Differentialgleichungen und Numerik

eine Zusammenstellung der Verfahren
aus dem Sommersemester 1998

geTEXt von: Matthias Egerland

letzte Aktualisierung:
19. Juli 1999

Vorwort

Liebe Freundin, lieber Freund der Differentialgleichungen und Numerik!

Als ich mich im vergangenen Sommersemester (1998) zusammen mit meinen Kommilitonen auf die Vordiplomsklausur „Differentialgleichungen und Numerik“ vorbereiten wollte, sahen wir uns vor ein Problem gestellt: Uns fehlte ein gewisser **Überblick über das Fachgebiet**.
Wir hatten die Übungsaufgaben bearbeitet, einige Vorlesungen besucht und an den Diskussionsstunden teilgenommen. Desweiteren verfügten wir neben alten Klausuren über das Skript zur Vorlesung und eine geTEXte Aufgabensammlung. Das Skript war zum Verfolgen der Vorlesung sicherlich recht gut geeignet, als Klausurvorbereitung konnte es uns aber nicht dienen, da wir vor lauter Beweisen und mathematisch korrekten Definitionen die wesentlichen Verfahren kaum wiederzufinden vermochten. Der Ansatz eines Kommilitonen, die Verfahren seines Semesters anhand von Aufgaben vorzustellen, war zwar besser, doch kann ich die Lektüre seines Werkes nur parallel zu den Übungen empfehlen. Unkorrekte Bezeichner in den Aufgabenstellungen und diverse Fehler in seinen Lösungen drohen sonst mehr Fragen aufzuwerfen, als beantwortet werden können.
Ziel meiner Zusammenfassung soll es sein, die Verfahren aus der Differentialgleichung und Numerik noch einmal möglichst knapp in algorithmischer Form geordnet zusammenzustellen.
Ich habe dabei — zugunsten der Übersichtlichkeit, wie ich hoffe — bewußt **auf vollständige mathematische Korrektheit und eine Erklärung der Verfahren verzichtet**, weswegen dieses Werk auch keineswegs als alleinige Lerngrundlage dienen kann. Hier sei weiterhin auf die Vorlesung und den Übungsbetrieb verwiesen.
Diese Zusammenstellung will vielmehr als Gedächtnisstütze während der Klausurvorbereitung verstanden werden und kann darüber hinaus vielleicht noch dazu beitragen, daß der Zusammenhang etwas erhellt wird, in dem die einzelnen Verfahren stehen.
Zum Einüben der Verfahren habe ich in den Anhang ein Verzeichnis aufgenommen, in welchen Klausuren der vergangenen Jahre die jeweiligen Aufgabentypen zu finden sind. Diese Liste wurde mir freundlicherweise von Florian Hasibether zur Verfügung gestellt.
Wer sich für die Klausuren der vergangenen Jahre interessiert, wird sowohl in der Fachschaft, als auch im Institut für Geometrie und Praktische Mathematik ein reichhaltiges Angebot finden.
Zur Abrundung dieser Zusammenfassung wurde mir von Dr. Alexei Chadrine freundlicherweise der TEX-Sourcecode unserer Vordiplomsklausur nebst Musterlösung zugänglich gemacht, so daß abschließend auch ein paar aktuelle Aufgaben zum Klausurtraining herangezogen werden können.
In der zweiten Auflage wurde dieses Skript neben kleinen Verbesserungen und Ergänzungen noch mit der aktuellen Nachklausur und der zugehörigen Musterlösung versehen.
Abschließend bleibt nur noch zu erwähnen, daß dieses Skript sowie weitere geTEXte Beiträge zum Informatik-Studium unter der URL `http://www.uni-aachen.de` verfügbar sind.

Ich wünsche der Leserin und dem Leser, daß sie bzw. er den Mut während der Klausurvorbereitung nicht sinken lassen möge und letztlich **viel Erfolg bei der Klausur!**

Matthias Egerland, Herbst 1998 / Frühjahr 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Anfangswertprobleme

1.1 Integrationsverfahren

1.1.1 Trennung der Variablen

Typ:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad ; \ y(x_0) = y_0$$

Verfahren:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad G(y) = F(x) + c$$

1.1.2 Homogene Differentialgleichung

Typ:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad ; \ y(x_0) = y_0$$

Verfahren:

Setze: $z(x) = \frac{y}{x}$, dann gilt:

$$z'(x) = \frac{1}{x}\left(y' - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}(f(z) - z) \ \text{ mit } \ f(z) = y'$$

Jetzt weiter wie bei *Trennung der Variablen* und Umformen auf $y(x) = x \cdot z(x)$.

1.1.3 Lineare Differentialgleichung

Typ:

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

Verfahren:

1. Zunächst homogener Fall ($b(x) = 0$):

$$y' = a(x) \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y} dy = \int a(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln |y| = \int\limits_{x_0}^{x} a(t) dt + c \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{\int a(t) dt} \cdot c$$

2. Variation der Konstanten:

$$\text{Sei } y(x) = c(x) \cdot e^{\int a(t) dt}$$

3. Ableiten und mit Ausgangsgleichung ($y' = a(x) \cdot y(x) + b(x)$) vergleichen.
4. Gefundene Gleichung zwischen $b(x)$ und $c'(x)$ nach $c'(x)$ auflösen und integrieren.
5. Gefundenes $c(x)$ in gesetzte Gleichung $\left(y(x) = c(x) \cdot e^{\int a(t) dt}\right)$ einsetzen und Konstante bestimmen.

1.1.4 Bernoulli-Differentialgleichung

Typ:

$$y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^{\alpha} \quad ; \ \alpha \neq \{0, 1\}$$

Verfahren:

Setze $z(x) = y^{1-\alpha}$.

$$\underline{z'(x)} = (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y' = (1-\alpha) y^{-\alpha} (a(x) y + b(x) y^{\alpha}) = \underline{(1-\alpha)(a(x) z + b(x))}$$

Jetzt lösen wie *lineare Differentialgleichung*.

Umformen gemäß $y(x) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

1.1.5 Differentialgleichung von speziellem Typ

Typ:

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$$

Verfahren:

I) Ist $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$, so mache den Ansatz:

1. Berechne x_0, y_0 durch Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & c & = & 0 \\ \alpha x & + & \beta y & + & \gamma & = & 0 \end{array}$$

2. Setze:

$$\widetilde{x} := x - x_0 \quad , \; \widetilde{y}\,(\widetilde{x}) := y(x) - y_0$$

3. Man erhält:

$$\widetilde{y}'\,(\widetilde{x}) = \frac{d}{d\,\widetilde{x}}\,\widetilde{y}\,(\widetilde{x}) = y'(\widetilde{x}+x_0) = f\left(\frac{a(\widetilde{x}+x_0)+b(\widetilde{y}+y_0)+c}{\alpha(\widetilde{x}+x_0)+\beta(\widetilde{y}+y_0)+\gamma}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{\widetilde{y}}{\widetilde{x}}}{\alpha+\beta\frac{\widetilde{y}}{\widetilde{x}}}\right)$$

4. Jetzt lösen wie eine *homogene Differentialgleichung* und Umformen gemäß

$$y(x) = \widetilde{y}\,(\widetilde{x}) + y_0$$

II) Ist $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0$, so erhält man eine Differentialgleichung vom

Typ:

$$y' = f(px+qy+r)$$

Verfahren:

1. Substituiere $u = px + qy + r$.
2. Leite u ab.
3. Löse u' durch *Trennung der Variablen*
4. $y(x)$ ergibt sich durch Umformung des Ansatzes, also

$$y(x) = \frac{u - px - r}{q}$$

1.2 Lösung über Fundamentalsysteme

1.2.1 Reduktion auf ein System 1. Ordnung

Typ:

$$y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y + f(x)$$

Verfahren:

1. Setze

$$z(x) := \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} \text{ mit } z_1(x) = y \ , \quad z_2(x) = y' \ , \quad z_3(x) = y'' \ , \ldots , \quad z_n(x) = y^{(n-1)}$$

2. Leite diesen Vektor ab, wobei für $z_n'(x) = z_{n+1} = y^{(n)}$ die in der Aufgabenstellung gegebene Form für $y^{(n)}$ einzusetzen ist:

$$z'(x) := \begin{pmatrix} z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \\ a_n z_1(x) + \ldots + a_1 z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

3. Daraus läßt sich eine Matrix A ablesen, mit der gilt:

$$z'(x) = A \cdot z(x) + \vec{f}(x)$$

1.2.2 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Typ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0$$

Verfahren:

1. Berechne das charakteristische Polynom

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

2. Berechne seine Nullstellen λ_n .

3. Bilde ein allgemeines Fundamentalssystem für den Fall:

a) Alle n Nullstellen sind verschieden:

$$y_n = c_n \cdot e^{\lambda_n t}$$

b) Die Nullstellen $\lambda_1 \dots \lambda_p = \lambda$ sind gleich:
(bzw. die Nullstelle λ besitzt die Vielfachheit p)

$$y_1 = e^{\lambda t} c_1,\ y_2 = e^{\lambda t} c_2 \cdot t,\ y_3 = e^{\lambda t} c_3 \cdot t^2, \dots, y_p = e^{\lambda t} c_p \cdot t^{p-1}$$

c) Es handelt sich um eine komplexe Nullstelle $z_1 = \lambda + bi$, $z_2 = \lambda - bi$

$$y_1 = e^{\lambda t} c_1 \cdot \cos(bt),\ y_2 = e^{\lambda t} c_2 \cdot \sin(bt)$$

Für eine beliebige Lösung setze die Konstanten $c_1 \dots c_n = 1$.
Für eine spezielle Lösung bestimme die Konstanten aus den Anfangswerten.

1.2.3 Homogenes lineares Differentialgleichungssystem

Typ:

$$y' = Ay(t)\ ,\ y(t_0) = \vec{y_0}$$

Verfahren:

1. Berechne die Eigenwerte zu A
2. Berechne zu den Eigenwerten die Eigenvektoren
3. Bestimme n Hauptvektoren, wenn A eine $n \times n$-Matrix ist:

   a) 1. Stufe

   $$\text{Eigenvektor} \equiv \text{Hauptvektor}$$

   b) ggfs. 2.Stufe

   $$(A - \lambda_i I) v_{2.Stufe} = v_{1.Stufe}$$

   Multipliziere auf beiden Seiten $(A - \lambda_i I)$ und bestimme $v_{2.Stufe}$ mit Hilfe der *Gauß-Elimination*:

   $$(A - \lambda_i I)^2 v_{2.Stufe} = (A - \lambda_i I) v_{1.Stufe} = 0$$

   Beachte: λ_i muß eine Nullstelle mit Vielfachheit > 1 sein!

4. Bestimme ein Fundamentalsystem gemäß der Formel:

$$y_k = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j v_k$$

5. Die allgemeine Lösungsschar ist:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_k y_k(t) = \underbrace{[y_1(t)\ y_2(t)\ \cdots\ y_n(t)]}_{\text{Wronski-Matrix}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

6. Aus der Anfangsbedingung lassen sich jetzt die Konstanten $c_1 \ldots c_n$ nach dem Gauß-Algorithmus berechnen:

$$y(t_0) = [y_1(t_0)\ y_2(t_0)\ \cdots\ y_n(t_0)] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = y_0$$

1.2.4 Inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem

Typ a)

$$y' = Ay + f(x) \ \ , \ y(x_0) = y_0$$

Verfahren:

1. Berechne Fundamentalsystem und Wronski-Matrix $W(t)$ wie beim homogenen System.
2. Setze $y = y_a + y_s$ mit $y_a = W(x) \cdot c$ und $y_s = W(x) \int_0^x b(t)dt$, wobei sich $b(t)$ bestimmen läßt per Gauß-Algorithmus:

$$W(t) \cdot b(t) = f(t)$$

3. Bestimme und integriere $b(t)$.
4. Berechne $y_{s_1} = W(t)B(t)$, wobei nur die erste Zeile der Matrixmultiplikation relevant ist.
5. Bestimme in $y_a = W(x) \cdot c$ den Konstantenvektor $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Anfangswertbedingung durch den Gauß-Algorithmus:

$$y_0 = W(x_0) \cdot c$$

6. Berechne $y_{a_1} = W(x) \cdot c$, wobei auch hier nur die erste Zeile der Matrixmultiplikation zählt.
7. Vollende $y(x)$ gemäß der obigen Definition: $y = y_{a_1} + y_{s_1}$

Typ b)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y = f(x) \ \ , \ y(x_0) = y_0$$

Verfahren:

1. Berechne ein Fundamentalsystem für den homogenen Fall.

2. Bilde die Wronski-Matrix, indem das Fundamentalsystem zur ersten Zeile und jeder weitere Eintrag aus der Ableitung des darüberliegenden Eintrags der Matrix berechnet wird. Zum Beispiel:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_3 t} \\ (e^{\lambda_1 t})' & (e^{\lambda_2 t})' & (e^{\lambda_3 t})' \\ (e^{\lambda_1 t})'' & (e^{\lambda_2 t})'' & (e^{\lambda_3 t})'' \end{pmatrix}$$

3. Der Vektor $\vec{f}$ besitzt den inhomogenen Teil $f(x)$ aus der Aufgabenstellung als letzten Eintrag und besteht ansonsten aus Nullen:

$$\vec{f}\ (x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

4. Verfahre nun weiter wie beim *Typ a)* ab Unterpunkt 2.

1.2.5 Eulersche Differentialgleichung

Typ:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \ \ , \ y(x_0) = y_0$$

Verfahren:

1. Substituiere $x = e^t$ und $u(t) = y(e^t)$

2. Leite $u(t)$ n-mal ab

3. Ersetze e^t wieder durch x und $x^n y^{(n)}$ durch den Gleichungen entsprechende Ableitungen von u.

4. Löse diese *lineare Differentialgleichung höherer Ordnung*

5. Bestimme $y(x) = u(\ln x)$

Kapitel 2

Numerische Approximationsverfahren

2.1 Annäherung von Funktionswerten

Allen Verfahren ist gemein, daß vor ihrer Anwendung ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung vorliegen muß, was u.U. erst durch eine *Reduktion auf ein System 1. Ordnung* herbeigeführt werden muß. Es wird definiert:

$$f(t_n, z^n) := z'(x)$$

Aus den Anfangswerten im Startpunkt t_0 berechnen wir noch $z(t_0)$.

2.1.1 Euler-Cauchy-Verfahren

Typ a) Einfacher Euler

Verfahren:

$$z^{n+1} = z^n + hf(t_n, z^n)$$

Typ b) Rückwärtiger (impliziter) Euler

Verfahren:

$$z^{n+1} = z^n + hf(\underbrace{t_{n+1}}_{t_n+h}, z^{n+1})$$

Pro Schritt muß hierbei ein Gleichungssystem gelöst werden. Man bringt die z^{n+1} auf eine Seite und löst nach dem Gauß-Algorithmus. Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -h \\ 2h & (1 - 2ht_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{n+1} \\ z_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^n \\ z_2^n - 2z_1^n \end{pmatrix}$$

Typ c) Verbesserter Euler

Verfahren:

$$\begin{array}{c|cc} & K_1 & K_2 \\ \hline 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{aligned} K_1 &= f(t_n, z^n) \\ K_2 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, z^n + \tfrac{1}{2}h \cdot K_1) \\ z^{n+1} &= z^n + h \cdot K_2 \end{aligned}$$

2.1.2 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Verfahren:

$$\begin{array}{c|cccc} & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \qquad \begin{aligned} K_1 &= f(t_n, z^n) \\ K_2 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, z^n + \tfrac{1}{2}h \cdot K_1) \\ K_3 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, z^n + \tfrac{1}{2}h \cdot K_2) \\ K_4 &= f(t_n + h, z^n + h \cdot K_3) \\ z^{n+1} &= z^n + \tfrac{1}{6}h(K_1 + 2(K_2 + K_3) + K_4) \end{aligned}$$

2.1.3 Trapezregel

Verfahren:

$$z^{n+1} = z^n + \frac{1}{2}h(f(t_n, z_n) + f(\underbrace{t_{n+1}}_{t_n+h}, z_{n+1}))$$

2.1.4 Picard-Iteration

Verfahren:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt$$

2.2 Erzeugende Funktionen

2.2.1 Differenzenanfangswertproblem

Typ:

$$a_i u_{n+i} + \ldots + a_2 u_{n+2} + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = 0 \ ; \ \text{Anfangswerte} : u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}$$

Verfahren:

1. Berechne das charakteristische Polynom:

$$p(z) = a_i z^i + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

2. Bestimme seine Nullstellen λ_i sowie deren Vielfachheit m. Zaehle l von 0 bis $m-1$.

3. Jetzt gibt es zu jeder Nullstelle eine Folge, die zu einem Fundamentalsystem führt:

$$\left\{ \binom{j}{l} \lambda_i^{j-l} \right\}_{j=0}^{\infty}$$

4. Die allgemeine Lösung, berechnet nach der Formel $u_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} c_k u_k$, lautet dann:

$$u_j = c_1 \cdot \binom{j}{l} \lambda_1^{j-l} + c_2 \cdot \binom{j}{l} \lambda_2^{j-l} + \ldots + c_i \cdot \binom{j}{l} \lambda_i^{j-l}$$

5. Jetzt wird aus den Anfangswerten ein Gleichungssystem aufgestellt, das mit Hilfe des Gauß-Algorithmus gelöst wird.

6. Die so erhaltenen Werte für die Konstanten $c_1 \ldots c_{i-1}$ werden in die allgemeine Formel $u_j = \sum\limits_{k=0}^{i-1} c_k u_k$ eingesetzt und wir erhalten die explizite Form für u_n.

2.3 Annäherung von Nullstellen / Lösen (nicht-)linearer Gleichungssysteme

2.3.1 Ungedämpftes Newton-Verfahren

Typ a)

$$f(x) = 0 \ ; \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Verfahren:

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$$

Typ b)

$$\vec{f}\,(x) = 0 \ ; \ \vec{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

Verfahren:

$$x^{n+1} = x^n - \vec{f'}\,(x^n)^{-1} \cdot \vec{f}\,(x^n)$$

1. Setze $\Delta x := x_{n+1} - x_n$, dann gilt:

$$\vec{f'}\,(x_n) \cdot \Delta x = -\,\vec{f}\,(x_n)$$

2. Löse dieses Gleichungssystem nach dem Gauß-Algorithmus

3. Berechne neuen x-Wert gemäß der Formel:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

Hinweis:
Für die Konvergenz dieses Verfahrens ist ein hinreichend genauer Startwert x_0 nötig!

2.3.2 Gedämpftes Newton-Verfahren

Typ:
Das gedämpfte Newton-Verfahren entspricht dem normalen Newton-Verfahren bis auf einen Vorfaktor α, durch den die Konvergenz unabhängig vom Startwert erzwungen wird.

Verfahren:

$$x^{n+1} = x^n - \alpha\,\vec{f'}\,(x^n)^{-1} \cdot \vec{f}\,(x^n)$$

1. Setze $\alpha = 1$

2. Überprüfe, ob folgende Beziehung gilt:

$$||\,\vec{f}\,(x^{n+1})||_2 < ||\,\vec{f}\,(x^n)||_2$$

3. Wenn ja, dann gemäß dem Newton-Verfahren weiterrechnen, wenn nein, dann so lange α halbieren und die Beziehung überprüfen, bis es stimmt.

Hinweis:
Durch Multiplikation innerhalb der quadratischen Normen auf beiden Seiten mit $\vec{f'}\,(x^n)^{-1}$ oder der Jacobi-Matrix wird die Überprüfung genauer.

2.3.3 Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme

Typ:
Gegeben sei ein nichtlineares Gleichungssystem mit den 3 Gleichungen a, b, c in der Form $a = 0, b = 0, c = 0$.
Verfahren:

1. Bilde den Funktionenvektor $\vec{f}$ wie folgt:
$$\vec{f}\,(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
2. Bilde seine Ableitung $\vec{f'}$ nach dem Schema
$$\vec{f'}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\frac{d}{dx} & a\frac{d}{dy} & a\frac{d}{dz} \\ b\frac{d}{dx} & b\frac{d}{dy} & b\frac{d}{dz} \\ c\frac{d}{dx} & c\frac{d}{dy} & c\frac{d}{dz} \end{pmatrix}$$
3. Aus den Anfangswerten kann jetzt noch der Vektor $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ gebildet werden.
4. Verfahre desweiteren nach dem (un-)gedämpften Newton-Verfahren.

2.3.4 Banachscher Fixpunktsatz

Typ:
Zu zeigen ist, daß ein nichtlineares Gleichungssystem $x = \diamond\diamond\diamond$ und $y = \star\star\star$ auf einem Definitionsbereich D genau eine Lösung besitzt.
Verfahren:

1. Bilde den Vektor $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, also
$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \diamond\diamond\diamond \\ \star\star\star \end{pmatrix}$$
2. Leite diesen Vektor wie beim zuvor beschriebenen *Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme* ab:
$$F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \diamond\diamond\diamond\frac{d}{dx} & \diamond\diamond\diamond\frac{d}{dy} \\ \star\star\star\frac{d}{dx} & \star\star\star\frac{d}{dy} \end{pmatrix}$$
3. Zeige, daß der Definitionsbereich D abgeschlossen ist.
4. Zeige, daß F selbstabbildend ist.
5. Zeige, daß F auf dem gegebenen Intervall kontrahierend ist.
6. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz folgt nun, daß F auf D genau einen Fixpunkt, das Gleichungssystem also genau eine Lösung besitzt.

2.3.5 Gauß-Elimination

Typ:

$$A \cdot x = b$$

Verfahren:

1. Bringe die Matrix A unter Berücksichtigung des Vektors b nach dem Gauß-Algorithmus in obere Dreieckecksform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

2. Nun gilt:

   a) Es existiert keine Lösung für

   $$\alpha = 0 \quad , \quad \beta \neq 0$$

   b) Es existieren unendlich viele Lösungen für

   $$\alpha = \beta = 0$$

   c) Es existiert genau eine Lösung für

   $$\alpha \neq 0 \quad , \quad \beta \text{ beliebig}$$

2.3.6 Cholesky-Zerlegung

Typ:

$$A = LR$$

Verfahren:

1. Die obere Dreiecks-Matrix R entsteht durch sukzessive Anwendung des Gauß-Algorithmus, ohne eine Zeile durch einen Faktor zu teilen.

2. Die untere Dreiecks-Matrix L ergibt sich aus den gemerkten Faktoren, die zur Elimination der jeweiligen Einträge mit Hilfe der darüberstehenden Zeile zur Bildung von R benötig wurden. In die Diagonale werden Einsen geschrieben.

3. Die in Diagonalform vorliegende Matrix D besteht lediglich aus den Diagonaleinträgen von R.

4. Die Matrix A ist <u>positiv definit</u>, wenn jeder Eintrag von D echt größer Null ist.

5. Die Matrix A ist diagonaldominant, wenn die Summe der Beträge der jeweiligen Zeileneinträge ohne den Diagonaleintrag dieser Zeile stets kleiner oder gleich dem Betrag dieses Diagonaleintrags ist.

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}| \leq |a_{ii}| \quad , \; i = 1, 2, \ldots, n$$

6. Ist die Matrix A diagonaldominant und gilt $\det A \neq 0$, so besitzt A eine LR-Zerlegung.

7. Die Matrix A erfüllt das Zeilensummenkriterium, wenn die Summe der Beträge, bestehend aus den Quotienten der einzelnen Zeileneinträge und dem Diagonaleintrag dieser Zeile stets echt kleiner 1 ist.

$$\max_{1\leq k\leq n} \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \left| \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \right| < 1$$

8. Die Matrix A erfüllt das Spaltensummenkriterium, wenn die Summe der Beträge, bestehend aus den Quotienten der einzelnen Spalteneinträge und dem Diagonaleintrag dieser Zeile stets echt kleiner 1 ist.

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \right| < 1$$

2.4 Annäherung von Funktionen

2.4.1 Polynominterpolation

Typ:

$$\text{gegeben:}\quad n \quad \begin{array}{ll} \text{Stützstellen} & t_1, \dots t_n \\ \text{Fixwerte} & f(t_1), \dots, f(t_n) \end{array}$$

a) Lagrange-Verfahren

Verfahren:

$$l_i(x) = \frac{\prod\limits_{j=1, j \neq i}^{n} (x - t_j)}{\prod\limits_{j=1, j \neq i}^{n} (t_i - t_j)}$$

1. Bilde n-mal $l_i(x)$. Der Zähler besteht aus der Produktsumme der Differenzen zwischen x und jeder, bis auf der i-ten, Stützstelle. Der Nenner besteht aus der Produktsumme der Differenzen der i-ten Stützstelle mit jeder anderen Stützstelle.

2. Das Polynom entsteht schließlich, indem vor jedes $l_i(x)$ der Fixwert an dieser Stelle multipliziert und von all diesen Termen die Summe gebildet wird:

$$p(f, x) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot l_i(x)$$

b) Newton-Verfahren

Verfahren:

1. Schreibe in aufsteigender Reihenfolge die Stützstellen untereinander.

2. Schreibe daneben die Liste der zugehörigen Fixwerte.

3. Baue nun eine Baumstruktur auf, bestehend aus den Quotienten der Differenzen von unterem und oberem Fixwert sowie den am weitesten auseinanderliegenden unteren und oberen Stützpunkten.

4. Nur die oberste Ergebnis-Zeile ist im folgenden relevant: Die dort stehenden Werte $f[t_1] ... f[t_1 \dots t_n]$ werden jeweils mit der Produktsumme $\prod\limits_{i=1}^{n-1} (x - t_i)$ multipliziert.

5. So ergibt sich für das Polynom:

$$p(f, x) = f[t_1] + f[t_1 t_2] \cdot (x - t_1) + f[t_1 t_2 t_3] \cdot (x - t_1)(x - t_2) + \dots$$
$$\dots + f[t_1 \dots t_n] \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (x - t_i)$$

c) Algorithmus von Neville-Aitken

Dieses Verfahren dient der Bestimmung einer numerischen Näherung für einen Funktionswert an einer bestimmten Stelle.
Dazu wird das gleiche Schema, wie beim *Newton-Verfahren* aufgebaut, nur der Zähler der Brüche wird ergänzt:
Die dort stehenden Funktionswerte werden jeweils mit der Differenz multipliziert, bestehend aus Position des zu berechnenden Werts sowie oberer bzw. unterer Stützstelle (in dieser Reihenfolge!).

2.4.2 Interpolationsfehler

Typ:
Gegeben: Polynom mit n Stützstellen x_i. Ggfs. Intervall $[a, b]$.

Verfahren:

$$\underbrace{|f(x) - p(f, x)|}_{\text{Fehler}} = \frac{1}{n!}|\omega(x)||f^{(n)}(\xi)| \ ; \ \omega(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

Fehlerabschätzung dann durch Bestimmung des Maximums/Minimums von ω im Intervall $[a, b]$ oder durch Abschätzung der n-ten Ableitung der Funktion f.

2.4.3 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Typ:
Gegeben Stützstellen t_i mit Fixwerten $f(t_i)$ sowie ein Bildungsgesetz $f(t)$, in dem einige Konstanten noch unbestimmt sind.

Verfahren:

1. Stelle aus dem Bildungsgesetz, den Stützstellen und den Fixwerten ein überbestimmtes Gleichungssystem auf.
2. Schreibe es in Matrix-Form auf
$$A \cdot x = b$$
3. Multipliziere beide Seiten mit dem Tranponierten der Matrix A
$$A^t A \cdot x = A^t b$$
4. Löse nach dem Gauß-Verfahren.
5. Setze die erhaltenen Werte für die Konstanten in das Bildungsgesetz ein.

Anhang A

Formeln und Funktionswerte

A.1 Tabelle der Grundintegrale

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + c$
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	x^n	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$
$-\cos x$	$\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\sin x$	$\cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$\int 1 + \tan^2 x dx = \tan x + c$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + c$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\int \sinh x dx = \cosh x + c$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\int \cosh x dx = \sinh x + c$
$\mathrm{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + c = \mathrm{artanh} + c$
$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\tan x$	$\int \tan x = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$
$\frac{1}{a}e^{ax}$	e^{ax}	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$
$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$
$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + c$

A.2 Partielle Integration

$$\int u' \cdot v = [u \cdot v] - \int u \cdot v'$$

A.3 Funktionswerte

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Anhang B

Übersicht alter Klausuraufgaben

Differentialgleichungen

Lösen durch Trennung der Variablen und Variation der Konstanten

Vordiplom	Herbst 90	Aufgabe 1	Bernoulli DGL
Vordiplom	Herbst 91	Aufgabe 1	Homogene DGL
Vordiplom	Herbst 92	Aufgabe 1	Homogene DGL
Vordiplom	Herbst 92	Aufgabe 2	Bernoulli DGL
Vordiplom	Frühjahr 92	Aufgabe 1	Trennung der Variablen
Vordiplom	Herbst 93	Aufgabe 2	DGL von einem speziellen Typ
Vordiplom	Frühjahr 94	Aufgabe 2	Bernoulli DGL
Vordiplom	Frühjahr 96	Aufgabe 2	Trennung der Variablen
Vordiplom	Frühjahr 96	Aufgabe 3	Inhomogene lineare DGL
Vordiplom	Frühjahr 97	Aufgabe 2	Bernoulli DGL
Vordiplom	Herbst 97	Aufgabe 3	Trennung der Variablen
Vordiplom	Frühjahr 98	Aufgabe 3	Homogene DGL
Schein	Herbst 98	Aufgabe 3	Bernoulli DGL

Lösen über Fundamentalsystem

Vordiplom	Herbst 90	Aufgabe 2	Homogenes System linearer DGL
Vordiplom	Frühjahr 92	Aufgabe 2	Homogene lineare DGL höherer Ordnung
Vordiplom	Frühjahr 94	Aufgabe 3	Aufstellen eines FS
Vordiplom	Herbst 96	Aufgabe 2	Euler'sche DGL
Vordiplom	Herbst 96	Aufgabe 3	Homogene lineare DGL höherer Ordnung
Vordiplom	Frühjahr 97	Aufgabe 3	Homogenes System linearer DGL
Vordiplom	Herbst 97	Aufgabe 2	Aufstellen eines FS
Vordiplom	Frühjahr 98	Aufgabe 2	Inhomogene lineare DGL
Schein	Herbst 98	Aufgabe 2	Aufstellen eines FS

Näherungsverfahren

Newton Verfahren

Vordiplom	Herbst 93	Aufgabe 3	für Matrizen
Vordiplom	Frühjahr 96	Aufgabe 5	für Matrizen
Vordiplom	Herbst 96	Aufgabe 4	für Matrizen
Vordiplom	Frühjahr 97	Aufgabe 4	Banach'scher Fixpunktsatz
Vordiplom	Herbst 97	Aufgabe 5	für Matrizen

Approximation von DGL-Lösungen

Vordiplom	Frühjahr 96	Aufgabe 4	Explizites Euler-Chauchy-Verfahren
Vordiplom	Frühjahr 97	Aufgabe 5	Einzelschrittverfahren
Vordiplom	Herbst 97	Aufgabe 4	Implizites und verbessertes Euler-Verfahren
Vordiplom	Frühjahr 98	Aufgabe 4	Explizites Runge-Kutta-Verfahren
Schein	Herbst 98	Aufgabe 4	Trapez-Regel

Interpolationspolynome

Vordiplom	Herbst 90	Aufgabe 5	Interpolationsfehler
Vordiplom	Herbst 91	Aufgabe 5	Interpolationsfehler
Vordiplom	Frühjahr 92	Aufgabe 5	Interpolationsfehler
Vordiplom	Herbst 93	Aufgabe 5	Interpolationsfehler
Vordiplom	Frühjahr 96	Aufgabe 7	Newton- und Lagrange-Darstellung
Vordiplom	Herbst 96	Aufgabe 5	Newton- und Lagrange-Darstellung, Interpolationsfehler
Vordiplom	Frühjahr 97	Aufgabe 6	Newton-Darstellung, Interpolationsfehler
Vordiplom	Frühjahr 98	Aufgabe 5	Newton-Form
Schein	Herbst 98	Aufgabe 6	Newton-Darstellung, Interpolationsfehler

Lineare Gleichungssysteme

Vordiplom	Herbst 90	Aufgabe 4	LR-Zerlegung, Lösungen
Vordiplom	Herbst 91	Aufgabe 4	LR-Zerlegung, Determinante
Vordiplom	Frühjahr 92	Aufgabe 4	LR-Zerlegung
Vordiplom	Herbst 93	Aufgabe 4	LR-Zerlegung, regulär
Vordiplom	Frühjahr 94	Aufgabe 5	LR-Zerlegung, regulär, Lösungen
Vordiplom	Frühjahr 96	Aufgabe 6	LR-Zerlegung, Lösungen
Vordiplom	Herbst 96	Aufgabe 6	LR-Zerlegung, Bestimmen von Parametern
Vordiplom	Herbst 97	Aufgabe 6	LGS mittels LR-Zerlegung lösen
Vordiplom	Frühjahr 98	Aufgabe 6	LR-Zerlegung, pos.definit, Lösungen
Schein	Herbst 98	Aufgabe 5	Lösungen, Cholesky-Zerlegung

Anhang C

Vordiplomsklausur Sommer 1998

C.1 Aufgabenstellung

Aufgabe 1:

Geben Sie auf der Rückseite des Deckblatts an, ob die folgenden Aussagen jeweils richtig oder falsch sind (jede richtige Antwort ergibt einen Punkt):

a.) Es seien I ein offenes Intervall und $A(x)$ eine auf I Lipschitz-stetige $n \times n$ Matrix. Dann ist eine Wronski-Matrix (d.h. ein Fundamentalsystem) zur homogenen Gleichung

$$y'(x) = A(x)y(x)$$

eindeutig bestimmt.

b.) Seien I ein offenes Intervall,

$$(x_0, y_0) \in D = I \times \mathbb{R}, \qquad f(x, y) \text{ eine stetige Funktion auf } D.$$

Ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

lokal eindeutig lösbar, dann besitzt diese Gleichung eine maximale Lösung.

c.) Jede nichtsinguläre Matrix besitzt eine LR-Zerlegung.

d.) Je größer die Konditionszahl einer Matrix A ist, desto kleiner ist die Empfindlichkeit der Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ gegenüber Störungen der rechten Seite.

Punkte: 4

Aufgabe 2:

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'''(x) - y''(x) - y'(x) + y(x) = 4e^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Punkte: 9

Aufgabe 3:

Lösen Sie
$$y'(x) = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y}, \qquad \text{für } y > 0,\ x > 0 \text{ und } y(2) = 2.$$
Geben Sie auch die maximale Lösung mit dem maximalen Existenzintervall an.

Punkte: 7

Aufgabe 4:

Gegeben ist die Gleichung
$$y'' - xy' + y = 3, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$$
Berechnen Sie mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren
$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k), & k_2 &= f(t_k + \tfrac{1}{2}h,\ y_k + \tfrac{1}{2}hk_1), \\ k_3 &= f(t_k + \tfrac{1}{2}h,\ y_k + \tfrac{1}{2}hk_2), & k_4 &= f(t_k + h,\ y_k + hk_3), \end{aligned}$$
$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
und der Schrittweite $h = 1$ eine Approximation von $y(1), y'(1)$.

Punkte: 6

Aufgabe 5:

1) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß für jedes a mit $|a| < 1$ das nichtlineare Gleichungssystem
$$\begin{cases} x = a\sin(xy) \\ y = a\cos(xy) \end{cases} \qquad \text{auf} \quad D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 1\}$$
genau eine Lösung besitzt. Für den Kontraktivitätsbeweis verwenden Sie folgende Abschätzung der euklidischen Norm einer Matrix A: $\|A\|_2 \le \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}$.

2) Andererseits gilt (wegen $\sin(-z) = -\sin(z)$ und $\cos(-z) = \cos(z)$):
$$\text{Ist } (x^*, y^*) \text{ eine Lösung,} \quad \text{dann ist } (-x^*, y^*) \text{ auch eine Lösung.}$$
Überlegen Sie diesen “Widerspruch” und verwenden Sie ihn, um die Lösung dieses Systems explizit anzugeben.

Punkte: 6+2

Aufgabe 6:

a.) Finden Sie ein Polynom 1-ten Grades, $p(x) = m + nx$, das die Daten

t_i	-1	0	1
y_i	a	b	c

im Sinne der kleinsten Fehlerquadratmethode approximiert.

b.) Für welche a, b, c ist die Fehlerquadratsumme minimal?

Punkte: 4+2

Viel Erfolg!

C.2 Musterlösung

Aufgabe 1

a) Falsch. $\boxed{1}$

Eine Wronski-Matrix ist nur bis auf eine nichtsinguläre linearen Transformation bestimmt (s. Satz 1.9(iii) der Vorlesung).

b) Falsch. $\boxed{1}$

Um die Implikation

$$\text{Eindeutigkeit „im kleinen"} \Rightarrow \text{Eindeutigkeit „im großen"}$$

zu garantieren, reicht die Stetigkeit der Funktion f nicht. Z.B. die Gleichung

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(x_0) = y_0,$$

ist lokal eindeutig lösbar für jedes $y_0 \neq 0$, aber für ein großes Intervall $I \ni x_0$ gibt es viele Lösungen, deshalb keine maximale Lösung.
Lokal Lipschitz-stetigkeit von f auf D ist aber schon hinreichend (s. Satz 1.4).

c) Falsch (s. Bemerkung auf S. 52 der Vorlesung). $\boxed{1}$

Z.B. gibt es keine LR-Zerlegung zu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) Falsch. $\boxed{1}$

Das Umgekehrte gilt (s. S. 52 der Vorlesung).

Aufgabe 2

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 1. \qquad \boxed{1}$$

1b) Ein Fundamentalsystem: $\quad e^{-x}, \quad e^x, \quad xe^x.$ $\boxed{1}$

2) Wronski-Matrix W und die rechte Seite f des äquivalenten Systems:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^x & xe^x \\ -e^{-x} & e^x & (x+1)e^x \\ e^{-x} & e^x & (x+2)e^x \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4e^x \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

Bemerkung: Für das Berechnen der Wronski-Matrix durch Bestimmung der Eigen- und Hauptvektoren bekommt man auch 3 Punkte.

3) Eine spezielle Lösung des äquivalenten Systems:

$$Y_s(x) = W(x) \int_{x_0}^{x} \underbrace{W^{-1}(t) f(t)}_{b(t)} \, dt, \qquad Y_s(x_0) = (0,0,0)^T. \qquad \boxed{1}$$

3a) Berechnen von $b(x) = W^{-1}(x) f(x)$ als Lösung des Systems $W(x)b(x) = f(x)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} e^{-x} & e^x & xe^x & 0 \\ -e^{-x} & e^x & (x+1)e^x & 0 \\ e^{-x} & e^x & (x+2)e^x & 4e^x \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} e^{-x} & e^x & xe^x & 0 \\ 0 & 2e^x & (2x+1)e^x & 0 \\ 0 & 0 & 2e^x & 4e^x \end{array}\right) \Rightarrow b(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -(2x+1) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{1} + \boxed{1}$$

3b) Integrieren:

$$\tilde{b}(x) = \int_0^x b(t)\, dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \\ -(x^2 + x) \\ 2x \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

4a) Eine spezielle Lösung der ursprünglichen DGL:

$$y_s(x) := [Y_s(x)]_1 \quad (= \text{die 1-ste Komponente von } Y_s(x)), \qquad y_s(0) = y_s'(0) = y_s''(0) = 0,$$

die wegen der Nullanfangsbedingungen des AWP's die geforderte Lösung ist. $\boxed{1}$

4b) Berechnen der Lösung des AWP's:

$$\begin{aligned} y(x) = y_s(x) &= [W(x)\tilde{b}(x)]_1 = ([e^{-x}, e^x, xe^x], \tilde{b}(x)) \\ &= \tfrac{1}{2}e^x - \tfrac{1}{2}e^{-x} - (x^2+x)e^x + 2x^2e^x \\ &= \tfrac{1}{2}e^x - \tfrac{1}{2}e^{-x} - xe^x + x^2e^x, \end{aligned} \qquad \boxed{1}$$

Aufgabe 2 (Alternative)

2) Bestimmung einer speziellen Lösung durch den Ansatz

$$y_s(x) = cx^2e^x. \qquad \boxed{1}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y_s'(x) &= c(x^2+2x)e^x, \\ y_s''(x) &= c(x^2+4x+2)e^x, \\ y_s'''(x) &= c(x^2+6x+6)e^x, \end{aligned}$$

und

$$y_s''' - y_s'' - y_s' + y_s = 4ce^x := 4e^x \Rightarrow c = 1. \qquad \boxed{1}$$

3a) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3xe^x + x^2e^x. \qquad \boxed{1}$$

3b) Bestimmung der Konstanten entspechend den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \qquad \boxed{1}$$

d.h. Lösung des Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}+\boxed{1}+\boxed{1}$$

4) Also ist

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^x - xe^x + x^2e^x$$

die Lösung des AWP's.

Aufgabe 3

1) Die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y}, \quad y(2) = 2,$$

ist eine homogene Differentialgleichung der Form $y' = f(\frac{y}{x})$. $\boxed{1}$

2) Durch die Substitution

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$ $\boxed{1}$

erhält man

$$z' = \frac{1}{x}\left(\frac{z}{2} - \frac{1}{2z} - z\right) = \frac{1}{x}\left(-\frac{z^2+1}{2z}\right), \qquad z(2) = 1.$$ $\boxed{1}$

3) Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\int \frac{2z\,dz}{z^2+1} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(z^2+1) = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow z^2 + 1 = \frac{C}{x}.$$ $\boxed{1}$

4) Bestimmung der Konstante:

$$z(2) = 1 \Rightarrow C = 4.$$ $\boxed{1}$

5) Resubstitution:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{4}{x}, \quad \text{oder} \quad y^2 + x^2 = 4x.$$ $\boxed{1}$

6) Für $x > 0$, $y > 0$ haben wir folgende maximale Lösung:

$$y = \sqrt{x(4-x)}, \quad 0 < x < 4.$$ $\boxed{1}$

Die Gleichung

$$y^2 + x^2 = 4x \Leftrightarrow y^2 + (x-2)^2 = 2^2$$

definiert eine Kreis, für $y > 0$ eine Halbkreis.

Aufgabe 3 (Alternative)

1) Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y} \quad \left(= \frac{1}{2x}y - \frac{x}{2}y^{-1}\right), \quad x, y > 0, \quad y(2) = 2$$

ist eine Bernoulli-Differentialgleichung mit $\alpha = -1$.

2) Für $y > 0$ erhält man durch die Substitution

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x) = y^2(x) \qquad \boxed{1}$$

die lineare Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}z - x, \quad z(2) = 4, \quad z(x) > 0. \qquad \boxed{1}$$

3a) Lösung der homogenen Gleichung:

$$z' = \frac{1}{x}z \Rightarrow \ln z = \ln x + c_1 \Rightarrow z = Cx. \qquad \boxed{1}$$

3b) Variation der Konstanten:

$$C'(x)x = -x \Rightarrow C(x) = -x + c_2, \qquad \boxed{1}$$

3c) Allgemeine Lösung:

$$z(x) = C(x)x = x(c_2 - x), \quad \text{wenn} \quad z > 0.$$

4) Bestimmung der Konstante

$$z(2) = 4 \Rightarrow c_2 = 4. \qquad \boxed{1}$$

5) Resubstitution:

$$y^2(x) = x(4 - x) > 0. \qquad \boxed{1}$$

6) Für $x, y > 0$ ist die maximalle Lösung gegeben durch

$$y(x) = \sqrt{x(4 - x)}, \quad 0 < x < 4. \qquad \boxed{1}$$

Aufgabe 4

1) Reduktion auf ein System 1-ter Ordnung:

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$z'(x) := \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ xz_2(x) - z_1(x) + 3 \end{pmatrix} =: f(x, z). \qquad \boxed{1}$$

2) Das Runge-Kutta-Verfahren mit der Schrittweite $h = 1$:

$$k_1 = f(0, z(0)) = f\left(0, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 - 3 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1}$$

$$k_2 = f\left(\frac{1}{2}, z(0) + \frac{1}{2}k_1\right) = f\left(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - 4 + 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \qquad \boxed{1}$$

$$k_3 = k_2 = k_1 \qquad \boxed{1}$$

$$k_4 = f(1, z(0) + k_3) = f\left(1, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(1, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 - 5 + 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \qquad \boxed{1}$$

$$z(1) = z(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = z(0) + k_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1}$$

3) Also liefert das Runge-Kutta-Verfahren folgende Approximation

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

1) Eine Lösung des Gleichungssystems ist ein Fixpunkt der Funktion $F(x,y)$:

$$\binom{x}{y} = F\binom{x}{y}, \quad \text{wobei} \quad F\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin(xy) \\ a\cos(xy) \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

Überprüfung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes:

1.1) D ist offensichtlich abgeschlossen. $\boxed{1}$

1.2) F ist selbstabbildend, da

$$\forall(x,y) \quad F_1^2(x,y) + F_2^2(x,y) := a^2[\sin^2(xy) + \cos^2(xy)] = a^2 < 1, \qquad \boxed{1}$$

d.h.

$$F(D) \subset D.$$

1.3) Kontraktivität von F. Wegen Mittelwertsatz

$$L := \sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\| < 1 \Rightarrow F \text{ ist kontrahierend.}$$

Wir haben

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} ay\cos(xy) & ax\cos(xy) \\ -ay\sin(xy) & -ax\sin(xy) \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

Nach dem Hinweis

$$L^2 := \sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\|^2 \le \sup_{(x,y)\in D} \sum_{i,j=1}^{2} [F'_{ij}(x,y)]^2 = \sup_{x^2+y^2\le 1} a^2(y^2+x^2) = a^2 < 1. \qquad \boxed{2}$$

1.4) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz folgt, daß F auf D genau einen Fixpunkt besitzt.

2) Da für einen Fixpunkt (x^*, y^*) auch der Punkt $(-x^*, y^*)$ ein Fixpunkt der Funktion F ist, folgt wegen der oben bewiesenen Eindeutigkeit des Fixpunktes von F, daß

$$(x^*, y^*) = (-x^*, y^*) \quad \Rightarrow \quad x^* = 0. \qquad \boxed{1}$$

Daraus folgt

$$y^* := a\cos(x^*y^*) = a\cos 0 = a, \qquad \boxed{1}$$

d.h.

$$x^* = 0, \quad y^* = a$$

ist die (einzige) Lösung des Gleichungssystems.

Aufgabe 6

1) Gesucht ist ein Polynom $p(x) = m + nx$, so daß $\sum_{i=1}^{3}[p(t_i) - y_i]^2$ minimal ist.

1a) Die Koeffizienten m, n werden als Normallösung des überbestimmten Gleichungssystems $p(t_i) = y_i$ gefunden, d.h. des Systems

$$\begin{array}{lcl} m - n & = & a, \\ m & = & b, \\ m + n & = & c, \end{array} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{y}. \qquad \boxed{1}$$

1b) Man sucht die Normallösung, d.h. die Lösung der Gleichung

$$A^T A x = A^T y. \qquad \boxed{1}$$

Wir haben

$$A^T A x = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ c-a \end{pmatrix} = A^T y, \qquad \boxed{1}$$

woraus

$$m = \frac{a+b+c}{3}, \quad n = \frac{c-a}{2} \Rightarrow p(x) = \frac{a+b+c}{3} + \frac{c-a}{2}x. \qquad \boxed{1}$$

2a) Approximationsfehler in den Stützstellen:

$$\begin{array}{rcl} p(-1) - y_1 & = & \frac{a+b+c}{3} - \frac{c-a}{2} - a = \frac{a+b+c}{3} - \frac{c+a}{2} & = & \frac{2b-(a+c)}{6} \\ p(0) - y_2 & = & \frac{a+b+c}{3} - b & = & \frac{(a+c)-2b}{3} \\ p(1) - y_3 & = & \frac{a+b+c}{3} + \frac{c-a}{2} - c = \frac{a+b+c}{3} - \frac{c+a}{2} & = & \frac{2b-(a+c)}{6} \end{array} \qquad \boxed{1}$$

2b) Fehlerquadratsumme:

$$\sum_{i=1}^{3}[p(t_i) - y_i]^2 = \text{const} \cdot [2b - (a+c)]^2.$$

2c) Das Minimum, das $= 0$ ist, wird für $b = \dfrac{a+c}{2}$ erreicht $\boxed{1}$

Alternative

2a) Die Fehlerquadratsumme S ist immer ≥ 0.

2b) $S = 0 \Leftrightarrow p(t_i) = y_i \Leftrightarrow$ die Punkte (t_i, y_i) auf einer Gerade liegen: $\boxed{1}$

$$\frac{b-a}{0-(-1)} = \frac{c-b}{1-0} \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}. \qquad \boxed{1}$$

Anhang D

Vordiplomsklausur Frühjahr 1999

D.1 Aufgabenstellung

Aufgabe 1:

Geben Sie auf der Rückseite des Deckblatts an, ob die folgenden Aussagen jeweils richtig oder falsch sind. Jede richtige Antwort ergibt einen Punkt, für falsche Angaben gibt es **keinen** Punktabzug:

a.) Es seien I ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to I$ eine stetige Selbstabbildung, die genau einen Fixpunkt $x^* \in I$ hat. Dann existiert eine ϵ-Umgebung U_ϵ von x^*, so daß für jedes $x_0 \in U_\epsilon$ die Banach'sche Iterationsfolge $x_{k+1} = f(x_k)$ gegen x^* konvergiert.

b.) Die Differentialgleichung

$$f'''(x) - 3f''(x) + 3f'(x) - f(x) = \sin x, \quad x \in (0,1)$$

hat auf $(0,1)$ drei (3) linear unabhängige Lösungen.

c.) Für einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$A^T Ax = A^T b$$

stets lösbar.

d.) Das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + e^{x^2} y, \quad y(0) = 1$$

ist lokal eindeutig lösbar.

Punkte: 1+1+1+1=4

Aufgabe 2:

Lösen Sie das System der Differentialgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & 4y_1(t) + y_2(t), \\ y_2'(t) & = & -2y_1(t) + y_2(t) + e^{3t}; \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y_1(0) & = & 0, \\ y_2(0) & = & 0. \end{array} \right.$$

Hinweis: Reduktion auf $Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t)$.

Punkte: 9

Aufgabe 3:

Lösen Sie

$$y'(x) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{\ln^2 x}, \quad \text{für } 0 < x < 1 \text{ und } y(1/e) = e.$$

Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.
Hinweis zu einem der betreffenden Integrale: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Punkte: 6+1=7

Aufgabe 4:

Sei y die Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) = 2y(x) - xy'(x), \qquad y(2) = 5, \quad y'(2) = 4.$$

Berechnen Sie mit dem

a.) Euler-Cauchy-Verfahren: $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$

b.) rückwärtigen Euler-Cauchy-Verfahren: $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$

und der Schrittweite $h = 1$ jeweils eine Approximation von $y(3)$, $y'(3)$. Punkte: 6

Aufgabe 5:

Gegeben seien

$$A_a \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9+a & 9+2a & 3+a \\ 3 & 9+2a & 9+5a & 3+3a \\ 1 & 3+a & 3+3a & 2+2a \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 37 \\ 11 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$$

a.) Bestimmen Sie die LDL^T-Zerlegung der Matrix A_a.

b.) Lösen Sie das Gleichungssystem $A_a x = b$ für $a = 2$.

c.) Wieviele Lösungen hat das lineare GLeichungssystem $A_a x = c$ für $a = -1$?
(Begründung dazu) Punkte: 3+3+1=7

Aufgabe 6:

Sei $p \in P_3$ das kubische Interpolationspolynom zu $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$ in den folgenden Knoten

x_k	-3	-1	1	3
$f(x_k)$	1	-1	1	-1

a.) Zeigen Sie, ohne das Polynom p zu bestimmen, daß für den Interpolationsfehler in $x = 0$ gilt:

$$|f(0) - p(0)| \leq \frac{9}{24}(\pi/2)^4.$$

b.) Geben Sie p in der Newton-Form an.

c.) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $q \in P_4$ zu f mit der zusätzlichen Stützstelle $x_5 = 0$.

d.) Wie groß ist der Interpolationsfehler $|f(0) - p(0)|$ tatsächlich? (Begründung)

Punkte: 1+4+1+1=7

Viel Erfolg!

D.2 Musterlösung

Aufgabe 1

a) Falsch. $\boxed{1}$

Die dritte Voraussetzung des Banach'schen Fixpunktsatzes (Kontraktivität) fehlt.
Z.B. die Funktion

$$f(x) = 1/x, \quad x \in [1/2, 2]$$

hat genau einen Fixpunkt $x^* = 1$, aber, wenn $x_0 \neq 1$, alterniert jede Iterationsfolge $x_{k+1} = f(x_k)$ zwischen x_0 und $1/x_0$.

b) Richtig (s. S.23 der Vorlesung). $\boxed{1}$

Jede lineare DGL der Ordnung n mit stetiger rechten Seite hat n linear unabhängige Lösungen.

c) Richtig (s: S.81 der Vorlesung). $\boxed{1}$

d) Richtig. $\boxed{1}$

Die rechte Seite ist Lipschitz-stetig.

Aufgabe 2

1) Äquivalente Formulierung:

$$Y' = A \cdot Y(t) + F(t), \quad Y(0) = 0; \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

2a) Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & I-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3. \ \boxed{1}$$

2b) Bestimmung der Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad (A - 2I)v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad (A - 3I)v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

2c) Berechnung des Fundamentalsystems $\{e^{\lambda_k t} v_k\}_{k=1}^2$ und einer Wronski-Matrix:

$$y_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad y_2 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad W(t) = [y_1, y_2] = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -2e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \qquad \boxed{1}$$

3) Lösung des Systems (Variation der Konstanten)

$$Y' = AY + F, \quad Y(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(t) = W(t)\int_{t_0}^t \underbrace{W^{-1}(x)F(x)}_{b(x)}\, dt. \qquad \boxed{1}$$

3a) Berechnen von $b(t) = W^{-1}(t)F(t)$ als Lösung des Systems $W(t)b(t) = F(t)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{2t} & e^{3t} & 0 \\ -2e^{2t} & -e^{3t} & e^{3t} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} e^{2t} & e^{3t} & 0 \\ 0 & -e^{3t} & e^{3t} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad b(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

3b) Integrieren: $\tilde{b}(t) = \int_0^t b(x)dx = \begin{pmatrix} -e^t + 1 \\ t \end{pmatrix}$. $\boxed{1}$

3c) Berechnen von $Y(t)$:

$$Y(t) = W(t)\tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -2e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^t + 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{3t} + e^{2t} + te^{3t} \\ 2e^{3t} - 2e^{2t} - te^{3t} \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

$$\sum = \boxed{9}$$

Aufgabe 3

1) Die DGL

$$y' = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{\ln^2 x} \qquad 0 < x < 1, \quad y(1/e) = e$$

ist eine Bernoulli-DGL mit $\alpha = 2$.

2a) Substitution (für $y(x) \neq 0$):

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x) = 1/y(x) \qquad \boxed{1}$$

2b) Die lineare Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}z - \frac{1}{\ln^2 x}, \quad z(1/e) = 1/e \qquad \boxed{1}$$

3a) Lösung der homogenen Gleichung:

$$z' = \frac{1}{x}z \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| + c_1 \quad \Rightarrow \quad z = Cx. \qquad \boxed{1}$$

3b) Variation der Konstanten:

$$C'(x)x = -\frac{1}{\ln^2 x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -\frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2 x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{1}{\ln x} + c_2 \qquad \boxed{1}$$

3c) Allgemeine Lösung:

$$z(x) = C(x)x = \frac{x}{\ln x} + c_2 x$$

4) Bestimmung der Konstante:

$$-1/e + c_2/e = z(1/e) = 1/e \quad \Rightarrow \quad c_2 = 2. \qquad \boxed{1}$$

5) Resubstitution:

$$y(x) = 1/z(x) = \frac{\ln x}{x(2\ln x + 1)}. \qquad \boxed{1}$$

6) Da für $x = 1/\sqrt{e}$ der Nenner $x(2\ln x + 1) = 0$ ist, und die Ungleichungen

$$0 < 1/e < 1/\sqrt{e} < 1$$

gelten, ist für $0 < x < 1$ das maximale Existenzintervall gegeben durch

$$0 < x < 1/\sqrt{e}. \qquad \boxed{1}$$

$$\sum = \boxed{7}$$

Aufgabe 4

1) Reduktion auf ein System 1-ter Ordnung:

$$z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad z^{(0)} := z(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

$$z' := \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ 2z_1 - xz_2 \end{pmatrix} =: f(x, z). \qquad \boxed{1}$$

a.) Euler-Cauchy-Verfahren ($h = 1, x_0 = 2$):

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2^{(0)} \\ 2 \cdot z_1^{(0)} - x_0 \cdot z_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

b.) Rückwärtiges Euler-Cauchy-Verfahren ($h = 1, x_1 = 3$):

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2^{(1)} \\ 2 \cdot z_1^{(1)} - x_1 \cdot z_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

und das äquivalente Gleichungssystem ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 + x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 14 \end{array} \right) \Rightarrow z^{(1)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1} + \boxed{1}$$

$$\sum = \boxed{6}$$

Aufgabe 5

a.) LDL^T-Zerlegung von $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9+a & 9+2a & 3+a \\ 3 & 9+2a & 9+5a & 3+3a \\ 1 & 3+a & 3+3a & 2+2a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ \mathbf{3} & a & 2a & a \\ \mathbf{3} & 2a & 5a & 3a \\ \mathbf{1} & a & 3a & 1+2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ \mathbf{3} & a & 2a & a \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & a & a \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & a & 1+a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ \mathbf{3} & a & 2a & a \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & a & a \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{3}$$

d.h.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \mathbf{3} & 1 & & \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & 1 & \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \operatorname{diag}(1, a, a, 1), \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

b.) $a = 2 \quad \Rightarrow \quad D = \operatorname{diag}(1, 2, 2, 1).$

$$L \underbrace{D \overbrace{L^T x}^{\tilde{y}}}_{y} = b = (0, 2, 6, 3)^T.$$

$$Ly = b \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 3 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \boxed{1}$$

$$D\tilde{y} = y \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \boxed{1}$$

$$L^T x = \tilde{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

c.) Genau eine Lösung. (Für $a = -1$ ist $\det A_a = \det D = a^2 \neq 0$). $\boxed{1}$

$$\sum = \boxed{7}$$

Aufgabe 6

a.) Interpolationsfehler:

$$|p(x) - f(x)| \le \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!}|\omega(x)|, \qquad \omega(x) := (x+3)(x+1)(x-1)(x-3).$$

$$|f^{(4)}(\xi)| := |(\sin\frac{\pi}{2}\xi)^{(4)}| \le (\pi/2)^4, \quad |\omega(0)| = 9 \quad \Rightarrow \quad |f(0) - p(0)| \le \frac{9}{24}(\pi/2)^4. \qquad \boxed{1}$$

b.)-c.) Die Newton-Darstellung (mit zusätzlicher Stützstelle 0):

$$\begin{array}{r|cccccc}
-3 & \mathbf{1} & & & & \\
 & & \mathbf{-1} & & & \\
-1 & -1 & & \mathbf{\frac{1}{2}} & & \\
 & & 1 & & \mathbf{-\frac{1}{6}} & \dots \\
1 & 1 & & -\frac{1}{2} & \dots\vdots & \mathbf{0} \\
 & & -1 & \dots\vdots & -\frac{1}{6} & \\
3 & -1 & \dots\vdots & -\frac{2}{3} & & \\
\dots & \dots\vdots & -\frac{1}{3} & & & \\
0 & 0 & & & &
\end{array} \qquad \boxed{3}$$

Also gilt:

$$p(x) = 1 - (x+3) + \frac{1}{2}(x+3)(x+1) - \frac{1}{6}(x+3)(x+1)(x-1) \qquad \boxed{1}$$

und

$$q(x) \equiv p(x) \qquad \boxed{1}$$

d.) Deshalb gilt $f(0) := q(0) = p(0)$, und tatsächlich ist $|f(0) - p(0)| = 0$. $\boxed{1}$

$$\sum = \boxed{7}$$