Verschiedene Stufen im Unendlichen – das zweite Diagonalverfahren

Mathematischer Aufsatz von
Fabian Tönnesmann und Alexander Schmitt-Kästner
Kolleg St. Blasien im Mai 2004

Gliederung

Oberstufe Mathematik – Projekt Unendlichkeit
I. Die Kardinalzahlen

Beispiel:
Laurence Sterne erzählt in seinem Roman von Tristram Shandy, der seine Lebensgeschichte so ausführlich schreibt, dass er für den ersten Tag ein Jahr braucht. Würde er in dieser Weise weiterschreiben so würde er für ein paar Monate seines Lebens sein gesamtes Leben zum Schreiben benötigen. Wäre es aber so, dass er unendlich lange Leben könnte, so wäre bei gleicher Ausführlichkeit der Schilderung die Menge der beschrieben Lebenstage der Menge der Lebensjahre gleichmächtig und beide wären abzählbar unendlich.

Einführung:
In den vorherigen Vorträgen haben wir gelernt, dass nicht nur eine Zahl, ein Gegenstand oder ein Mensch Element einer Menge, sondern auch eine Menge wiederum Element einer Menge sein kann. Außerdem erfuhren wir, dass zwei Mengen A und B gleichviel Elemente haben, dass sie gleichmächtig sein können. Man nennt diese Mengen auch abzählbar unendlich, doch dazu nachher mehr.

Weiterführung:
Wir wissen nun, dass die Mengen:
M1 = Z (Menge der ganzen Zahlen)
M2 = Q (Menge der rationalen Zahlen)
gleichmächtig zur Menge N sind, dass bedeutet dass diese Mengen gleichviel zur Menge N sind!

Wenn eine Menge nun „x“-Elemente innehat, so bezeichnet man rückschließend auch die Mächtigkeit dieser Menge mit der Zahl „x“. Da uns bekannt ist, dass die natürlichen Zahlen ins abzählbar unendliche reichen, musste für die Mächtigkeit ihrer Menge eine neue Zahl erfunden werden. Georg Cantor, der Pionier auf dem Gebiet der Paradoxien des Unendlichen, bezeichnete daher die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen mit der Zahl $\aleph_0$. Bei dieser Zahl und den natürlichen Zahlen spricht man von den KARDINALZAHLEN („Alle miteinander äquivalenten Mengen fasst man zu einer Klasse zusammen und sagt, sie haben die gleiche Mächtigkeit oder Kardinalzahl“).
Zwar bezeichnet man $\aleph_0$ als eine Zahl, jedoch muss man unter den Eigenschaften dieser Zahl und den „normalen“ Zahlen unterscheiden! Daher kann man nicht sagen, ob $\aleph_0$ gerade oder ungerade ist, noch darf man diese Zahl einfach Addieren, geschweige denn Subtrahieren.
Daher muss die Bedeutung dieser Begriffe für diese Zahl erst neu festgelegt werden!

Zusammenfassung:
Wenn nun eine Menge M zur Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist, so muss die Menge M abzählbar unendlich sein, denn nur dann kann man sagen:
Die Menge M hat die Mächtigkeit $\aleph_0$, genauso wie die Menge der natürlichen Zahlen die Mächtigkeit $\aleph_0$ hat, also sind beide gleichmächtig!

Extra:
Es gibt natürlich auch Mengen, die zueinander elementfremd sind, man spricht dann von disjunktiven Mengen.

II. Abzählbarkeit – Überabzählbarkeit

Einführung:
Zuvor haben wir erkannt, dass die Menge der natürlichen Zahlen und auch die anderen bisher untersuchten Mengen abzählbar unendlich sind. Wir nehmen daher an, dass somit auch alle anderen Mengen zu den abzählbar unendlichen gehören. Dem ist jedoch nicht so! Der schon eben erwähnte Georg Cantor machte die Entdeckung, dass die reellen Zahlen nicht abzählbar unendlich sondern überabzählbar unendlich sind.

Weiterführung:

Abzählbarkeit	Überabzählbarkeit
Als abzählbar unendliche Mengen werde diese bezeichnet, welche äquivalent (gleichmächtig) zur Menge der (1,2,3...) natürlichen Zahlen sind! Die Mengen können sowohl endlich als auch unendlich sein!	Eine überabzählbar unendliche Menge bezeichnet eine Menge die eine größere Mächtigkeit hat, als die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen. Die Menge ist hier weder endlich noch abzählbar.

III. Das zweite Diagonalverfahren – Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Man hat festgestellt, dass die Menge der natürlichen, der ganzen und der rationalen Zahlen abzählbar unendlich ist. Dass dies aber nicht für alle Mengen gilt, hat der Mathematiker Georg Cantor 1873 bewiesen. Er zeigte die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen, was bedeutet, dass man diese nicht durchnummerieren kann. Cantors Beweis läuft wie folgt ab:
Es handelt sich um einen indirekten Beweis, bei dem man davon ausgeht, die Menge der reellen Zahlen sei abzählbar unendlich. Ziel ist es, einen Widerspruch herbeizuführen, also die Annahme der Abzählbarkeit zu falsifizieren und das Gegenteil zu verifizieren. Cantor wählt das Intervall (0; 1) für seinen Beweis. Wenn dieses abzählbar unendlich sein soll, muss jedem Element aus der Menge der natürlichen Zahlen eines dieses Intervalls zuzuordnen sein (Bijektion). Auf folgende Art lässt sich das veranschaulichen:

$\mathbb{N}$		(0; 1)
0	$\leftrightarrow$	$0, z_{11}\ z_{12}\ z_{13}\ z_{14}\ z_{15}\ z_{16}\ \dots$
1	$\leftrightarrow$	$0, z_{21}\ z_{22}\ z_{23}\ z_{24}\ z_{25}\ z_{26}\ \dots$
2	$\leftrightarrow$	$0, z_{31}\ z_{32}\ z_{33}\ z_{34}\ z_{35}\ z_{36}\ \dots$
3	$\leftrightarrow$	$0, z_{41}\ z_{42}\ z_{43}\ z_{44}\ z_{45}\ z_{46}\ \dots$
4	$\leftrightarrow$	$0, z_{51}\ z_{52}\ z_{53}\ z_{54}\ z_{55}\ z_{56}\ \dots$
5	$\leftrightarrow$	$0, z_{61}\ z_{62}\ z_{63}\ z_{64}\ z_{65}\ z_{66}\ \dots$
6	$\leftrightarrow$	…

Beispiel		
0	$\leftrightarrow$	0,4 1 0 8 4 7 1 1 8 …
1	$\leftrightarrow$	0,8 5 2 2 2 2 2 2 2 …
2	$\leftrightarrow$	0,1 4 1 4 6 8 4 3 2 …
3	$\leftrightarrow$	0,3 3 3 3 3 3 3 3 3 …
4	$\leftrightarrow$	0,9 9 8 0 0 0 5 0 5 …
5	$\leftrightarrow$	0,5 0 0 0 0 0 0 0 0 …
6	$\leftrightarrow$	…

Die Buchstaben mit den Indizes stehen für Ziffern. Die Ziffer z_{45} beispielsweise steht in der vierten Zeile an der fünften Nachkommastelle. Die Aufgabe besteht nun darin, eine Zahl zu konstruieren, die nicht auf der Liste steht. Dazu bildet man die Diagonalzahl $a = 0, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \dots$ mit den Ziffern

z_{11} z_{22} z_{33}… . In diesem Beispiel hieße die Zahl a = 0, 451300… . Der entscheidende Schritt ist, dass für die Zahl ein besonderes Bildungsgesetz gilt:
$a_i = 1$, falls $z_{ii} \neq 1$
$a_i = 2$, falls $z_{ii} = 1$
Also lautet sie im Beispiel a = 0, 112111… . Das bedeutet, dass diese Zahl nicht in der obigen Liste enthalten ist, da sie sich von jeder Zahl in mindestens einer Ziffer unterscheidet (bei der n-ten Zahl in der n-ten Ziffer). Somit ist der gewünschte Widerspruch erreicht und gezeigt, dass nicht alle Zahlen im Intervall (0; 1) auflistbar sind. „Quod erat demonstrandum“, die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen ist damit bewiesen.

IV. Höhere Mächtigkeit – die Potenzmenge und die Kontinuumshypothese

Es sind zwei Arten von Mengen näher betrachtet worden, nämlich die abzählbar unendlichen und die überabzählbaren. Die abzählbaren Mengen haben alle die gleiche Mächtigkeit, die überabzählbaren eine höhere. Um Mengen mit höherer Mächtigkeit zu finden, ist die Potenzmenge P(M) einer Menge M von großer Bedeutung. Die Potenzmenge P(M) ist die Menge aller Teilmengen der Menge M. An einem Beispiel sieht das wie folgt aus:
$M = \{1; 2\}$ $P(M) = \{\{\}; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\}$
Die Menge M hat die Mächtigkeit 2 und ihre Potenzmenge P(M) die Mächtigkeit 4. Die Potenzmenge ist also mächtiger als ihre Ausgangsmenge. Über ein kompliziertes Beweisverfahren kann man zeigen, dass die Potenzmenge immer mächtiger als ihre Ausgangsmenge ist. Die Mächtigkeit lässt sich allgemein so ausdrücken:
Wenn $|M| = n$, dann $|P(M)| = 2^n$
Da man von jeder Potenzmenge wiederum die Potenzmenge bilden und das beliebig fortsetzen kann, sieht man, dass keine mächtigste Menge existiert.

Es stellt sich aber die Frage, um wie viel die Menge der reellen Zahlen im Vergleich zu den abzählbar unendlichen Mengen mächtiger ist. Das gleiche Problem taucht auch für die Potenzmengen der abzählbar unendlichen Mengen auf. Die abzählbar unendlichen Mengen haben die Mächtigkeit $\aleph_0$. Im Jahre 1878 stellte Georg Cantor seine so genannte Kontinuumshypothese auf. Diese besagt, dass die reellen Zahlen die nächst höhere Mächtigkeit haben Also wird ihre Mächtigkeit mit $\aleph_1$ beschrieben. Bei der Potenzmenge einer Menge mit Mächtigkeit $\aleph_0$ geht man ähnlich vor. Ihre Mächtigkeit wird mit c ausgedrückt. Da man weiß, dass aus $|M| = n$ $|P(M)| = 2^n$ folgt, schreibt man für c: $c = 2^{\aleph_0}$
Wie der Name Kontinuumshypothese aber schon sagt, handelt es sich lediglich um eine Hypothese und nicht um einen beweisbaren Satz. David Hilbert setzte die Kontinuumshypothese auf dem Internationalen Mathematischen Kongress im Jahre 1900 auf den ersten Platz seiner Liste der 23 mathematischen Probleme. Man sieht, dass hier die Mathematik an ihre Grenzen stößt. Es ist nicht entscheidbar, ob die Kontinuumshypothese richtig ist oder genau das Gegenteil gilt.
In Bezug auf dieses Problem hat Cantor gesagt: „Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.“ Damit meinte er, dass die Mathematik in ihrer Entwicklung völlig frei ist und nur auf die Widerspruchsfreiheit ihrer Begriffsbildungen geachtet werden muss.

V. Bibliographie

http://www.stauff.de/matgesch/dateien/spannendes.htm
http://www.mathe-seiten.de/unendlich.pdf
http://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuumshypothese
http://de.wikipedia.org/wiki/Mächtigkeit
http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/hilbert/hilbert1.html

Gellert, Wallert, Handbuch der Mathematik, Buch und Zeit Verlagsgesellschaft, Köln 1972
Lambacher, Schweizer, Analysis Leistungskurs, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2002