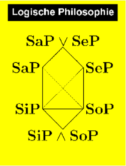
Semantik

Korrektheit und Vollständigkeit

Uwe Scheffler

(Technische Universität Dresden)

Mai 2012



Widerspruchsfreiheit

Satz

Alle Theoreme sind allgemeingültig.

Alle Axiome sind allgemeingültig.

Alle Regeln erhalten die Allgemeingültigkeit.

Widerspruchsfreiheitsbegriffe

Semantisch widerspruchsfrei ist ein System genau dann, wenn es keine Formel ϕ so gibt, daß $\vdash \phi$ und $\vdash \neg\phi$.

Absolut widerspruchsfrei ist ein System genau dann, wenn nicht alle Formeln beweisbar sind.

Satz

Die klassische Prädikatenlogik ist semantisch und absolut widerspruchsfrei.

Nutze $\vdash \phi \quad \Longrightarrow \quad \models \phi$.

Nutze darüber hinaus die semantische Widerspruchsfreiheit.

Ableitbarkeit aus beliebigen Mengen

$\Gamma \vdash \psi$ genau dann, wenn es eine Menge von Aussagen $\phi_1 \in \Gamma, \dots, \phi_n \in \Gamma$ so gibt, daß $A_1, \dots, A_n \vdash \psi$.

Korrektheit

Korrekt ist ein logisches System bezüglich einer Semantik genau dann, wenn gilt:
Wenn $\Gamma \vdash \phi$, dann $\Gamma \models \phi$.

Satz

Die Prädikatenlogik ist korrekt bezüglich der vorgestellten Semantik.

Beweis der Korrektheit

$\Gamma \vdash \psi$	Ann
$\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$	Def
$\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots \to (\phi_n \to \psi) \ldots))$	DT
$\models \phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots \to (\phi_n \to \psi) \ldots))$	WidFrei
Für alle $\mathfrak{M}$: Wenn $\mathfrak{M} \models \phi_1, \ldots, \phi_n$, dann $\mathfrak{M} \models \psi$	Def $\to$
Für alle $\mathfrak{M}$: Wenn $\mathfrak{M} \models \Gamma$, dann $\mathfrak{M} \models \psi$	$\phi_i \in \Gamma$
$\Gamma \models \psi$	Def $\models$

Konsistenz

Inkonsistent heißt eine Formelmenge Γ, wenn es ein ϕ so gibt, daß $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Konsistent ist eine Formelmenge, die nicht inkonsistent ist.

Konsistent (inkonsistent) mit einer Formelmenge Γ heißt eine Formel ϕ, wenn die Menge $\Gamma \cup \phi$ konsistent (inkonsistent) ist.

Maximal konsistent ist eine Formelmenge Γ, wenn gilt

1. Γ ist konsistent.
2. Für alle $\phi \notin \Gamma$ gilt: $\Gamma \cup \phi$ ist inkonsistent.

ω-Vollständigkeit

ω-vollständig heißt eine Formelmenge, die mit jeder Aussage $\neg\forall\tau\phi$ auch eine Aussage $\neg\phi(\tau/\tau')$ enthält.

Freie Variablen und neue Konstanten

Satz

Sei τ' eine Individuenkonstante, die nicht in ϕ vorkommt, und sei τ eine Individuenvariable. Es gilt:

Es gibt genau dann ein $\mathfrak{M}, \mathfrak{V}$ so, daß $\mathfrak{M}, \mathfrak{V} \models \phi$, wenn es ein $\mathfrak{M}', \mathfrak{V}'$ so gibt, daß $\mathfrak{M}', \mathfrak{V}' \models \phi(\tau/\tau')$.

Folge $\models \phi$ *genau dann, wenn* $\models \phi(\tau/\tau')$.

Links nach rechts: $\mathfrak{I}'(\tau') = \mathfrak{V}(\tau)$*, sonst wie* $\mathfrak{I}$

Rechts nach links: $\mathfrak{V}(\tau) = \mathfrak{I}'(\tau')$*, sonst wie* $\mathfrak{V}'$

Vollständigkeit

Vollständig ist ein System genau dann, wenn jede Folgebeziehung auch eine Ableitung ist: Wenn $\Gamma \models \phi$, dann $\Gamma \vdash \phi$.

Satz

Die Prädikatenlogik ist (stark) vollständig.

- **Zu beweisen:**

  Jede konsistente Formelmenge kann zu einer maximal konsistenten und ω-vollständigen erweitert werden.

  Jede maximal konsistente und ω-vollständige Formelmenge hat ein Modell.

  Eine Formelmenge ist genau dann konsistent, wenn sie ein Modell hat.

Das zentrale Lemma

Satz

Jede konsistente Formelmenge kann zu einer maximal konsistenten und ω-vollständigen erweitert werden.

Voraussetzung Satzmengen, freie Variablen werden durch neue Konstanten ersetzt.

Methode Zwei verschränkte auffüllende Prozeduren. Nicht konstruktiv.

Beschreibung Nummeriere alle Formeln. Eine Runde konsistent maximalisieren. Eine Runde ω-vervollständigen mit neuen Konstanten. Wegen der Spracherweiterung eine zweite Runde maximalisieren. Wegen der Formelerweiterung eine zweite Runde vervollständigen. Und so fort.

Gödelnummerierung der Formeln

Verendlichen des Alphabets: $x, a, P, {}', \forall, \neg, \rightarrow,), ($

$$\forall x_1 P_3(x_1) \rightarrow P_3(y) \quad \rightsquigarrow \quad \forall x' P'''(x') \rightarrow P'''(x'')$$

Zuweisen von Zahlen:

$$\begin{array}{lcl} x & \rightsquigarrow & 1 \\ a & \rightsquigarrow & 2 \\ P & \rightsquigarrow & 3 \\ {}' & \rightsquigarrow & 4 \\ \forall & \rightsquigarrow & 5 \\ \neg & \rightsquigarrow & 6 \\ \rightarrow & \rightsquigarrow & 7 \\ ) & \rightsquigarrow & 8 \\ (& \rightsquigarrow & 9 \end{array}$$

Gödelnummerierung der Formeln II

Primzahlzerlegung nutzen:

$\forall$	x	$'$	P	$'$	$'$	$'$	$($	x	$'$	$)$
2^5	3^1	5^4	7^3	11^4	13^4	17^4	19^9	23^1	29^4	31^8

$\rightarrow$	P	$'$	$'$	$'$	$($	x	$'$	$'$	$)$
37^7	41^3	43^4	47^4	53^4	59^9	61^1	67^4	71^4	73^8

1. Jede Zahl ist Ergebnis höchstens einer Formelgödelisierung. Die Nummer ist immer zu finden.
2. Es gibt ein Entscheidungsverfahren für die Frage, ob eine Zahl eine Gödelnummer einer Formel ist.
3. Aus der Gödelnummer einer Formel kann man die Formel wiederherstellen.

Konsistent maximalisieren und ω-vervollständigen I

- Mengen K_n^m und H_n^m im Anschluß an eine konsistente Menge K und eine Ordnung von Aussagen $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$
- Für H_l^m und H_k^{m+1} und K_l^m und K_k^{m+1}: in letzteren kommen alle IK aus ersteren und mglw. mehr vor; $\tau'_{k,l}$ heißt: die k-te Konstante der l-ten Mengenschicht.

Konsistent maximalisieren und ω-vervollständigen II

1. $K_0^0 = K$
2. $K_{n+1}^m = \begin{cases} K_n^m & \text{falls } K_n^m \cup \{\phi_n\} \text{ inkonsistent ist} \\ K_n^m \cup \{\phi\} & \text{falls } K_n^m \cup \{\phi_n\} \text{ konsistent ist} \end{cases}$
3. $H_n^0 = \bigcup K_l^n$ für alle l
4. $H_n^{m+1} = \begin{cases} H_n^m & \text{falls die m-te Formel von } H_n^0 \\ & \text{nicht } \sim\forall\tau\phi \text{ ist} \\ H_n^m \cup \phi(\tau/\tau'_{m,n}) & \textit{ansonsten} \end{cases}$
5. $K_0^{n+1} = \bigcup H_n^l$ für alle l
6. $K^\omega = \bigcup K_k^l \cup \bigcup H_n^m$ für alle l, k, m und n

Warum wir alles richtig gemacht haben

Satz

Für die so gebildete Menge K^ω gilt:

1. $K \subseteq K^\omega$.
2. K^ω *ist konsistent.*
3. K^ω *ist maximal.*
4. K^ω *ist* ω*-vollständig.*

1. gilt, weil Maximierung und Vervollständigung (S. 15) nur Formeln hinzufügen, nie herausnehmen können.
3. gilt, weil jede angenommene zu K^ω konsistente aber nicht dort enthaltene Formel irgendwann auf ihre Konsistenz zu einem K_n^m überprüft wurde. Ist die Formel konsistent zu K^ω, dann ist sie es auch zu K_n^m – wegen $K_n^m \subseteq K^\omega$ und wurde demnach hinzugefügt.
4. gilt analog zu 3.

2. K^ω ist konsistent

- Angenommen, K^ω ist inkonsistent. Dann gibt es eine endliche Menge $\phi_1, \ldots, \phi_l$ und eine Formel ψ so, daß $\phi_1, \ldots, \phi_l \vdash \psi$ und $\phi_1, \ldots, \phi_l \vdash \neg\psi$.
  Dann gibt es auch eine K- oder H-Menge, in der die Formeln ϕ alle enthalten sind, die also selbst schon inkonsistent ist.
- Da K konsistent ist, muß die Inkonsistenz dieser Menge M_n^m durch Maximalisieren oder Vervollständigen einer früheren, konsistenten Menge entstanden sein.
- Maximalisieren produziert nach Voraussetzung nur konsistente Mengen. Auch Vervollständigen kann man ausschließen:

$$
\begin{array}{lll}
M_n^{m-1} \cup \{\neg\chi(\tau/\tau')\} \vdash \xi & M_n^{m-1} \cup \{\neg\chi(\tau/\tau')\} \vdash \neg\xi & \text{Vorauss} \\
M_n^{m-1} \vdash \neg\chi(\tau/\tau') \to \xi & M_n^{m-1} \vdash \neg\chi(\tau/\tau') \to \neg\xi & \text{Ded-T} \\
M_n^{m-1} \vdash \chi(\tau/\tau') & & \text{IndBew} \\
M_n^{m-1} \vdash \chi(\tau'/\tau'') & & \text{Umben} \\
M_n^{m-1} \vdash \forall\tau''\chi(\tau'') & & \text{Gen}
\end{array}
$$

  Damit wäre schon M_n^{m-1} inkonsistent.

Eigenschaften maaximal konsistenter und ω-vollständiger Mengen K

Satz

1. *Für jede Formel ϕ: $\phi \in K$ oder $\neg\phi \in K$, aber nicht beide.*
2. *Für alle ϕ, ψ: $\phi \to \psi \in K$ genau dann, wenn $\phi \notin K$ oder $\psi \in K$.*
3. *Für alle ϕ: $\forall\tau\phi \in K$ genau dann, wenn für alle Individuenkonstanten τ' $\phi(\tau/\tau') \in K$.*

Für jede Formel ϕ: $\phi \in K$ oder $\neg\phi \in K$, aber nicht beide.

1. ϕ und $\neg\phi$ sind nicht beide in K, sonst wäre die inkonsistent.
2. Angenommen, ϕ und $\neg\phi$ sind beide nicht in K. Dann gilt wegen der Maximalität, daß für irgendwelche ψ, ψ':

$K \cup \phi \vdash \psi, \neg\psi$	$K \cup \neg\phi \vdash \psi', \neg\psi'$	Vorauss
$K \vdash \neg\phi$	$K \vdash \neg\neg\phi$	DedT,IndBew

   Dann wäre K, gegen die Voraussetzung, inkonsistent.

Für alle ϕ, ψ: $\phi \to \psi \in K$ genau dann, wenn $\phi \notin K$ oder $\psi \in K$

1. Angenommen, $\phi \to \psi \in K$, $\phi \in K$ und $\psi \notin K$.
   Dann ist – wegen der Negationsbedingung – $\neg\psi \in K$, damit auch $K \vdash \neg\phi$.
   Wegen $\phi \to \psi \in K$, $\phi \in K$ gilt auch $K \vdash \phi$ und K wäre inkonsistent.
2. Angenommen, $\phi \to \psi \notin K$ und auch $\phi \notin K$ oder $\psi \in K$.
   Dann gilt $K \vdash \neg(\phi \to \psi)$ wegen der Negationsbedingung.
   2.1 Falls $\phi \notin K$ gilt $\neg\phi \in K$, und $K \vdash \phi \to \psi$ folgt mit $\neg\phi \vdash \phi \to \psi$.
   2.2 Falls $\psi \in K$, folgt $K \vdash \phi \to \psi$ mit $\psi \vdash \phi \to \psi$.

   In beiden Fällen wäre K inkonsistent.

Für alle ϕ: $\forall\tau\phi \in K$ genau dann, wenn für alle Individuenkonstanten τ' $\phi(\tau/\tau') \in K$

1. Angenommen, $\forall\tau\phi \in K$ und für eine Individuenkonstante τ' $\phi(\tau/\tau') \notin K$.
   Dann gilt für diese Konstante $\neg\phi(\tau/\tau') \in K$, also $K \vdash \neg\phi(\tau/\tau')$.
   Es gilt aber $K \vdash \phi(\tau/\tau')$ nach der Beseitigungsregel für den Allquantor und K wäre inkonsistent.
2. Angenommen, $\forall\tau\phi \notin K$, und für alle Individuenkonstanten τ' $\phi(\tau/\tau') \in K$.
   Dann ist $\neg\forall\tau\phi \in K$, besitzt eine Nummer und hat über die Vervollständigung (mindestens einmal) einen Zeugen der Form $\neg\phi(\tau/\tau'')$ in K erzeugt.
   Eines der τ' ist aber τ'' und damit wäre K inkonsistent.

Modelle für maximal konsistente und ω-vollständige Mengen

Universum ist die Menge der natürlichen Zahlen.

Individuenkonstanten werden durchnummeriert und auf ihre Positionsnummer interpretiert.

Prädikatkonstanten werden auf entsprechende n-Tupel mit der Regel interpretiert: Dann und nur dann, wenn es eine atomare Formel $\pi(\tau_{i1}, \ldots, \tau_{ik})$ in K gibt, ist $\langle \mathfrak{I}(\tau_{i1}), \ldots, \mathfrak{I}(\tau_{ik}) \rangle \in \mathfrak{I}(\pi)$.

$\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{D}, \mathfrak{I} \rangle$ so, daß $\mathfrak{D} = \mathbb{N}$

$$\mathfrak{I}(\tau) \in \mathbb{N}$$

$$\mathfrak{I}(\pi) = \{\langle \mathfrak{I}(\tau_{i1}, \ldots, \mathfrak{I}(\tau_{ik}) \rangle : \pi(\tau_{i1}, \ldots, \tau_{ik}) \in K\}$$

Gültigkeit im Modell

Satz

Sei K eine maximal konsistente, ω-vollständige Menge und $\mathfrak{M}$ ein wie oben beschriebenes Modell. Dann ist eine Formel genau dann im Modell erfüllt (gültig), wenn sie Element der Menge K ist.

Für alle ϕ: $\mathfrak{M} \models \phi$ *genau dann, wenn* $\phi \in K$.

Methode ist eine Induktion über den Formelaufbau, Anzahl n der logischen Operatoren in ϕ

Anfang n=0, ϕ – atomare Formel:
$\langle \mathfrak{I}(\tau_{i1}, \ldots, \mathfrak{I}(\tau_{ik})\rangle \in \mathfrak{I}(\pi)$
genau dann, wenn
$\pi(\tau_{i1}, \ldots, \tau_{ik}) \in K$.

Gültig im Modell heißt, in K sein – Induktionsschritt

Sei ϕ eine Negation $\neg\psi$.

1. $\mathfrak{M} \models \neg\psi$ — Ann
   $\mathfrak{M} \not\models \psi$ — Def$\neg$
   $\psi \notin K$ — IVor
   $\neg\psi \in K$ — NegLemma
2. $\mathfrak{M} \not\models \neg\psi$ — Ann
   $\mathfrak{M} \models \psi$ — Def$\neg$
   $\psi \in K$ — IVor
   $\neg\psi \notin K$ — NegLemma

Gültig im Modell heißt, in *K* sein – Induktionsschritt

Sei ϕ eine Subjunktion $\psi \rightarrow \psi'$

1. $\mathfrak{M} \models \psi \rightarrow \psi'$ — Ann
   $\mathfrak{M} \not\models \psi$ oder $\mathfrak{M} \models \psi'$ — Def$\rightarrow$
   $\psi \notin K$ oder $\psi' \in K$ — IVor
   $\psi \rightarrow \psi' \in K$ — SubLemma
2. $\mathfrak{M} \not\models \psi \rightarrow \psi'$ — Ann
   $\mathfrak{M} \models \psi$ und $\mathfrak{M} \not\models \psi'$ — Def$\rightarrow$
   $\psi \in K$ und $\psi' \notin K$ — IVor
   $\psi \rightarrow \psi' \notin K$ — SubLemma

Gültig im Modell heißt, in K sein – Induktionsschritt

Sei ϕ eine Allaussage $\forall\tau\psi$

1. $\mathfrak{M} \models \forall\tau\psi$ — Ann
   $\mathfrak{M} \models \psi(\tau/\tau')$ für alle IK τ' — Def$\forall$
   $\psi(\tau/\tau') \in K$ für alle IK τ' — IVor
   $\forall\tau\psi \in K$ — GenLemma
2. $\mathfrak{M} \not\models \forall\tau\psi$ — Ann
   $\mathfrak{M} \not\models \psi(\tau/\tau')$ für eine IK τ' — ω-Voll
   $\psi(\tau/\tau') \notin K$ für eine IK τ' — IVor
   $\forall\tau\psi \notin K$ — GenLemma

Konsistenz und Modellexistenz

Satz

Eine Formelmenge ist genau dann konsistent, wenn sie ein Modell hat.

1. Sei die Menge inkonsistent. Dann gibt es eine Formel ϕ so, daß $K \vdash \phi, \neg\phi$. Wegen der Korrektheit gilt $K \models \phi, \neg\phi$. Dann ist das Modell so, daß $\mathfrak{M} \models \phi, \neg\phi$. So etwas gibt es nicht.
2. Sei die Menge konsistent. Dann ist sie zu einer maximal konsistenten und ω-vollständigen erweiterbar. Die hat ein Modell, das auch eines für die Ausgangs-Menge ist.

Starke Vollständigkeit

Definition Ein logisches System heißt genau dann stark vollständig bezüglich einer Semantik, wenn jede Folgebeziehung auch eine Ableitbarkeitsbeziehung ist:

$$\text{Wenn } K \models \phi, \text{ dann } K \vdash \phi$$

Satz

Die Prädikatenlogik ist stark vollständig.

Beweis Sei $K \models \phi$
dann ist $K \cup \neg\phi$ nicht erfüllbar, hat kein Modell;
dann ist $K \cup \neg\phi$ inkonsistent;
dann gibt es ein ψ so, daß $K \cup \neg\phi \vdash \psi, \neg\psi$;
dann $K \vdash \phi$.

. . . und die Folgen

Vollständigkeit Jede Tautologie ist ein Theorem.

Kompaktheit Eine Folgebeziehung heißt genau dann kompakt, wenn für jede Folgerung $K \models \phi$ ein endliches $K' \subseteq K$ so gibt, daß $K' \models \phi$.
Die Prädikatenlogik ist kompakt.
(Beweis über die Vollständigkeit)

Löwenheim-Skolem 1 Jede konsistente Formelmenge hat ein Modell in den natürlichen Zahlen.
(Jede Theorie mit einem Modell hat auch ein abzählbares Modell.)

Löwenheim-Skolem2 Jede konsistente Formelmenge hat ein Modell für jede unendliche Kardinalzahl κ.
(Beweis über die Abbildung der „neuen“ Elemente auf ein fixes Element und Induktion über die Formelmenge)