruck R einen regulären Ausdruck $f(R)$ mit $L(f(R)) = \{w^R : w \in L(R)\}$ zuweist.