

# Stoffsammlung

## Regelsysteme

von Stephan Senn, D-ITET

### Inhaltsverzeichnis

<b>Zustandsraumdarstellung bei zeitkontinuierlichen Systemen.....</b>	<b>4</b>
Ordnung und Grad eines Systems.....	4
SISO - MIMO.....	4
Allgemeine Lösung im Zeitbereich.....	4
Allgemeine Lösung im Laplacebereich.....	4
Transferfunktion oder Übertragungsfunktion.....	4
Zustandstranformation bei zeitkont. Systemen.....	5
Berechnung der Polstellen.....	5
Berechnung der Nullstellen.....	5
Stabilität eines Systems.....	5
<b>Zustandsraumdarstellung bei zeitdiskreten Systemen.....</b>	<b>6</b>
Allgemeine Lösung im diskreten Zeitbereich.....	6
Allgemeine Lösung im Z-Bereich (Z-Transformation).....	6
<b>Systeme.....</b>	<b>7</b>
Systeme 1. Ordnung (PT1-Glied).....	7
Systeme 2. Ordnung (PT2-Glied).....	7
Systeme höherer Ordnung.....	8
<b>Steuerung und Regelung.....</b>	<b>9</b>
<b>Blockschaltbilder.....</b>	<b>9</b>
Regelkreis mit negativer Rückkopplung.....	9
Blockschaltalgebra.....	10
<b>Spezielle Systeme.....</b>	<b>10</b>
Mechanische Systeme.....	10
Gleichstrommotor.....	10
Laminare nicht visköse Flüssigkeitssysteme.....	10
Laminare visköse Flüssigkeitssysteme.....	11
Wärmesysteme.....	11
<b>Stationärer Zustand.....</b>	<b>11</b>
<b>Linearisierung.....</b>	<b>12</b>
<b>Die klassischen Regler.....</b>	<b>13</b>
P-Regler.....	13
PI-Regler.....	13
PD-Regler.....	13
PID-Regler.....	13
<b>Antiwindup.....</b>	<b>14</b>
<b>Kompensationsglieder.....</b>	<b>15</b>
Lead-Kompensationsglied.....	15
Lag-Kompensationsglied.....	15
Lead-Lag-Kompensationsglied.....	16
Notch-Kompensationsglied.....	16

<b>Stabilitätskriterien</b> .....	<b>17</b>
Routh-Hurwitz-Stabilitätskriterium.....	17
Nyquist-Stabilitätskriterium.....	18
Stabilitätsbetrachtungen mit dem Root-Locus-Plot.....	21
Bode Stabilitätskriterium.....	21
<b>Der klassische Reglerentwurf</b> .....	<b>22</b>
<b>Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols</b> .....	<b>23</b>
Sprungmethode.....	23
Schwingmethode.....	24
<b>Reglerentwurf mit dem Root-Locus-Plot (RLP)</b> .....	<b>24</b>
<b>Reglerentwurf im Frequenzbereich mit Hilfe des Bodeplots</b> .....	<b>25</b>
Wichtige Kenngrößen im Frequenzbereich.....	25
Betrag-Phase-Gesetz nach Bode.....	28
Reglerentwurf mit Hilfe des Phasenrandes (Lead-Glied).....	28
Reglerentwurf zur Verringerung des Regelfehlers (Lag-Glied).....	28
Einfluss von Totzeiten abschätzen.....	29
<b>Bodeplot</b> .....	<b>29</b>
Amplitudendiagramm.....	29
Phasendiagramm.....	30
<b>Nyquistplot</b> .....	<b>31</b>
Tipps.....	31
<b>Root-Locus-Plot (RLP)</b> .....	<b>32</b>
Zeichenregeln.....	32
<b>Nicholsplot</b> .....	<b>33</b>
Tipps.....	33
Charakteristische Größen herauslesen.....	34
<b>Normalformen</b> .....	<b>34</b>
Regelungsnormalform.....	34
Beobachternormalform.....	35
Modalform.....	35
<b>Erreichbarkeit, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit</b> .....	<b>37</b>
Erreichbarkeit (Reachability).....	37
Steuerbarkeit (Controllability).....	37
Beobachtbarkeit (Observability).....	37
Untersuchung von Systemen mit Signalflussgraphen.....	38
<b>Der moderne Reglerentwurf</b> .....	<b>40</b>
Zustandsrückführung.....	40
Referenzsysteme.....	41
Integralregelung.....	42
Beobachtersysteme.....	43
Wahl der Polstellen.....	44
Dualität zwischen Zustandsrückführung und Beobachtersystemen.....	44
Zustandsrückführung mit Beobachter.....	45
<b>Mehrvariablenregelung</b> .....	<b>46</b>
Problemstellung.....	46
Regelkreisstrukturen.....	46
Entkopplung.....	47
<b>Anhang</b> .....	<b>49</b>
Faltungsintegral.....	49
Siebeeigenschaft des Dirac-Stosses.....	49
Anfangswerttheorem (Initial Value Theorem).....	49

Endwerttheorem (Final Value Theorem).....	49
Matrixexponentialschreibweise.....	49
Inverse einer zweidimensionalen Matrix.....	50
Inverse einer dreidimensionalen Matrix.....	50
Die Z-Transformation.....	50
Laplacebereich – Z-Bereich.....	51
Eigenschaften der Laplacetransformation.....	51
Laplacetransformationstabelle.....	51
Sensitivität.....	52
<b>Quellenangaben.....</b>	<b>52</b>

Zürich, den 21. November 2005

# Zustandsraumdarstellung bei zeitkontinuierlichen Systemen

Ein System lässt sich durch eine Zustandsfunktion und eine Ausgangsfunktion charakterisieren:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Weiter gilt:

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^p, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

## Ordnung und Grad eines Systems

- **Ordnung:** Das System ist von der Ordnung  $n$ .
- **Grad:** Der Grad eines Systems bezeichnet den Grad des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion. Man beachte, dass dabei die Übertragungsfunktion ungekürzt vorliegt (keine Pol-Nullstellenstreichungen).

## SISO - MIMO

SISO: Single Input Single Output

$m = 1$  und  $p = 1$ !

MIMO: Multiple Input Multiple Output

$m, p$  beliebig!

## Allgemeine Lösung im Zeitbereich

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A\tau} Bu(t-\tau) d\tau \quad \text{mit } x_0 = x(0)$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A\tau} Bu(t-\tau) d\tau + Du(t)$$

## Allgemeine Lösung im Laplacebereich

$$X(s) = (sI - A)^{-1} (x_0 + BU(s)) \quad \text{mit } x_0 = x(0)$$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s) + C(sI - A)^{-1} x_0$$

## Transferfunktion oder Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$G(s)$  besteht aus einem Nennerpolynom  $N(s)$  und einem Zählerpolynom  $Z(s)$ . Es gilt nun:

$N(s) = 0$  : Polstellen des Systems

$Z(s) = 0$  : Nullstellen des Systems

## **Zustandsstranformation bei zeitkont. Systemen**

Gegeben sei die folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Hx + Ju$$

Für den neuen Zustand  $z$  gilt:

$$x = Tz$$

Für die neue Zustandsraumdarstellung gilt:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Damit gilt:

$$A = T^{-1}FT$$

$$B = T^{-1}G$$

$$C = HT$$

$$D = J$$

## **Berechnung der Polstellen**

Gegeben sei die folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y(t) = Cx + Du$$

Für die Berechnung der Polstellen gilt:

$$\det(p \cdot I - A) = 0$$

**Merke:** Die Polstellen sind also die Eigenwerte der Systemmatrix  $A$ .

## **Berechnung der Nullstellen**

Gegeben sei die folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y(t) = Cx + Du$$

Für die Berechnung der Nullstellen gilt:

$$\det \begin{pmatrix} n \cdot I - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} = 0$$

## **Stabilität eines Systems**

Gegeben sei die folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y(t) = Cx + Du$$

Ein System in Zustandsraumdarstellung ist stabil, wenn für die Systemmatrix  $A$  gilt:

$$\det(A) > 0 \wedge \text{spur}(A) < 0$$

# Zustandsraumdarstellung bei zeitdiskreten Systemen

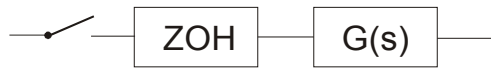
Die zeitkontinuierliche Zustandsraumdarstellung lautet:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Das zeitkontinuierliche System  $G(s)$  wird diskretisiert. Dabei gilt für das zeitdiskrete System  $G(z)$ :

$G(z)$ :



Im diskretisierten Zustandsraum gilt dann:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad \text{mit der Abkürzung} \quad f(kT) = f(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Dabei gilt:

$$A = e^{FT} \quad \text{mit der Abtastzeit } T$$

$$B = \int_0^T e^{F\tau} G d\tau$$

Wie berechnet man die Matrix  $e^{FT}$  am besten?

- Berechnung mit Hilfe der inversen Laplacetransformation:

$$e^{FT} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - F)^{-1}\} \quad \text{mit } t = T$$

- Berechnung mit Hilfe von Eigenvektoren und Eigenwerten:

$$e^{FT} = Qe^{DT}Q^{-1} \quad \text{mit } F = QDQ^{-1}$$

## Allgemeine Lösung im diskreten Zeitbereich

Das Eingangssignal  $u(t)$  wird mit der Periode  $T$  abgetastet.

$$x(k+1) = e^{FT} x(k) + u(k) \int_0^T e^{Fv} G dv$$

$$y(k) = CA^k x_0 + \sum_{i=1}^k CA^{k-i} Bu(k-i) + Du(k) \quad \text{mit } x_0 = x(0)$$

## Allgemeine Lösung im Z-Bereich (Z-Transformation)

$$X(z) = (zI - A)^{-1} BU(z) + z(zI - A)^{-1} x_0 \quad \text{mit } x_0 = x(0)$$

$$Y(z) = [C(zI - A)^{-1} B + D] U(z) + Cz(zI - A)^{-1} x_0$$

# Systeme

## Systeme 1. Ordnung (PT<sub>1</sub>-Glieder)

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot U(s)$$

K: Verstärkungsfaktor (gain)

τ: Zeitkonstante (time constant)

Für h(t) gilt<sup>1</sup>:

$$h(t) = \frac{K}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sigma_s(t)$$

## Systeme 2. Ordnung (PT<sub>2</sub>-Glieder)

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1} \cdot U(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \cdot U(s) \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{1}{\omega_n}$$

K: Verstärkungsfaktor (gain)

τ: Zeitkonstante (time constant)

ζ: Dämpfungsfaktor (damping factor)

ω<sub>n</sub>: natürliche Frequenz (natural frequency)

Für H(s) wurden folgende Annahmen getroffen:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j \omega_d$$

$$H(s) = K \frac{\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} = K \frac{\omega_n^2}{(s - (-\sigma + j \omega_d))(s - (-\sigma - j \omega_d))} = K \frac{\omega_n^2}{(s + \sigma)^2 + \omega_d^2}$$

Dabei gilt:

$$\sigma = \zeta \cdot \omega_n, \quad \omega_d \cdot T = 2\pi$$

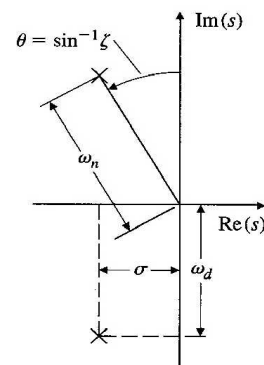
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Daraus folgt:

- Realteil der Polstellen: σ
- Imaginärteil der Polstellen: ±ω<sub>d</sub>
- Abstand zu den Polstellen:  

$$\omega_n = \sqrt{\omega_d^2 + \sigma^2} = \sqrt{\omega_d^2 + \zeta^2}$$
- Argument der Polstellen (von der Imaginärachse):

$$\zeta = \sin(\theta) = \frac{\omega_d}{\omega_n}$$

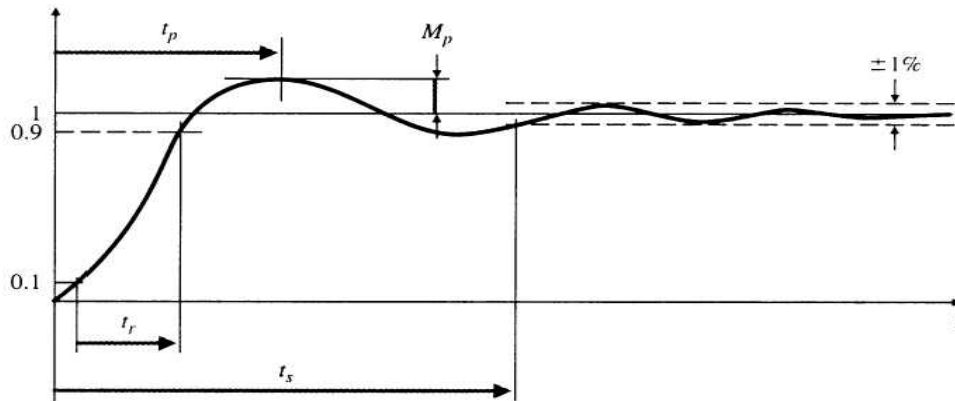


<sup>1</sup> Die Einheitsschrittfunktion σ<sub>s</sub>(t) ist nicht zu verwechseln mit der Konstanten σ.

Für  $h(t)$  gilt:

$$h(t) = K \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) \cdot \sigma_s(t)$$

Weiter gilt:



- Anstiegszeit (rise time):  $t_r \approx \frac{1,8}{\omega_n}$
- Anregelzeit (peak time):  $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$
- Überschwingen (overshoot):  $M_p = e^{\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$  mit  $0 \leq \zeta < 1$
- Ausregelzeit (settling time):  $t_s \approx \frac{4,6}{\zeta \omega_n}$

## Systeme höherer Ordnung

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \left( \frac{1}{\tau s + 1} \right)^n \cdot U(s)$$

Für  $h(t)$  gilt:

$$h(t) = \frac{K}{\tau} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$$

### Merke:

- Die Zeitkonstante des Gesamtsystems entspricht ungefähr der Summe der Zeitkonstanten der Einzelsysteme. Es gilt also:  $\tau_{tot} = \tau_{System 1} + \tau_{System 2} + \dots + \tau_{System n}$ .
- Eine Kaskadierung von Systemen 1. Ordnung entspricht ungefähr einer Totzeit. Es gilt demnach:



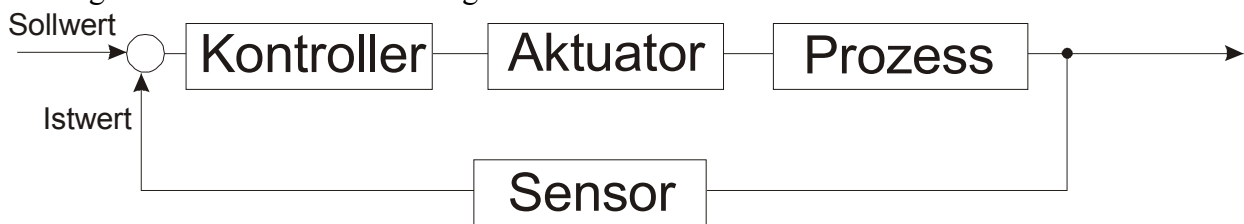
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\frac{\tau}{n} s + 1} \right) = e^{-\tau s}$$

- Eine zusätzliche Nullstelle in der LHE verstärkt das Überschwingen, wenn die Nullstelle weniger als um einen Faktor 4 vom Realteil der Pole entfernt ist.
- Eine zusätzliche Nullstelle in der RHE unterdrückt das Überschwingen und kann auch zum Unterschwingen führen.
- Ein zusätzlicher Pol verlängert die Anstiegszeit, wenn der zusätzliche Pol weniger als um einen Faktor 4 vom Realteil der komplexen Pole entfernt ist.

## Steuerung und Regelung

- **Steuerung:** Bei der Steuerung wird ein Sollwert vorgegeben. Das System hat aber keine Kontrolle über die Auswirkungen dieser Sollvorgabe. Deshalb spricht man auch von Feedforward Control oder Open Loop.
- **Regler:** Der Regler vergleicht den Sollwert mit dem tatsächlichen Wert, dem Istwert. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Feedback Control oder Closed Loop.

Ein Regler besteht meist aus den folgenden Elementen:



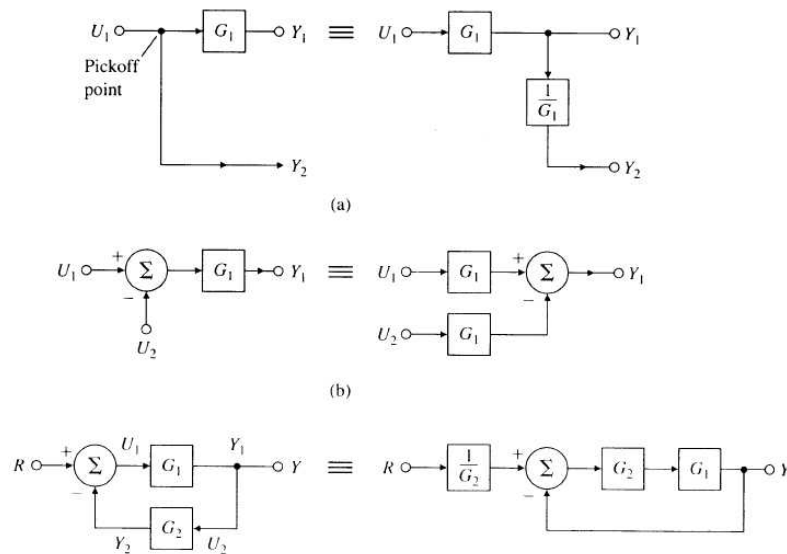
## Blockschaltbilder

### **Regelkreis mit negativer Rückkopplung**

Für die Übertragungsfunktion mit negativer Rückkopplung gilt folgende Formel:

$$G(s) = \frac{\text{Übertragungsfunktion zwischen Ein- und Ausgang}}{1 + \text{Übertragungsfunktion im Kreis}}$$

## Blockschaltalgebra



## Spezielle Systeme

### Mechanische Systeme

- Translationsbewegungen:  $m \ddot{x} = -b \dot{x} - k x + F$
- Rotationsbewegungen:  $J \ddot{\phi} = -B \dot{\phi} - T \phi + F$  mit der Massenträgheit  $J$

### Gleichstrommotor

- Antriebsmoment im Motor:  $T = K_t i_a$
- im Motor induzierte Spannung:  $v_{ind} = K_e \dot{\phi}_m$
- visköse Reibung des Motors:  $F_r = b \dot{\phi}_m$
- mechanischer Teil:  $J_m \ddot{\phi}_m + b \dot{\phi}_m = K_t i_a$
- elektrischer Teil:  $L_a \dot{i}_a + R_a i_a = v_g - K_e \dot{\phi}_m$
- Lorentzkraft:  $F = q(\vec{v} \times \vec{B}) = I(\vec{l} \times \vec{B})$

### Laminare nicht visköse Flüssigkeitssysteme

Für laminare also nicht turbulente Strömungen, bei der die auftretenden Reibungen (Zähigkeit und Viskosität) vernachlässigt werden, gilt:

- Volumenstrom:  $\dot{V} = vA = const$
- Druck ist überall konstant und hängt nicht vom Ort ab:  $p(x) = const$
- Bernouilligleichung:  $\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g x = const$
- Gesetz von Torricelli für ausströmende Flüssigkeiten aus einem Tank:  
an der Tankoberfläche gilt:  $\frac{1}{2} \rho v_a^2 + p + \rho g y_a \approx p + \rho g y_a = const$  mit  $v_a \approx 0$

bei der Öffnung:  $\frac{1}{2}\rho v_b^2 + p + \rho g y_b = const$

Daraus folgt:  $\frac{1}{2}\rho v_b^2 + p + \rho g y_b = p + \rho g y_a \rightarrow v_b^2 = 2g(y_a - y_b) = 2gh$

- Venturi-Effekt:

**Wenn die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit zunimmt, fällt der Druck.**

Für gleiches Niveau gilt für die Bernouilligleichung:  $\frac{1}{2}\rho v^2 + p = const$

- Fluss der Flüssigkeit:  $q = \dot{m} = \rho \dot{V} = \rho A \dot{x}$
- Änderung des Flusses der Flüssigkeit:  $\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho A h) = \rho \frac{d}{dt}(\Delta V) = q_{in} - q_{out}$

### **Laminare visköse Flüssigkeitssysteme**

- Der Druck p ist vom Ort abhängig. Es gilt:  $\Delta p = p_1 - p_2 = \dot{V} R$
- Fluss der Flüssigkeit:  $q_{12} = \frac{1}{R} (p_1 - p_2)^{\frac{1}{\alpha}}$

### **Wärmesysteme**

- Fluss der Wärmeenergie:  $Q = \frac{1}{R} \cdot (T_1 - T_2)$  ,  $Q = C \cdot \dot{T}$  mit der Wärmekapazität C
- spezifische Wärmekapazität:  $c = \frac{C}{m}$

## **Stationärer Zustand**

Der stationäre Zustand bzw. die stationäre Lösung wird ermittelt, indem die zeitlichen Ableitungen des Zustandsvektors x auf null gesetzt werden. Es gilt also:

$$A \cdot x + B \cdot u = 0 \quad \text{mit} \quad \dot{x} = 0$$

$$y = C \cdot x + D \cdot u$$

# Linearisierung

Ein nicht-lineares System wird mit Hilfe der Taylorreihe approximiert. Es gilt:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \frac{1}{1!} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) \nabla f(\underline{x}_0) + \frac{1}{2!} \cdot [(\underline{x} - \underline{x}_0) \nabla]^2 f(\underline{x}_0) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot [(\underline{x} - \underline{x}_0) \nabla]^n f(\underline{x}_0)$$

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^k$$

Für die Linearisierung gilt:

$$\tilde{f}(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + (\underline{x} - \underline{x}_0) \nabla f(\underline{x}_0)$$

Ist  $\underline{f}$  auch ein Spaltenvektor, dann gilt für die Linearisierung:

$$\tilde{\underline{f}}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}_0) + J_{\underline{x}=\underline{x}_0} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$$

J ist die Jacobi-Matrix. Sie lautet:

$$J = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Für die Linearisierung eines allgemeinen Systems im Zustandsraum gilt:

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) = \dot{\underline{x}}$$

$$\underline{g}(\underline{x}, \underline{u}) = \underline{y}$$

Die Funktionen  $\underline{f}$  und  $\underline{g}$  müssen nun linearisiert werden. Für die Linearisierung wird ein Arbeitspunkt  $P(\underline{x}_0, \underline{u}_0)$  benötigt. Oft wird der stationäre Zustand als Linearisierungspunkt gewählt. Es gilt dann:

$$\dot{\underline{x}} = 0 \rightarrow \underline{f}(\underline{x}_0, \underline{u}_0) = 0$$

Weiter gilt dann:

$$\underline{\Delta x} = \dot{\underline{x}} - \dot{\underline{x}}_0 = \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}_0, \underline{u}_0) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^T}_{\underline{x}=\underline{x}_0} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}^T}_{\underline{u}=\underline{u}_0} \cdot (\underline{u} - \underline{u}_0) = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^T}_{\underline{x}=\underline{x}_0} \cdot \underline{\Delta x} + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}^T}_{\underline{u}=\underline{u}_0} \cdot \underline{\Delta u}$$

$$\underline{\Delta y} = \underline{y} - \underline{y}_0 = \underline{y} = \underline{g}(\underline{x}_0, \underline{u}_0) + \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}^T}_{\underline{x}=\underline{x}_0} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}^T}_{\underline{u}=\underline{u}_0} \cdot (\underline{u} - \underline{u}_0) = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}^T}_{\underline{x}=\underline{x}_0} \cdot \underline{\Delta x} + \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}^T}_{\underline{u}=\underline{u}_0} \cdot \underline{\Delta u}$$

Das linearisierte System wird in der Regelungstechnik meist in folgender Form angegeben:

$$\underline{\Delta \dot{x}} = A \cdot \underline{\Delta x} + B \cdot \underline{\Delta u}$$

$$\underline{\Delta y} = C \cdot \underline{\Delta x} + D \cdot \underline{\Delta u}$$

Für die Jacobi-Matrizen gilt:

$$A = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^T}_{\underline{x}=\underline{x}_0}, \quad B = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}^T}_{\underline{u}=\underline{u}_0}, \quad C = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{x}^T}_{\underline{x}=\underline{x}_0}, \quad D = \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{u}^T}_{\underline{u}=\underline{u}_0}$$

# Die klassischen Regler

## **P-Regler**

Der Proportional-Regler, kurz P-Regler, ist wie folgt definiert:

$$u(t) = K \cdot e(t)$$

$$U(s) = D(s) \cdot E(s) \quad \text{mit} \quad D(s) = K$$

## **PI-Regler**

Der Proportional-Integral-Regler, kurz PI-Regler, ist wie folgt definiert:

$$u(t) = \frac{K}{T_I} \cdot \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K$$

$$U(s) = D(s) \cdot E(s) \quad \text{mit} \quad D(s) = K \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

**Merke:**

Für einen Regler mit I-Anteil ist der bleibende Regelfehler immer null.

## **PD-Regler**

Der Proportional-Differential-Regler, kurz PD-Regler, ist wie folgt definiert:

$$u(t) = K [e(t) + T_D \cdot \dot{e}(t)]$$

$$U(s) = D(s) \cdot E(s) \quad \text{mit} \quad D(s) = K (1 + T_D s)$$

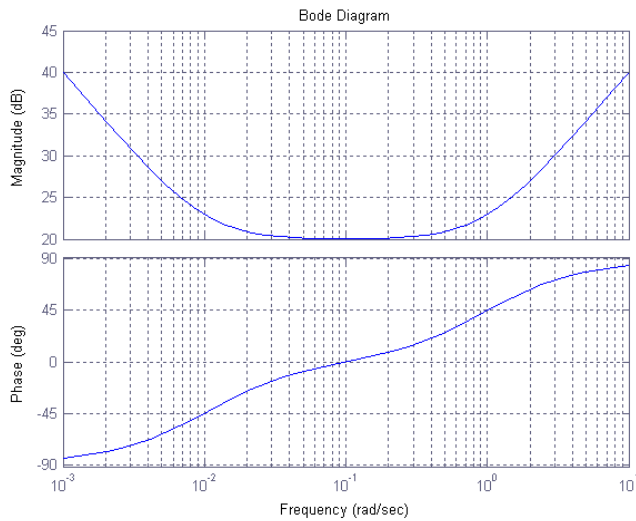
## **PID-Regler**

Der Proportional-Integral-Differential-Regler, kurz PID-Regler, ist wie folgt definiert:

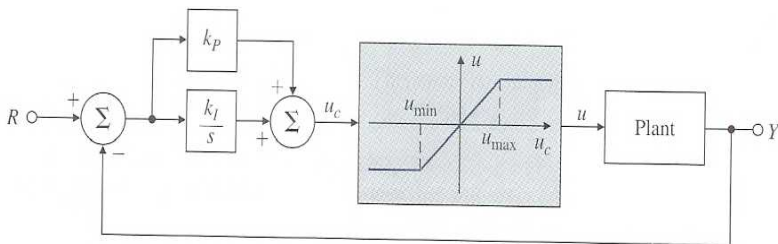
$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \cdot \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + T_D \cdot \dot{e}(t) \right)$$

$$U(s) = D(s) \cdot E(s) \quad \text{mit} \quad D(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

Für  $T_I=100$ ,  $T_D=1$  und  $K=10$  gilt:

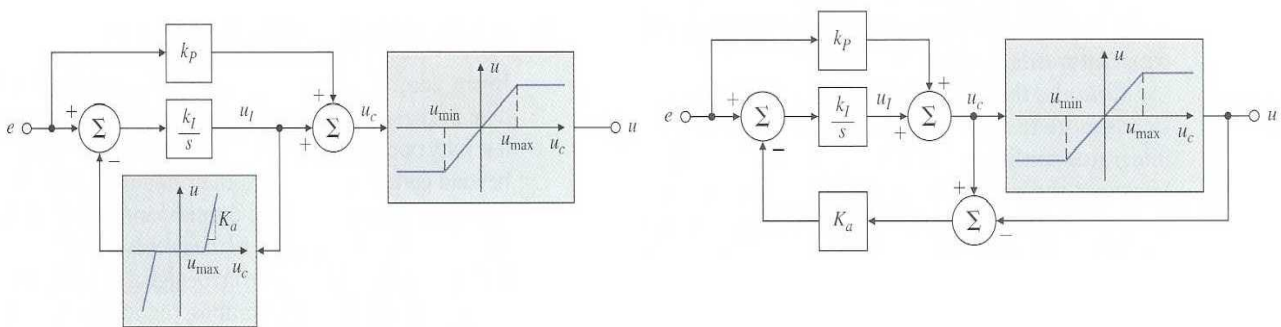


## Antiwindup



Jeder physikalische Regler hat ein maximales Ausgangssignal (z.B. maximale Ventilöffnung, maximale Verstärkung, usw.). Es kann nun passieren, dass vom Regler eine weitere Erhöhung des Ausgangssignals verlangt wird, was dieser aber nicht leisten kann. Der Regler gerät dann in den sogenannten Sättigungsbereich. Der Regelfehler nimmt dann natürlich laufend zu, da der Regler nicht mehr nachregeln kann. Antiwindup-Glieder sorgen dafür, dass der Regelfehler klein gehalten werden kann, auch wenn der Regler in den Sättigungsbereich gerät.

Die folgenden Abbildungen zeigen zwei einfache Antiwindup-PI-Regler:



# Kompensationsglieder

## Lead-Kompensationsglied

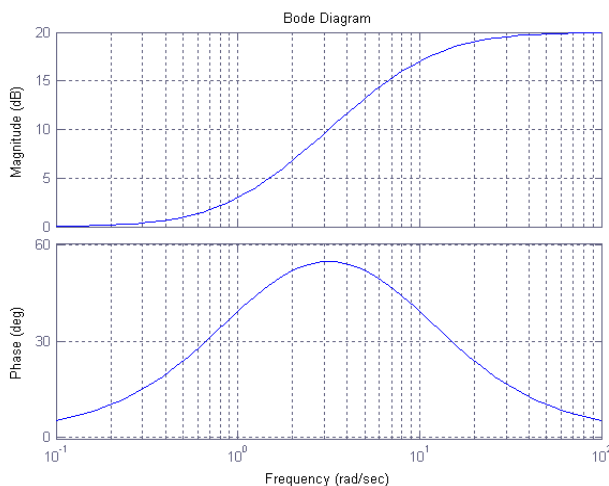
Das Lead-Glied approximiert einen PD-Regler. Der PD-Regler führt dazu, dass hohe Frequenzen sehr stark verstärkt werden. Damit sinkt der Signal-Rausch-Abstand (Signal-Noise-Ratio), da die Störungen mitverstärkt werden. Die Idee besteht nun darin, die Verstärkung zu limitieren. Genau dies bewirkt das Lead-Glied. Es verstärkt obere Frequenzen nicht beliebig stark. Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$D(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad \text{mit } \alpha < 1$$

Für die maximale Phase und die maximale Frequenz gilt:

$$\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}, \quad \sin(\phi_{max}) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{1-\sin(\phi_{max})}{1+\sin(\phi_{max})}$$

Für  $\alpha=0.1$  und  $T=1$  gilt:

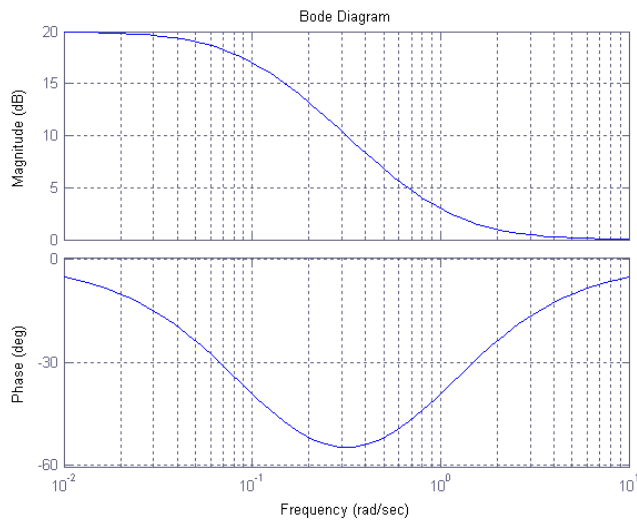


## Lag-Kompensationsglied

Das Lag-Glied approximiert einen PI-Regler. Die Idee besteht darin, nur die unteren Frequenzen eines Systems anzuheben. Dadurch wird der Phasenrand des Systems kaum beeinträchtigt. Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$D(s) = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad \text{mit } \alpha > 1$$

Für  $\alpha=10$  und  $T=1$  gilt:



### **Lead-Lag-Kompensationsglied**

Die Übertragungsfunktion lautet:

$$D(s) = \frac{K}{s} \cdot \left[ (T_D s + 1) \left( s + \frac{1}{T_I} \right) \right]$$

Im wesentlichen ist das Lead-Lag-Kompensationsglied ein PID-Regler.

### **Notch-Kompensationsglied**

Das Notch-Glied dient dazu, hohe Frequenzanteile oder Resonanzfrequenzen zu eliminieren. Dabei sind zwei Verfahren für den Design eines Notch-Gliedes üblich:

- *Gain Stabilization*: Hohe Frequenzanteile werden durch Integrierglieder eliminiert.
- *Phase Stabilization*: Resonanzfrequenzen werden durch das Hinzufügen von entsprechenden Nullstellen eliminiert. Die Idee besteht darin, eine Polstelle durch eine nahe Nullstelle auszulöschen.



# Stabilitätskriterien

## Routh-Hurwitz-Stabilitätskriterium

Gegeben sei die Übertragungsfunktion eines geschlossenen Regelsystems T(s):

$$T(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)}$$

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

Das System T(s) ist dann stabil, wenn alle Polstellen in der linken Halbebene (LHE) liegen. Die Polstellen sind die Nullstellen des Nennerpolynoms a(s). Es gilt also:

$$a(s) = 0$$

Für Polynome vom Grad grösser als vier gibt es aber keine geschlossene Lösung zur Bestimmung der Nullstellen. Jedoch kann ein Verfahren angegeben werden, das aussagt, ob alle Nullstellen in der linken Halbebene liegen.

Dazu wird eine sogenannte Routh-Hurwitz-Matrix bestimmt. Besitzt die erste Spalte dieser Matrix nur positive Elemente, dann liegen alle Nullstellen bzw. Polstellen in der linken Halbebene; im anderen Fall nicht. Für die Routh-Hurwitz-Matrix gilt:

n	s <sup>n</sup>	:	1	a <sub>2</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>6</sub>	a <sub>8</sub>	...
n-1	s <sup>n-1</sup>	:	a <sub>1</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>7</sub>	a <sub>9</sub>	...
n-2	s <sup>n-2</sup>	:	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>	b <sub>5</sub>	...
n-3	s <sup>n-3</sup>	:	c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>	c <sub>4</sub>	c <sub>5</sub>	...
n-4	s <sup>n-4</sup>	:	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>	d <sub>5</sub>	...
...	...	:	...	...	...	...	...	...
3	s <sup>3</sup>	:	*	*	*	0	0	0
2	s <sup>2</sup>	:	*	*	x <sub>1</sub>	...	x <sub>i</sub>	x <sub>i+1</sub>
1	s	:	*	0	y <sub>1</sub>	...	y <sub>i</sub>	y <sub>i+1</sub>
0	1	:	*	0	z <sub>1</sub>	...	z <sub>i</sub>	z <sub>i+1</sub>

$$z_i = \frac{-\begin{vmatrix} x_1 & x_{i+1} \\ y_1 & y_{i+1} \end{vmatrix}}{y_1}$$

Beispiele:  $b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}$ ,  $b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}$ ,  $b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1}$ , ...

### Man beachte:

Sind die Koeffizienten eines Polynoms a(s) vom Grad 2 alle positiv, dann liegen alle Polstellen in der linken Halbebene.

## Spezialfälle

- **Fall 1: Nur ein Element der ersten Spalte wird null**

Man führt einen Fehler  $\epsilon > 0$  ein, sodass das Element nicht null, sondern einen leicht grösseren Wert erhält. Am Ende wird für jedes folgende Element der Tabelle der Grenzwert für  $\epsilon$  gegen null gebildet:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\cdot) = ?$$

- **Fall 2: Die ganze Zeile wird null**

In diesem Fall liegen die Polstellen auf der imaginären Achse. Man schreibt nun, ausgehend von der vorausgehenden Zeile  $i$ , das Polynom  $p(s)$  auf:

$$p(s) = x_1 s^i + x_2 s^{i-2} + \dots$$

Setzt man  $p(s)$  auf null, so erhält man gerade die komplex konjugierte Nullstelle. Man leitet nun  $p(s)$  nach  $s$  ab und ersetzt die Nullzeile  $i+1$  mit dem neuen Polynom und fährt dann mit der Berechnung der Routh-Hurwitz-Matrix fort.

## Anzahl Poststellen in der rechten Halbebene (RHE)

Die Anzahl Vorzeichenwechsel in der ersten Spalte der Routh-Hurwitz-Matrix entspricht der Anzahl Polstellen in der RHE. Die Anzahl Polstellen eines Systems wird durch die Ordnung des Systems festgelegt. Damit kann man also auch die Anzahl Polstellen in der LHE berechnen.

## Nyquist-Stabilitätskriterium

Gegeben sei ein offenes System  $G(s)$  (Regelstrecke) und das dazugehörige geschlossene Regelsystem  $T(s)$ . Es gilt:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

Für die Polstellen von  $T(s)$  gilt:

$$1 + KG(s) = 0$$

## Cauchy's Argumentprinzip

Man definiert zunächst in der komplexen Ebene einen Punkt  $s_0$ , der einen beliebigen geschlossenen Weg  $\Gamma$  durchläuft. Der geschlossene Weg  $\Gamma$  umschliesse ein geschlossenes Gebiet  $C$ . Es sei  $z$  ein stationärer Punkt der komplexen Ebene. Es bezeichne  $\alpha$  der Drehwinkel von  $z$  nach  $s_0$ .

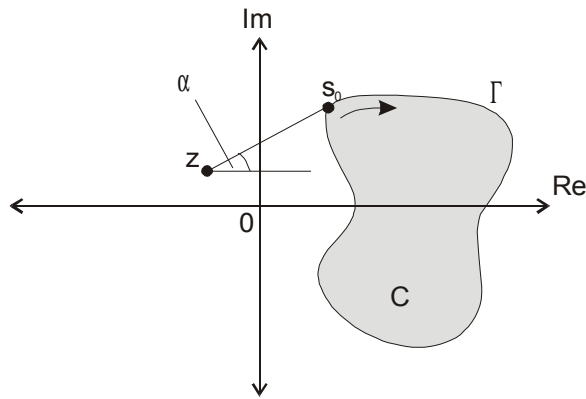
Für die Änderung des Drehwinkels gilt nun:

- **$z$  ist ausserhalb des Gebiets  $C$ :**

Der absolute maximale Drehwinkel ist kleiner als  $360^\circ$ .

- **$z$  ist innerhalb des Gebiets  $C$  (mit Rand):**

Der absolute maximale Drehwinkel beträgt eine volle Umdrehung, also  $360^\circ$ .



Aus dieser Erkenntnis folgt für den maximalen Drehwinkel  $\gamma$  von Pol- und Nullstellen eines Systems  $H(s)$ :

$$H(s_0) = \vec{v} = |\vec{v}| \cdot e^{j\gamma}$$

$$\gamma = \sum \theta_i - \sum \phi_i$$

$\theta_i$ : Drehwinkel der Nullstellen

$\phi_i$ : Drehwinkel der Polstellen

- Liegen die Pol- und Nullstellen ausserhalb des Gebiets C, dann ist  $|\gamma|$  kleiner als  $360^\circ$ .  $H(s_0)$  umkreist also den Ursprung nicht.
- Liegen die Pol- und Nullstellen innerhalb des Gebiets C, dann ist  $|\gamma|$  grösser als  $360^\circ$ .  $H(s_0)$  umkreist also den Ursprung.

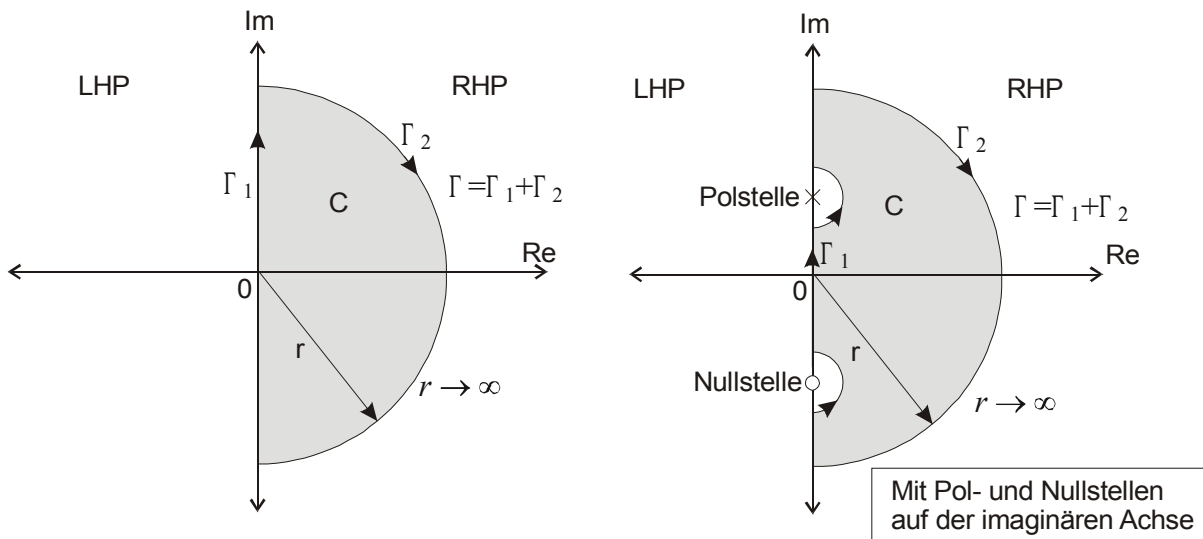
Daraus folgt das Argumentsprinzip:

**Es bezeichne Z die Anzahl Nullstellen und P die Anzahl Polstellen im Gebiet C. Für die Anzahl Umkreisungen n von  $H(s)$  des Ursprungs gilt dann:  $n = Z - P$ .**

### Anwendung in der Regelungstechnik

Ein System ist dann stabil, wenn seine Polstellen in der linken Halbebene (LHE) liegen. Man definiert nun gemäss dem Argumentprinzip die rechte Halbebene (RHE) als Gebiet C. Liegen nun P Pol- und N Nullstellen in C, so gilt:

$$n = Z - P$$



Fallen Pol- und Nullstellen auf die imaginäre Achse, so wird das Gebiet C so gewählt, dass diese Pol- und Nullstellen nicht im Gebiet liegen.

Das Nennerpolynom des Regelsystems T(s) lautet:

$$L(s) = 1 + KG(s)$$

Das System L(s) umkreist dann den Ursprung, wenn Pol- oder Nullstellen in C liegen. Um die Regelstrecke G(s) direkt betrachten zu können, löst man L(s) nach G(s) auf. Man erhält:

$$G(s) = \frac{L(s) - 1}{K}$$

Das System L(s) wird also um -1 verschoben und mit K gestaucht. Liegen nun Pol- oder Nullstellen in C, so entspricht dies, bezogen auf das System G(s), einer Umkreisung des Punktes -1/K.

Für die Betrachtung der Umkreisungen wählt man die Nyquistplot-Darstellung. Der Nyquistplot betrachtet aber nur die Werte entlang dem Weg  $\Gamma_1$ , also für  $s = j\omega$ . Deshalb muss der Nyquistplot um den Weg  $\Gamma_2$  ergänzt werden. Bei dieser Betrachtung erweist sich die folgende Grenzwertbetrachtung als nützlich:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [G(r \cdot e^{j\omega})] = ?$$

Damit folgt das berühmte Stabilitätskriterium in der Regelungstechnik:

**Ein System G(s) ist dann stabil, wenn die Anzahl Umkreisungen des Punktes -1/K im Nyquistplot der Differenz der Anzahl Null- und Polstellen in C, also in der rechten Halbebene, entspricht.**

Für die Umrkreisungen von -1/K gilt:

- Umkreisung im Uhrzeigersinn: positiver Beitrag
- Umkreisung im Gegenuhrzeigersinn: negativer Beitrag

## Vorgehen

1. Nyquistplot ermitteln und ergänzen.
2. Pol- und Nullstellen in der RHE bestimmen.
3. Anzahl N mit Hilfe der Formel  $N = Z - P$  berechnen.
4. Den Punkt -1/K solange auf der reellen Achse verschieben, bis die Anzahl Umkreisungen von -1/K der Anzahl N entspricht.
5. Stabilitätsabschnitte auf der reellen Achse einzeichnen und Bedingungen für K formulieren.

## Pol- und Nullstellen auf der imaginären Achse

Fallen Pol- und Nullstellen auf die imaginäre Achse, so kann man zwei mögliche Gebiete für C definieren:

- Fall 1: Die Pol- und Nullstellen gehören nicht zum Gebiet C.
- Fall 2: Die Pol- und Nullstellen gehören zum Gebiet C.

Der Fall 1 liegt unseren Betrachtungen zu Grunde. Der Fall 2 hingegen könnte ja wie man vermuten würde zu einer anderen Lösung führen, da Pol- und Nullstellen dem Gebiet C hinzugefügt werden. Die Pol- und Nullstellen bewirken zusätzliche Umläufe des Nyquistplots um den Ursprung. Es kommen aber auch Pol- und Nullstellen zum Gebiet C hinzu. Man kann beweisen, dass in Summe die Pol- und Nullstellen keinen weiteren Beitrag leisten. Somit können diese Pol- und Nullstellen

vernachlässigt werden und müssen für die Stabilitätsbetrachtungen nicht zum Gebiet C hinzugefügt werden. Ein Hinzufügen würde somit die Lösung nicht verändern, jedoch den Rechenaufwand vergrössern, da man zusätzlich die Umläufe um die Pol- und Nullstellen betrachten müsste.

### **Stabilitätsbetrachtungen mit dem Root-Locus-Plot**

Gegeben sei das folgende Regelsystem  $T(s)$  mit der Regelstrecke  $G(s)$ :

$$T(s) = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)}$$

Für die Ortskurve gilt dann:

$$1 + KL(s) = 0$$

Ein System ist dann stabil, wenn die Ortskurve des RLP die imaginäre Achse nicht schneidet. Berührt die Ortskurve die imaginäre Achse, dann resultiert ein oszillierendes System. Der Schnittpunkt der imaginären Achse ergibt zusätzliche Informationen über die maximale Grösse des Parameters  $K$ . Für den Schnittpunkt  $s_0$  gilt:

$$K = \frac{-1}{|L(s_0)|} \quad \text{mit} \quad |L(s_0)| = \frac{|s_0 - z_1| \cdot |s_0 - z_2| \cdot \dots}{|s_0 - p_1| \cdot |s_0 - p_2| \cdot \dots}$$

Somit lassen sich auch aus dem RLP Stabilitätsbedingungen für  $K$  herleiten.

### **Bode Stabilitätskriterium**

Gegeben sei ein ein offenes System  $G(j\omega)$ , dessen Amplitude und Phase stetig abnimmt. Für das geschlossene System  $T(j\omega)$  gilt:

$$T(j\omega) = \frac{KG(j\omega)}{1 + KG(j\omega)}$$

Das System  $T(j\omega)$  ist dann stabil, wenn die Rückführung zu einer negativen Rückkopplung führt. Bewirkt die Rückführung eine positive Rückkopplung, dann muss die Verstärkung der Rückführung kleiner als 1 sein. Das offene System  $G(j\omega)$  ist also dann stabil, wenn gilt:

$$|KG(j\omega)| < 1 \quad \text{bei} \quad \arg\{G(j\omega)\} = 180^\circ$$

# Der klassische Reglerentwurf

Obwohl man viele Regeln und Hilfen besitzt, einen Regler auszulegen, so spielt doch immernoch Erfahrung und Trial und Error-Verfahren eine grosse Rolle. Die Regelungstechnik bietet eine Palette von Werkzeugen, die einem helfen, einen Regler auszulegen. Doch die Wahl der Werkzeuge und des geeigneten Reglers ist jeder Entwicklerin und jedem Entwickler selbst überlassen.

Die folgende grobe Vorgehensweise soll als Vorschlag verstanden werden, der jederzeit abgeändert oder ergänzt werden kann:

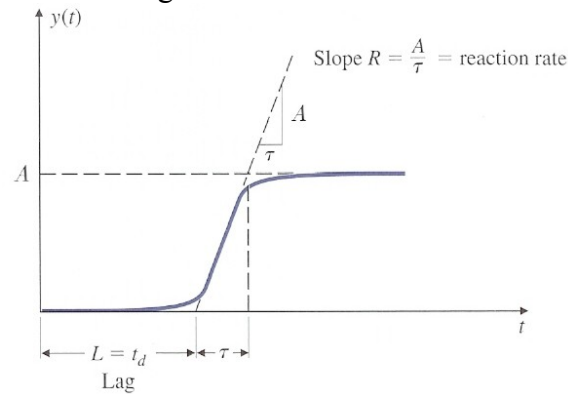
1. Einen geeigneten Regler unter Beachtung der folgenden Überlegungen auswählen:
  - Differenzierglieder: Der Regler soll sehr schnell auf Änderungen reagieren können.
  - Integrierglieder: Der Regler soll den Fehler minimieren können.
  - Unterlagerte Regelkreise: Ein System lässt sich durch bekannte Regelkreise schon gut regeln. Ein weiterer Regelkreis übernimmt dann die „Feinregelung“.
  - Das System durch Steifheit und Robustheit selbst verbessern, um eine bessere Regelung zu erzielen. Damit wird die Wahl von geeigneten Reglern vereinfacht.
2. Stabilitätsbetrachtungen mit dem Nyquistkriterium, dem Routh-Hurwitz-Kriterium, dem Bodeplot oder mit dem RLP anstellen. Dadurch lassen sich die Bereiche der Regelparameter einschränken.
3. Sofern möglich, eine grobe Abschätzung durch den Reglerentwurf von Zielger-Nichols gewinnen.
4. Reglerentwurf mit dem RLP: Dämpfung, Überschwingen und andere Vorgaben können direkt eingezeichnet werden. Dadurch lassen sich die Bereiche der Regelparameter weiter reduzieren.
5. Reglerentwurf im Frequenzbereich mit dem Bodeplot: Die Phasenrandbetrachtungen führen oft zu guten Ergebnissen.

Der Reglerentwurf ist also ein stetiges Herantasten an geeignete Regelparameter. Oft ist es auch so, dass ein Regleransatz total verworfen werden muss, da er andere zum Designzeitpunkt nicht feststellbare Eigenschaften besitzt. Reglerentwurf ist also ein kreativer Prozess bei dem Erfahrung eine grosse Rolle spielt.

# Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

## Sprungmethode

Viele Sprungantworten haben die folgende Form:



Die Systeme werden demnach wie folgt approximiert:

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_d s}}{\tau s + 1}$$

Für die Parameter der Regler gilt dann:

Regler	Parameter
P-Regler	$K = \frac{1}{RL}$
PI-Regler	$K = \frac{0.9}{RL}$ $T_I = \frac{L}{0.3}$
PID-Regler	$K = \frac{1.2}{RL}$ $T_I = 2L$ $T_D = 0.5L$

## Schwingmethode

Der Gain  $K$  eines P-Reglers wird solange verstellt bis der Ausgang mit einer festen Periode schwingt. Für die Parameter der Regler gilt dann:

$K_u$ : Verstärkung (ultimate gain)

$P_u$ : Periode (ultimate period)

Regler	Parameter
P-Regler	$K = 0.5K_u$
PI-Regler	$K = 0.45K_u$ $T_I = \frac{1}{1.2} P_u$
PID-Regler	$K = 0.6K_u$ $T_I = 0.5 P_u$ $T_D = 0.125 P_u$

## Reglerentwurf mit dem Root-Locus-Plot (RLP)

Gegeben sei ein Regelsystem  $T(s)$  mit der Regelstrecke  $G(s)$ , dem Regler  $D(s)$  und einem System  $H(s)$  in Rückführung. Es gilt:

$$T(s) = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)}$$

Daraus folgt für die Ortskurve des RLP:

$$1 + KL(s) = 0 \quad \text{mit} \quad KL(s) = D(s)G(s)H(s)$$

Das System  $L(s)$  ist von der Ordnung zwei oder grösser. Systeme höherer Ordnung werden behandelt wie Systeme 2. Ordnung.

Für die Parameter eines Systems 2. Ordnung gilt:

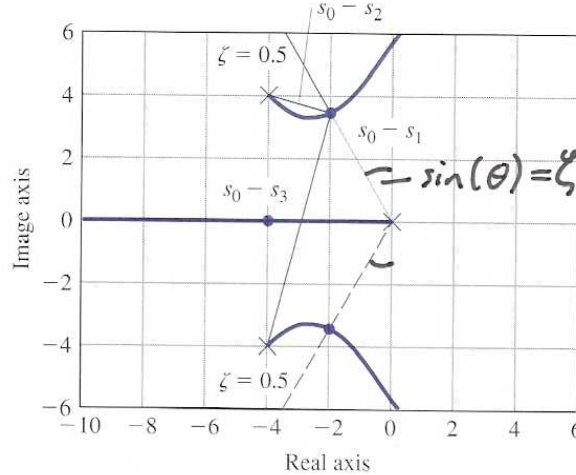
- Anstiegszeit (rise time):  $t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$
- Anregelzeit (peak time):  $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$
- Überschwingen (overshoot):  $M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$  mit  $0 \leq \zeta < 1$
- Ausregelzeit (settling time):  $t_s \approx \frac{4.6}{\zeta \omega_n}$
- Dämpfung (damping):  $\zeta = \sin(\theta)$

Man legt nun zunächst einige gewünschte Verhaltensweisen des Systems fest (z.B. Dämpfung, Ausregelzeit, usw.). Danach zeichnet man in den RLP die Gebiete ein, für die die Dämpfung  $\zeta$  und die natürliche Frequenz  $\omega_n$  erfüllt sind. Dabei gilt:



- Dämpfung  $\zeta$ : zwei Strahlen vom Ursprung mit dem Winkel  $\theta$  zur imaginären Achse (in der LHE)
- natürliche Frequenz  $\omega_n$ : Kreis mit Radius  $\omega_n$  um den Ursprung (in der LHE)

Durchläuft der RLP das vorgegebene Gebiet, dann kann man an den Übergängen Werte für  $K$  bestimmen und Bedingungen für  $K$  festlegen. Natürlich ist dies nicht immer möglich. Zudem sind die Systeme meist von höherer Ordnung und eine Betrachtung als System 2. Ordnung verursacht natürlich Fehler. Doch die Methode ist sehr anschaulich und einfach.



Für die Bestimmung des Parameters  $K$  beim Schnittpunkt  $s_0$  gilt:

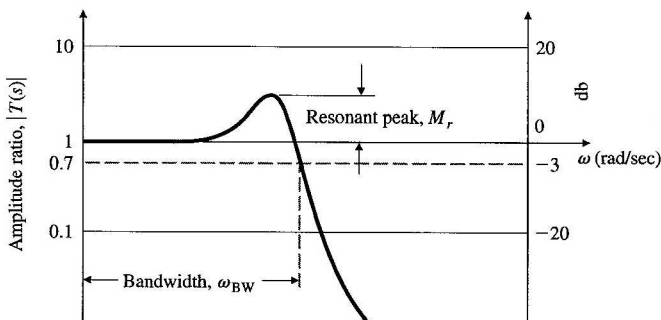
$$K = \frac{-1}{|L(s_0)|} \quad \text{mit} \quad |L(s_0)| = \frac{|s_0 - z_1| \cdot |s_0 - z_2| \cdot \dots}{|s_0 - p_1| \cdot |s_0 - p_2| \cdot \dots}$$

## Reglerentwurf im Frequenzbereich mit Hilfe des Bodeplots

### Wichtige Kenngrößen im Frequenzbereich

#### Bandbreite (Bandwidth)

Die Frequenz  $\omega_{BW}$ , bei der die Amplitude -3dB beträgt, wird Bandbreite bezeichnet.



#### Crossover Frequency

Die Frequenz  $\omega_c$ , bei der die Amplitude 1 bzw. 0dB beträgt, wird Crossover Frequency bezeichnet.

## Phasenrand (Phase Margin, PM)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion  $KG(j\omega)$ .

Der Phasenrand gibt an, wieviel die Phase des Systems bei  $|KG(j\omega)|=1$   $-180^\circ$  übersteigt. Bei Systemen 1. und 2. Ordnung, die die Phase  $-180^\circ$  nicht übersteigen, ist es üblich, einfach die Phasendifferenz bis  $-180^\circ$  anzugeben.

Gegeben sei ein offenes System 2. Ordnung  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

Für das geschlossene System  $T(s)$  gilt:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

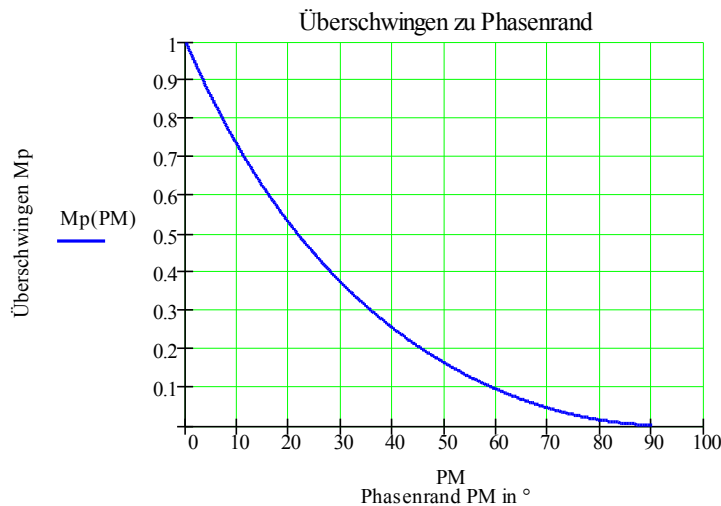
Für den Phasenrand eines Systems 2. Ordnung gilt dann:

$$\tan(PM) = \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}}$$

$$\zeta \approx \frac{PM}{100} \quad \text{für } PM \leq 60^\circ$$

Zwischen Überschwingen  $M_p$  und Phasenrand gilt dann:

$$M_p = e^{\frac{-\pi}{100} \frac{PM}{\sqrt{1 - \left(\frac{PM}{100}\right)^2}}} \quad \text{mit } \zeta \approx \frac{PM}{100}$$



## Amplitudenrand (Gain Margin, GM)

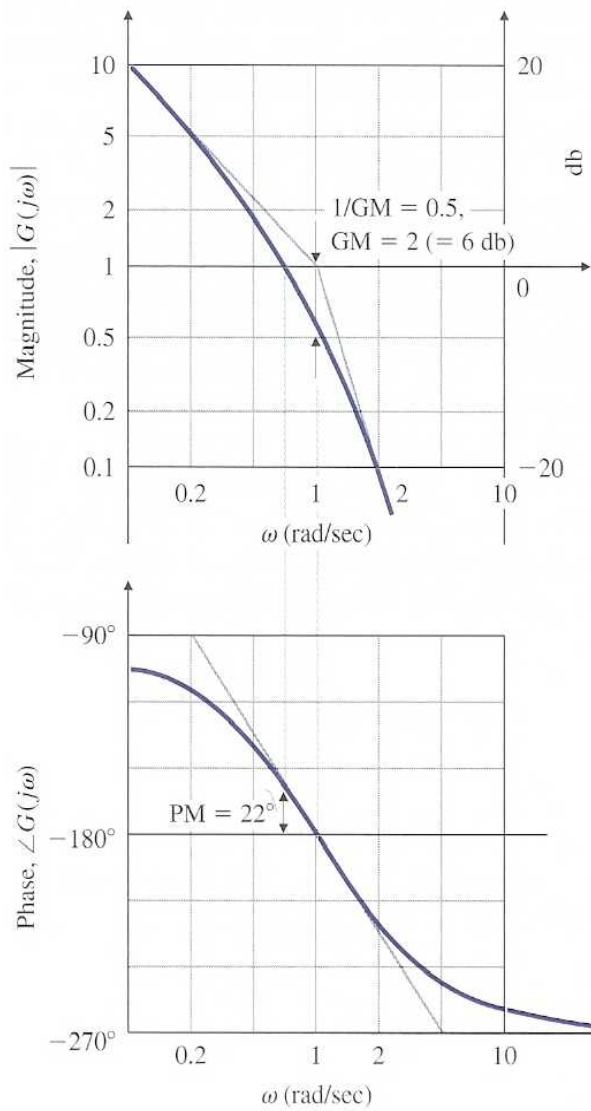
Gegeben sei die Übertragungsfunktion  $KG(j\omega)$ .

Der Amplitudenrand gibt an, wieviel die Amplitude  $|KG(j\omega)|$  von 1 abweicht, wenn die Phase des Systems  $\angle G(j\omega) = -180^\circ$  beträgt.

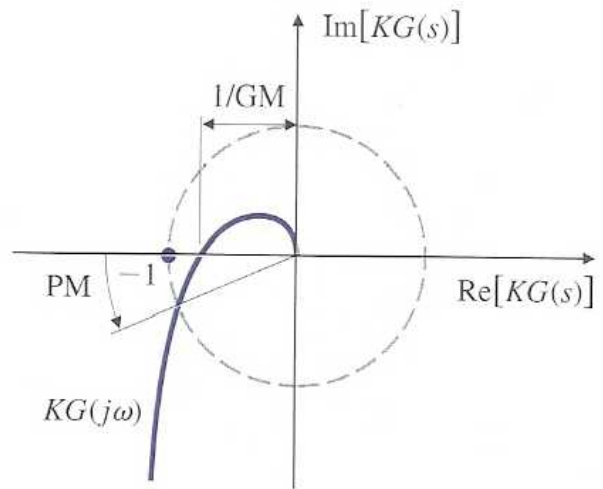
## Amplituden- und Phasenrand bestimmen

Phasen- und der Amplitudenrand lassen sich sowohl im Bode- als auch im Nyquistplot bestimmen. Das Vorgehen wird anhand der folgenden Abbildungen erläutert.

Mit dem Bodeplot:



Mit dem Nyquistplot:



## **Betrag-Phase-Gesetz nach Bode**

Für ein stabiles, minimalphasiges System  $G(j\omega)$  (keine Pole oder Nullstellen in der RHE) ist die Phase  $\arg\{G(j\omega)\}$  eine eindeutige Funktion des Betrages  $|G(j\omega)|$ .

Es sei  $n$  die Steigung der Gerade im Amplitudendiagramm des Bodeplots. Für die Phase gilt dann die Abschätzung:

$$\arg\{G(j\omega)\} \approx n \cdot 90^\circ$$

Damit nun der Phasenrand zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegt, muss die Steigung  $n$  des Amplitudenganges bei  $\omega_c$  (Crossover Frequency) zwischen  $-1$  ( $-20\text{dB/dec}$ ) und  $-2$  ( $-40\text{dB/dec}$ ) liegen. Für den Reglerentwurf gilt das wichtige Betrag-Phase-Gesetz nach Bode:

**Die Steigung  $n$  des Amplitudenganges bei  $\omega_c$  ist mit geeigneten Reglern so auszulegen, dass sie zwischen  $-1$  ( $-20\text{dB/dec}$ ) und  $-2$  ( $-40\text{dB/dec}$ ) liegt.**

## **Reglerentwurf mit Hilfe des Phasenrandes (Lead-Glied)**

Der Schlüsselfaktor beim Reglerentwurf im Frequenzbereich ist der Phasenrand. Oft ist es nämlich so, dass eine bestimmte Dämpfung bzw. ein bestimmtes Überschwingverhalten verbunden mit einem gewünschten Regelfehler vorgegeben sind. Mit Hilfe des Endwerttheorems erhält man eine Bedingung für den Regelfehler. Aus der gewünschten Dämpfung des geschlossenen Regelsystems lässt sich approximativ ein gewünschter Phasenrand für das offene System bestimmen. Dabei gilt zu beachten, dass dieses Vorgehen im strengeren Sinne nur für Systeme 2. Ordnung gültig ist. Es zeigt sich aber, dass auch Systeme höherer Ordnung vereinfacht als Systeme 2. Ordnung aufgefasst werden können. In der Praxis wird man deshalb den Phasenrand zusätzlich um  $5^\circ$  erhöhen, um sicher zu sein, die gewünschte Dämpfung zu erzielen. In der Praxis ist es meistens so, dass der Phasenrand zu gering ist. Er muss also angehoben werden. Dazu wird ein Lead-Glied verwendet.

Das Vorgehen sieht dann wie folgt aus:

1. Mit Hilfe des Endwerttheorems lässt sich eine Bedingung für den Regelfehler herleiten.
2. Man liest nun den Phasenrand  $\phi_o$  des offenen Systems aus dem Bodediagramm heraus.
3. Man bestimmt mit Hilfe der Dämpfung den gewünschten Phasenrand  $\phi_{ref}$ . Für die Anhebung des Phasenrandes gilt nun:  $\Delta\phi = \phi_{ref} - \phi_o$ . Bei Regelsystemen höherer Ordnung gibt man meistens noch zusätzlich  $5^\circ$  dazu.
4. Für die Auslegung des Lead-Gliedes gilt nun:  $\phi_{max} = \Delta\phi$ ,  $\omega_{max} = \omega_c$ .  $\omega_c$  bezeichnet die Crossover Frequency.

## **Reglerentwurf zur Verringerung des Regelfehlers (Lag-Glied)**

Der Regelfehler wird meistens mit einem reinen Integrierglied minimiert. Dies wirkt sich aber negativ auf den Phasenrand und somit auf die Dämpfung aus. Aus diesem Grund verwendet man ein Lag-Glied. Dieses Glied kann als selektives Integrierglied aufgefasst werden. Analog zum Lead-Glied, das die Phase in einem bestimmten Frequenzbereich anhebt, erniedrigt das Lag-Glied die Phase in einem entsprechenden Bereich. Damit nun das Lag-Glied die Dämpfung und somit den Phasenrand des Regelsystems möglichst nicht herabsetzt, muss das Lag-Glied ein bis zwei Dekaden unterhalb der Crossover Frequency liegen. Somit wird der Regelfehler minimiert unter Beibehaltung der Dämpfungseigenschaften des Regelsystems.

Das Vorgehen sieht dann wie folgt aus:

1. Mit Hilfe des Endwerttheorems lässt sich eine Bedingung  $R(K,\alpha)$  für den Regelfehler herleiten. Der Ausdruck  $R(K,\alpha)$  beinhaltet den unbekanntes Lag-Glied-Parameter  $\alpha$  und den ebenfalls unbekanntes Gain  $K$ .
2. Man liest nun den Phasenrand  $\varphi_o$  des offenen Systems aus dem Bodediagramm heraus.
3. Man bestimmt mit Hilfe der Dämpfung den gewünschten Phasenrand  $\varphi_{ref}$ . Der Gain  $K$  des offenen Systems wird nun solange erhöht oder erniedrigt bis der gewünschte Phasenrand erzielt ist.
4. Mit Hilfe der Bedingung  $R(K,\alpha)$  kann  $\alpha$  bestimmt werden.
5. Die Knickfrequenz  $\omega=1/T$  des Lag-Gliedes wird so gewählt, dass sie etwa eine Dekade unterhalb der Crossover Frequency  $\omega_c$  liegt.

## ***Einfluss von Totzeiten abschätzen***

Für die Fouriertransformation einer Totzeit gilt:

$$y(t-\tau) \Leftrightarrow Y(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}$$

Ein Regelsystem wird dann instabil, wenn der Phasenrand des offenen Systems null wird. Es sei  $PM$  der Phasenrand des offenen Systems. Für die maximale Verzögerung  $\tau$  gilt dann:

$$PM = \omega_c \cdot \tau \quad \text{mit der Crossover Frequency } \omega_c$$

Somit lässt sich die maximale Totzeit  $\tau$  bestimmen, für die das geschlossene Regelsystem noch stabil ist.

## **Bodeplot**

Gegeben sei die Übertragungsfunktion  $G(j\omega)$ .

### ***Amplitudendiagramm***

x-Achse:  $\log(\omega)$

y-Achse:  $20\log|G(j\omega)|$  Amplitude in dB

### **Vorgehen**

1. Übertragungsfunktion auf folgende Form bringen:

$$G(j\omega) = K(j\omega)^N \frac{(1 \pm j\omega\tau_1) \cdot (1 \pm j\omega\tau_2) \cdot \dots}{(1 \pm j\omega\tau_a) \cdot (1 \pm j\omega\tau_b) \cdot \dots}$$

2. Eigenschaften des Logarithmus ausnutzen:

$$\log(G(j\omega)) = \log(K) + N \cdot \log(j\omega) + (\log(1 \pm j\omega\tau_1) + \dots) - (\log(1 \pm j\omega\tau_a) + \dots)$$

Durch Superposition der einzelnen Logarithmen bzw. der Amplituden der einzelnen Übertragungsfunktionen lässt sich das Amplitudendiagramm zeichnen.

## Tipps

- Es gilt:  $\omega_c = 1/\tau$

- $$G(j\omega) = \left[ 1 \pm \frac{j\omega}{\omega_c} \right]^{\pm 1}$$

Diese Übertragungsfunktion hat einen Knick bei der Frequenz  $\omega_c$ . Die Amplitude ist 0dB bis zur Knickfrequenz. Ab der Knickfrequenz steigt/fällt die Amplitude linear mit 20dB pro Dekade an.

- $$G(j\omega) = [j\omega]^{\pm 1}$$

Diese Übertragungsfunktion ist eine Gerade mit der Steigung  $\pm 20\text{dB}$  pro Dekade durch den x-Achsenabschnitt  $\omega_c = 1\text{rad/s}$ .

- $$G(j\omega) = \left[ \left( \frac{j\omega}{\omega_c} \right)^2 + \frac{2\rho \cdot j\omega}{\omega_c} + 1 \right]^{\pm 1}$$

Diese Übertragungsfunktion hat einen Knick bei der Frequenz  $\omega_c$ . Die Amplitude ist 0dB bis zur Knickfrequenz. Ab der Knickfrequenz steigt/fällt die Amplitude linear mit 40dB pro Dekade an.

## Phasendiagramm

x-Achse:  $\log(\omega)$

y-Achse:  $\arg\{G(j\omega)\}$  Winkel in Grad

## Vorgehen

1. Übertragungsfunktion auf folgende Form bringen:

$$G(j\omega) = K(j\omega)^N \frac{(1 \pm j\omega\tau_1) \cdot (1 \pm j\omega\tau_2) \cdot \dots}{(1 \pm j\omega\tau_a) \cdot (1 \pm j\omega\tau_b) \cdot \dots}$$

2. Den Winkel der einzelnen Übertragungsfunktionen berechnen:

$$\arg\{G(j\omega)\} = (\arctan(\pm\omega\tau_1) + \arctan(\pm\omega\tau_2) + \dots) - (\arctan(\pm\omega\tau_a) + \arctan(\pm\omega\tau_b) + \dots) + \dots \\ \dots \arctan(90^\circ \cdot N) \pm 90^\circ (1 - \text{sign}(K))$$

Durch Superposition der einzelnen Arkustangens bzw. der Argumente der einzelnen Übertragungsfunktionen lässt sich das Phasendiagramm zeichnen.

## Tipps

- $$G(j\omega) = [j\omega]^{\pm 1}$$

Das Argument dieser Übertragungsfunktion ist konstant bei  $\pm 90^\circ$ .

- $$G(j\omega) = \left[ 1 \pm \frac{j\omega}{\omega_c} \right]^{\pm 1}$$

Das Argument dieser Übertragungsfunktion hat einen s-förmigen Verlauf von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$ . Man spricht auch vom Drehen von  $0^\circ$  auf  $90^\circ$ . Approximiert wird diese Funktion mit Hilfe einer Geraden, dessen Mittelpunkt die Knickfrequenz bei  $\omega_c$  darstellt. Die Gerade wird so durch die

Knickfrequenz gelegt, dass sie durch zwei Dekaden begrenzt wird. Das Argument dreht von  $0^\circ$  nach  $\pm 90^\circ$ .

$$\bullet \quad G(j\omega) = \left[ \left( \frac{j\omega}{\omega_c} \right)^2 + \frac{2\rho \cdot j\omega}{\omega_c} + 1 \right]^{\pm 1}$$

Das Argument dieser Übertragungsfunktion hat einen sehr steilen s-förmigen Verlauf von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$ . Man approximiert diese Funktion mit Hilfe einer Schrittfunktion. Der Schritt beginnt bei der Frequenz  $\omega_c$ . Das Argument der Übertragungsfunktion dreht von  $0^\circ$  nach  $\pm 180^\circ$ .

## Nyquistplot

Gegeben sei die Übertragungsfunktion  $G(j\omega)$ . Es gilt:

x-Achse:  $\Re\{G(j\omega)\}$  mit  $\omega = (-\infty, +\infty)$

y-Achse:  $\Im\{G(j\omega)\}$

### Tipps

- Nur den Teil  $\omega = (0, +\infty)$  betrachten. Anschliessend das Resultat an der x-Achse spiegeln.
- Einfache Zahlenwerte für  $\omega$  einsetzen und Abbildungspunkte bestimmen. Anschliessend die ermittelten Punkte durch eine Kurve verbinden.
- Bevor man ein Nyquistplot zeichnet, empfiehlt sich ein Bodeplot anzufertigen.
- Strudel im Nyquistplot deuten auf Verzögerungen (delays) hin.

# Root-Locus-Plot (RLP)

Für die Übertragungsfunktion  $T(s)$  eines geschlossenen Systems gilt:

$$T(s) = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)}$$

Dabei gilt:

$D(s)$ : Regler

$G(s)$ : eigentliches System, oft Regelstrecke genannt

$H(s)$ : System des rückgeführten Pfades (meist 1)

Weiter gilt:

$$K \cdot L(s) = D(s)G(s)H(s) \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

Für die Orte der Polstellen gilt:

$$1 + K \cdot L(s) = 0$$

Der RLP beschreibt die Orte der Polstellen des geschlossenen Systems in Abhängigkeit von  $K$ . Der RLP spannt daher eine komplexe Ebene auf.

Oft ist es so, dass der Regler mehrere Parameter beinhaltet. In diesem Fall müssen die Parameter zu einem Parameter  $K$  zusammengefasst werden.

Für die Phase gilt:

$$\sum \psi_i - \sum \phi_i = 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$$

Dabei bezeichnet  $\psi_i$  die Phasendrehung der Nullstellen von  $L(s)$  und  $\phi_i$  die Phasendrehung der Polstellen von  $L(s)$  bezogen auf einen beliebigen Punkt  $s_0$  der komplexen Ebene. Für die Drehrichtung gilt die klassische Definition der Mathematik: Positive Winkel sind Drehungen im Gegenuhrzeigersinn.

Es gibt zwei Ausprägungen des RLP:

positiver RLP:  $K > 0$  (Normalfall)

negativer RLP:  $K < 0$

## Zeichenregeln

Es gilt:

$n$ : Anzahl der Polstellen von  $L(s)$

$p_i$ : Polstellen von  $L(s)$

$m$ : Anzahl der Nullstellen von  $L(s)$

$n_i$ : Nullstelle von  $L(s)$

- **Regel 1:**  $n$  Verzweigungen starten bei den Polstellen von  $L(s)$ , und  $m$  Verzweigungen enden bei den Nullstellen von  $L(s)$ .
- **Regel 2:** Ist die Anzahl der Pol- und Nullstellen ungerade, so liegt die Ortskurve auch auf dem linken Abschnitt der reellen Achse.
- **Regel 2a:** Ist die Anzahl der Pol- und Nullstellen gerade für einen negativen RLP, so liegt die Ortskurve auch auf dem linken Abschnitt der reellen Achse.
- **Regel 3:** Für grosse  $s$  und  $K$  gilt:

Die Ortskurve verläuft annähernd auf einem Strahl mit dem Ursprung  $\alpha$  und dem Winkel  $\phi_1$ .



$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)}{n-m}, \quad \alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} \quad \text{mit } l=1, 2, \dots, n-m$$

- **Regel 3a:** Für grosse  $s$  und  $K$  gilt für einen negativen RLP:

Die Ortskurve verläuft annähernd auf einem Strahl mit dem Ursprung  $\alpha$  und dem Winkel  $\phi_l$ .

$$\phi_l = \frac{360^\circ \cdot (l-1)}{n-m}, \quad \alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} \quad \text{mit } l=1, 2, \dots, n-m$$

- **Regel 4:**

Verzweigungen starten bei mehrfachen Polstellen unter einem Winkel  $\phi_{l,dep}$  und enden bei mehrfachen Nullstellen unter einem Winkel  $\phi_{l,arr}$ .

Für Polstellen von  $L(s)$  mit Vielfachheit  $q$  gilt:  $q\phi_{l,dep} = \sum \psi_i - \sum \phi_i - 180^\circ - 360^\circ \cdot (l-1)$

Für Nullstellen von  $L(s)$  mit Vielfachheit  $q$  gilt:  $q\phi_{l,arr} = \sum \phi_i - \sum \psi_i + 180^\circ + 360^\circ \cdot (l-1)$

- **Regel 4a:** Für einen negativen RLP gilt:

Verzweigungen starten bei mehrfachen Polstellen unter einem Winkel  $\phi_{l,dep}$  und enden bei mehrfachen Nullstellen unter einem Winkel  $\phi_{l,arr}$ .

Für Polstellen von  $L(s)$  mit Vielfachheit  $q$  gilt:  $q\phi_{l,dep} = \sum \psi_i - \sum \phi_i - 360^\circ \cdot (l-1)$

Für Nullstellen von  $L(s)$  mit Vielfachheit  $q$  gilt:  $q\phi_{l,arr} = \sum \phi_i - \sum \psi_i + 360^\circ \cdot (l-1)$

- **Regel 5:** Routh-Kriterium anwenden

Der Schnittpunkt der Ortskurve mit der imaginären Achse lässt sich mit Hilfe des Routh-Kriteriums einfach bestimmen. Ein Übergang der Pole von der linken zur rechten Halbebene ist dann gegeben, wenn die erste Spalte der Routh-Tabelle einen Eintrag enthält der kleiner gleich null ist. Mit dieser Bedingung lässt sich ein  $K$  finden, für das die Ortskurve die imaginäre Achse schneidet. Das Routh-Kriterium erweist sich auch als hilfreich, um überhaupt eine Aussage zu machen, ob die Ortskurve in der linken Halbebene verläuft.

## Nicholsplot

Gegeben sei die Übertragungsfunktion  $G(s)$ . Es gilt:

x-Achse:  $\arg\{G(s)\}$

y-Achse:  $|G(s)|$

### Tipps

- Der Nicholsplot lässt sich mit Hilfe des Bodeplots leicht zeichnen. Dazu wählt man einen beliebigen Punkt im Bodeplot und überträgt diesen in den Nicholsplot.
- Man beachte, dass auf der y-Achse nur der Betrag der Übertragungsfunktion aufgetragen ist; und nicht eine logarithmische Skalierung gewählt wird.
- Nicholsplots können nur auf vorgefertigtes Papier erstellt werden. Das Nicholsplot-Zeichenpapier besteht aus Closed-Loop-Phasenkreisen und Closed-Loop-Amplitudenkreisen. Diese Kreise spielen für die Betrachtung von Feedback-Systemen eine grosse Rolle.
- Es wird aber immer das offene System eingezeichnet.

## Charakteristische Grössen herauslesen

- *Bandwidth*: Schnittpunkt mit dem 0.7-Amplitudenkreis betrachten
- *Phase Margin (PM)*: Schnittpunkt mit dem 1-Amplitudenkreis betrachten
- *Gain Margin (GM)*: Schnittpunkt mit der 180°-Linie betrachten
- *Resonanzfrequenz*: Schnittpunkt mit dem Amplitudenkreis bestimmen, der tangential zur betrachteten Kurve verläuft

## Normalformen

Für die Übertragungsfunktion gelte:

$$H(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Damit gilt für die Normalformen:

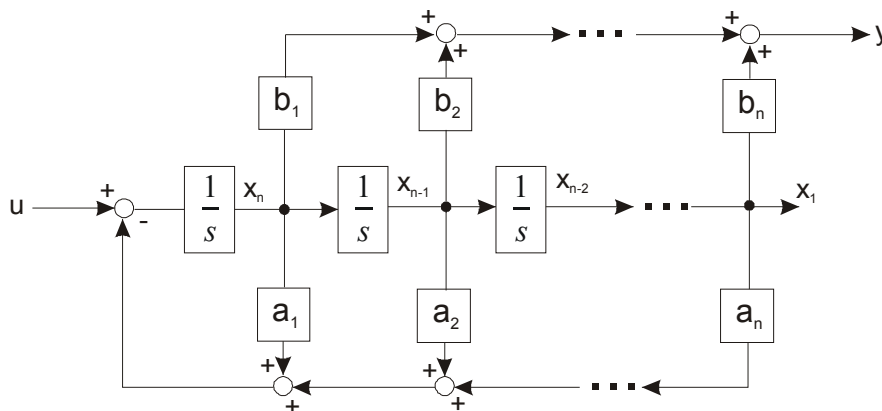
### Regelungsnormalform

Es gilt:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1] \cdot x$$

Für das Blockschaltbild gilt:



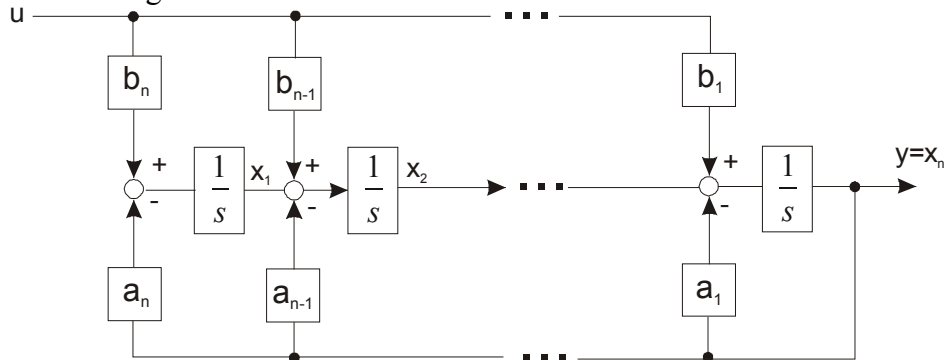
## Beobachternormalform

Es gilt:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \cdot x$$

Für das Blockschaltbild gilt:



## Modalform

Besitzt die Übertragungsfunktion  $H(s)$  einfache reelle Polstellen, so kann sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung wie folgt zerlegt werden:

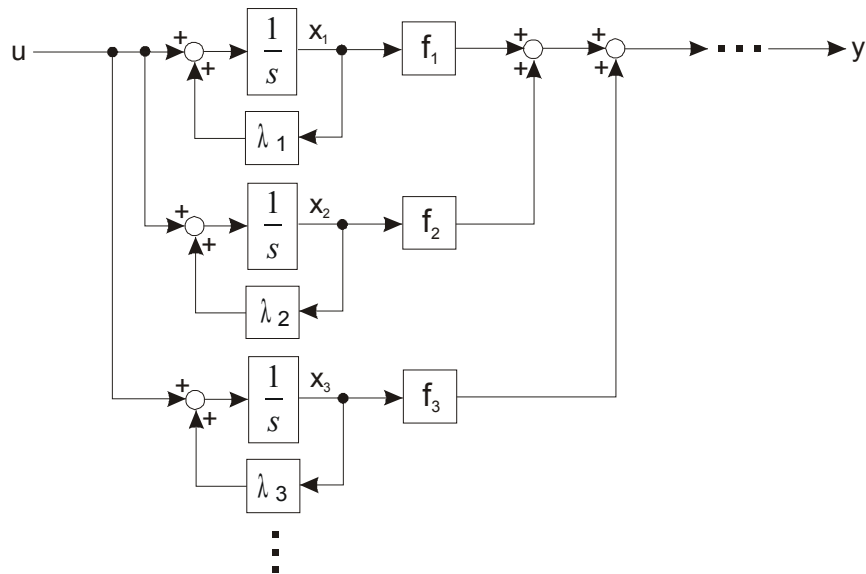
$$H(s) = \frac{f_1}{s - \lambda_1} + \frac{f_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{f_n}{s - \lambda_n}$$

Damit gilt:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \cdot x \quad d_i c_i = f_i$$

Für das Blockschaltbild gilt:



### Behandlung von komplexen Polstellen

Jedes komplexe Polpaar wird zu einem System 2. Ordnung zusammengefasst und als 2er-Block in Regelungsnormalform in die Systemmatrix  $A$  eingezeichnet.

### Behandlung von mehrfachen Polstellen

Gegeben sei das folgende System  $G(s)$  mit  $n$ -fachen Polstellen:

$$G(s) = \frac{c}{(s-\lambda)^n}$$

Damit gilt:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \cdot u \quad \text{mit} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$y = [c \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0] \cdot x$$

# Erreichbarkeit, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

## Erreichbarkeit (Reachability)

Ein System ist erreichbar, wenn ein Eingangssignal existiert, sodass jeder Zustand des Systems vom Ursprungszustand  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  aus erreicht werden kann.

Die Kalman Steuerbarkeitsmatrix lautet:

$$C = [B, AB, A^2 B, \dots, A^{n-1} B]$$

Weiter gilt:

**Ein System ist vollkommen erreichbar, wenn die Matrix C regulär ist; also vollen Rang aufweist. Da die Matrix C quadratisch ist, gilt:**

- Die Matrix C ist regulär für  $\det(C) \neq 0$ .
- Die Matrix C ist singular für  $\det(C) = 0$ .

**Der Bildbereich von C beschreibt das erreichbare Teilsystem.**

**Eine beliebige Zustandsbeschreibung kann nur dann in die Regelungsnormalform überführt werden, wenn die Matrix C regulär ist.**

## Zerlegung des Systems

Jedes nicht-erreichbare System kann in einen erreichbaren und in einen nicht-erreichbaren Teil zerlegt werden:

$$A_{new} = \begin{bmatrix} A_e & A_k \\ 0 & A_{ne} \end{bmatrix}, \quad B_{new} = \begin{bmatrix} B_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad A_{new} = \Pi^{-1} A \Pi, \quad B_{new} = \Pi^{-1} B$$

$$\text{Rang}(C) = i < n$$

Das Teilsystem  $(A_e, B_e)$  ist erreichbar mit Rang i.

### Tipp

Die Transformationsmatrix  $\Pi$  muss regulär sein. Man betrachtet am besten die Matrix C und entnimmt ihr Spalte für Spalte und testet gleichzeitig, ob die Spalten unabhängig sind. So geht man Schritt für Schritt durch und wählt am Schluss eine beliebige Spalte, sodass die Transformationsmatrix regulär ist.

## Steuerbarkeit (Controllability)

Ein System ist steuerbar, wenn ein Eingangssignal existiert, sodass jeder Zustand des Systems in den Ursprungszustand  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  überführt werden kann.

**Ein System ist steuerbar, wenn es erreichbar ist oder wenn alle Eigenwerte des nicht-erreichbaren Teilsystems null sind.**

**Steuerbarkeit und Erreichbarkeit sind äquivalente Konzepte im zeitkontinuierlichen Fall.**

## Beobachtbarkeit (Observability)

Ein Zustand des Systems ist dann beobachtbar, wenn er als Ausgangssignal anliegt also nicht null ist. Ist das Ausgangssignal null für jeden beliebigen Zeitpunkt, dann ist der Zustand nicht-beobachtbar. Ein nicht-beobachtbarer Zustand, lässt sich nicht mit Hilfe des Ausgangssignals rekonstruieren. Solche Zustände hängen dann meistens von weiteren nicht-beobachtbaren

Zuständen ab.

Die **Beobachtbarkeitsmatrix O** lautet:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Weiter gilt:

**Ein System ist vollkommen beobachtbar, wenn die Matrix O regulär ist; also vollen Rang aufweist. Da die Matrix O quadratisch ist, gilt:**

- Die Matrix O ist regulär für  $\det(O) \neq 0$ .
- Die Matrix O ist singular für  $\det(O) = 0$ .

**Eine beliebige Zustandsbeschreibung kann nur dann in die Beobachternormalform überführt werden, wenn die Matrix O regulär ist.**

**Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit sind duale Konzepte.**

### Zerlegung des Systems

Jedes nicht-beobachtbare System kann in einen beobachtbaren und in einen nicht-beobachtbaren Teil zerlegt werden:

$$A_{new} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_k & A_{no} \end{bmatrix}, \quad C_{new} = [C_o, 0] \quad \text{mit} \quad A_{new} = \Pi^{-1} A \Pi, \quad C_{new} = C \Pi$$

$$\text{Rang}(C) = i < n$$

Das Teilsystem  $(A_o, C_o)$  ist beobachtbar mit Rang i.

### Tipp

Die Transformationsmatrix  $\Pi$  muss regulär sein. Man betrachtet am besten die Matrix O und entnimmt ihr Zeile für Zeile und testet gleichzeitig, ob die Zeilen unabhängig sind. So geht man Schritt für Schritt durch und wählt am Schluss eine beliebige Zeile, sodass die Transformationsmatrix regulär ist.

## Untersuchung von Systemen mit Signalflussgraphen

Die Steuerbarkeit, Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit lässt sich mit Hilfe von Signalflussgraphen leicht bestimmen.

### Signalflussgraphen zeichnen

Gegeben sei die folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 1 \\ c & 1 & 2 & 0 \\ 0 & d & 1 & e \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad j \quad 0 \quad k] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Für die Knoten des Signalflussgraphen gilt somit:  $x_1, x_2, x_3, x_4, u, y$ .

Die Ableitungen der Zustände und die Zustände selbst gehören zusammen und werden daher zu einem Knoten zusammengefasst.

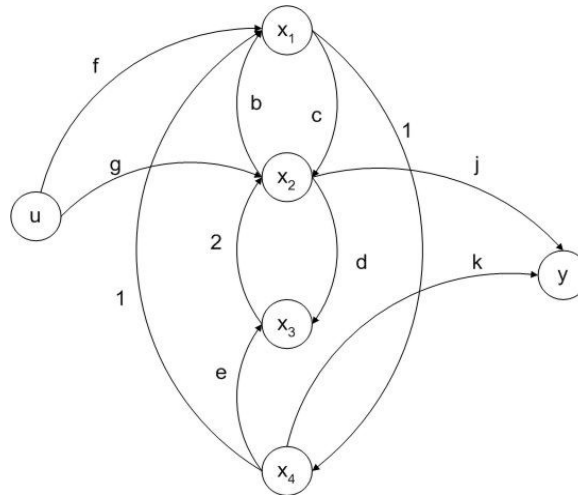
Man zerlegt nun den Zustandsraum in ein Gleichungssystem und betrachtet dann die Abhängigkeiten:

$$f_1(x_2, x_3, x_4, u) := \dot{x}_1 - ax_1 = bx_2 + fu \quad \text{Der Zustand } x_1 \text{ hängt von } x_2 \text{ und } u \text{ ab.}$$

$$f_2(x_1, x_3, x_4, u) := \dot{x}_2 - cx_2 = cx_1 + 2x_3 + gu \quad \text{Der Zustand } x_2 \text{ hängt von } x_1, x_3 \text{ und } u \text{ ab.}$$

...

Man zeichnet nun Pfeile von allen abhängigen Zuständen zum betrachteten Zustand. Dies zeigt die folgende Abbildung.



### Erreichbarkeit und Steuerbarkeit eines Systems untersuchen

Ein Zustand eines Systems ist dann steuerbar, wenn er erreichbar ist.

Man geht nun vom Eingang u aus und schaut, ob man alle Zustände erreichen kann. Die unerreichbaren Zustände werden dabei schnell ersichtlich.

Beispiel:

Falls b und f null sind, gilt: Die Zustände  $x_1$  und  $x_4$  sind nicht erreichbar und somit nicht steuerbar.

### Beobachtbarkeit eines Systems untersuchen

Man geht von jedem Zustand aus und schaut, ob man zum Ausgang y gelangt.

Beispiel:

Falls j und b null sind, gilt:  $x_2$  und  $x_3$  sind nicht beobachtbar.

### Anwendbarkeit

Signalflussgraphen liefern dann falsche Ergebnisse, wenn zwei Zustände identisch sind. Das folgende DGL-System kann daher nicht mit einem Signalflussgraphen analysiert werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

# Der moderne Reglerentwurf

Beim klassischen Reglerentwurf wird der Regler im Frequenzbereich entworfen. Anders sieht dies beim modernen Reglerentwurf aus, der direkt mit der Zustandsraumbeschreibung arbeitet. Es findet also keine Transformation in den Frequenzbereich statt. Der Regler wird direkt mit Hilfe der Zustandsraumbeschreibung entworfen. Man fragt sich vielleicht, weshalb man soviel Mühe auf sich genommen hat, eine Transformation in den Frequenzbereich bereitzustellen, wenn man dies ja sowieso im Zeitbereich lösen kann. – Die Antwort auf diese berechnete Frage ist historisch begründet. Früher hatte man nicht einen leistungsstarken Computer, der Matrizenrechnungen durchführen konnte. Grafische Methoden waren damals weit verbreitet und ermöglichten ein rasches Design eines Reglers. Und heute noch sind diese Methoden zur Abschätzung und zur Auslegung von Reglern üblich, da sie sehr anschaulich sind.

Der moderne Reglerentwurf kommt vor allem in der nichtlinearen Regelungstechnik zum Einsatz.

## Zustandsrückführung

### Grundidee

Gegeben sei die folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Hx + Ju$$

Man führt nun folgende Zustandsrückführung ein:

$$u = -Kx + w$$

Damit gilt dann:

$$\dot{x} = (F - GK)x + Gw$$

$$y = (H - JK)x + Jw$$

Für die Übertragungsfunktion gilt dann mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$sX(s) = (F - GK)X(s) \Rightarrow X(s) \cdot [sI - (F - GK)] = 0$$

$$Y(s) = (H - JK)X(s)$$

Damit gilt:

$$\det[sI - (F - GK)] = 0$$

In Regelungsnormalform erhält man:

$$\det[sI - (F - GK)] = s^n + (a_1 + k_n)s^{n-1} + (a_2 + k_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_n + k_1) = 0$$

Daraus folgt:

**Für ein steuerbares System lassen sich die Polstellen durch die Wahl der Komponenten von K beliebig platzieren.**

Man erhält dann die folgende neue Zustandsraumbeschreibung:

$$\dot{x} = (F - GK)x + Gw$$

$$y = (H - JK)x + Jw$$



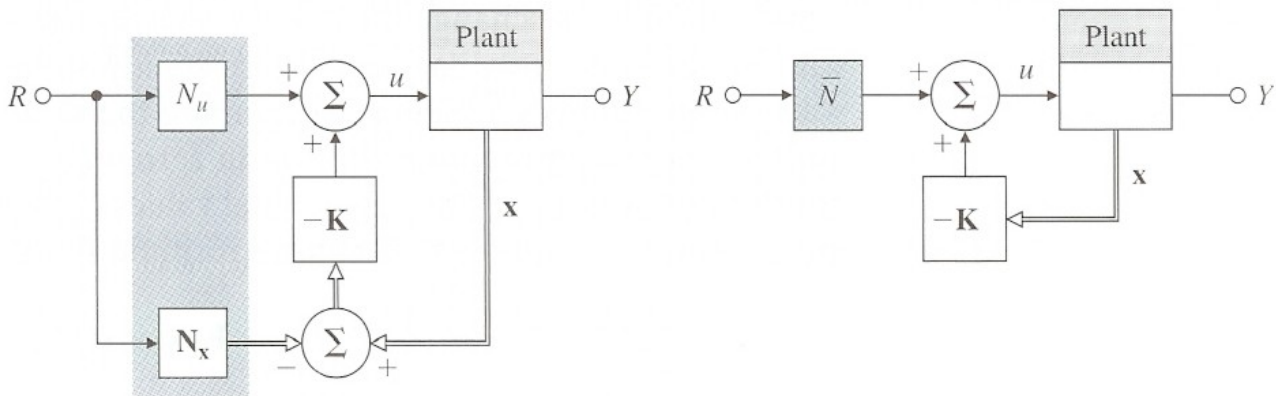
## Vorgehen

Die Anforderungen an das Regelsystem (Überschwingen, Anstiegszeit, usw.) ergeben bestimmte Polstellen, die es zu realisieren gilt. Die Komponenten von  $K$  werden nun so gewählt, dass diese Polstellen erreicht werden.

## Referenzsysteme

### Grundidee

Meistens ist man bestrebt, dem Regelsystem einen bestimmten Sollwert, oder auch Referenz genannt, vorzugeben. Beim klassischen Reglerentwurf wird dies meist mit Hilfe des Endwerttheorems gelöst. Im Zustandsraum erweist sich diese Methode aber als nicht brauchbar. Die folgende Herleitung zeigt eine Methode, wie ein Referenzsystem im Zustandsraum realisiert werden kann. Zusätzlich betrachte man auch die folgenden Abbildungen.



## Vorgehen

Gegeben sei die folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Hx + Ju$$

Im stationären Fall gilt dann:

$$0 = Fx_s + Gu_s$$

$$y_s = Hx_s + Ju_s$$

Für den Sollwert  $r$  gilt:

$$y_s = r, \quad x_s = N_x r, \quad u_s = N_u r$$

Damit gilt dann:

$$\begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für den Eingang  $u$  gilt weiter:

$$u = N_u r - K(x - N_x r) = -Kx + (N_u + KN_x)r = -Kx + \bar{N}r$$

Damit gilt für die neue Zustandsraumbeschreibung:

$$\dot{x} = (F - GK)x + G(N_u + KN_x)r$$

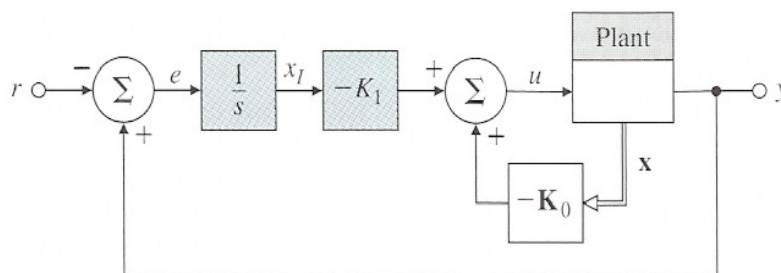
$$y = (H - JK)x + J(N_u + KN_x)r$$

## Integralregelung

### Grundidee

Die Referenzsystem-Methode kann nur dann verwendet werden, wenn das reale System hinreichend gut modelliert werden kann. Im allgemeinen Fall erweist sich dies oft als unmöglich. Der Modellfehler führt dazu, dass der gewünschte Sollwert nie erreicht wird.

Aus dem klassischen Reglerentwurf weiss man, dass der Regelfehler mit Hilfe eines Integriergliedes auf null gebracht werden kann. Die Integralregelung ist eine Kaskadenregelung, dessen Regler aus einem einfachen Integrierglied besteht. Dies zeigt die folgende Abbildung.



### Vorgehen

Gegeben sei die folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Hx + Ju$$

Für den Integralregler gilt:

$$e = y - r = Hx + Ju - r$$

$$x_I = \int_0^{\infty} e dt \Leftrightarrow \dot{x}_I = e = Hx + Ju - r$$

Für das Gesamtsystem gilt dann:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J \\ G \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Für die Rückführung wird folgender Ansatz gewählt:

$$u = - \begin{bmatrix} K_1 & K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix}$$

Damit gilt für die neue Zustandsbeschreibung mit dem Eingang r:

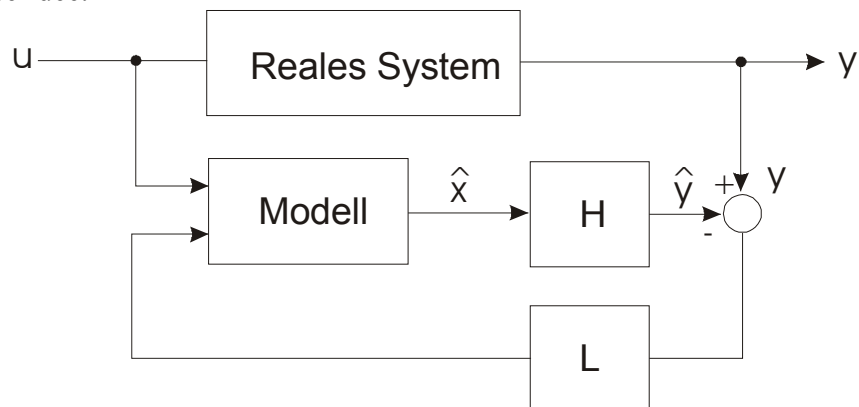
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H \\ -GK_1 & F - GK_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} -JK_1 & H - JK_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix}$$

# Beobachtersysteme

## Grundidee

Im allgemeinen Fall sind nicht alle inneren Zustände eines Systems erreichbar. Anhand des Ausgangssignals  $y$  müssen nun diese Zustände geschätzt werden, um eine Regelung zu ermöglichen. Man lässt sich nun von folgender Idee leiten: Man entwirft ein Modell des Systems und vergleicht den Ausgang des realen Systems mit diesem Modell. Der resultierende Regelfehler wird nun rückgeführt dem Modell übergeben. Durch diese Rückkopplung lassen sich die unbekannte Zustände des Systems anhand des Modells bestimmen. Die folgende Abbildung verdeutlicht diese Idee.



Man beachte, dass diese Schätzung des Zustandes  $x$  nichts mit der mathematischen Schätzung aus der Wahrscheinlichkeitstheorie (z.B. ML-Schätzung, usw.) zu tun hat. Es handelt sich vielmehr um einen Vergleich eines Modells mit dem wirklichen System. Allerdings kann das Eingangssignal auch stochastisch oder die Signale können verrauscht sein und in diesem Fall wird man sehr wohl von einer mathematischen Schätzung sprechen. Kalman-Filter und andere können dann eingesetzt werden, um innere Zustände eines realen Systems gezielt zu schätzen.

## Vorgehen

Für das Modell gilt nun:

$$\hat{y} = H \hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = F \hat{x} + Gu + L(y - \hat{y}) = F \hat{x} + Gu + L(y - H \hat{x}) = (F - LH) \hat{x} + Gu + Ly$$

Für das reale System wird folgende Annahme gemacht:

$$y = Hx$$

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

Damit gilt für den Fehler:

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\dot{\tilde{x}} = (F - LH) \tilde{x}$$

$$\tilde{y} = y - \hat{y}$$

$$\tilde{y} = H \tilde{x}$$

Für die Übertragungsfunktion dieses Systems gilt dann mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$s \tilde{X}(s) = (F - LH) \tilde{X}(s) \Rightarrow \tilde{X}(s) \cdot [sI - (F - LH)] = 0$$

$$\tilde{Y}(s) = H \tilde{X}(s)$$

Damit gilt:

$$\det[sI - (F - LH)] = 0$$

In Beobachternormalform erhält man:

$$\det[sI - (F - LH)] = s^n + (a_1 + l_n)s^{n-1} + (a_2 + l_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_n + l_1) = 0$$

Daraus folgt:

**Für ein beobachtbares System lassen sich die Polstellen durch die Wahl der Komponenten von L beliebig platzieren.**

### **Wahl der Polstellen**

Die Polstellen des Beobachtersystems müssen schneller sein als diejenigen des eigentlichen Systems. Schnellere Polstellen erreicht man, indem man die Pole des Beobachters weiter links von denjenigen des eigentlichen Systems wählt.

### **Dualität zwischen Zustandsrückführung und Beobachtersystemen**

Die mathematische Problemstellung der Zustandsrückführung und der Beobachtersysteme sind identisch:

- Zustandsrückführung:

$$\det[sI - (F - GK)] = 0$$

$$\det[sI - (F - GK)] = s^n + (a_1 + k_n)s^{n-1} + (a_2 + k_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_n + k_1) = 0$$

- Beobachtersysteme:

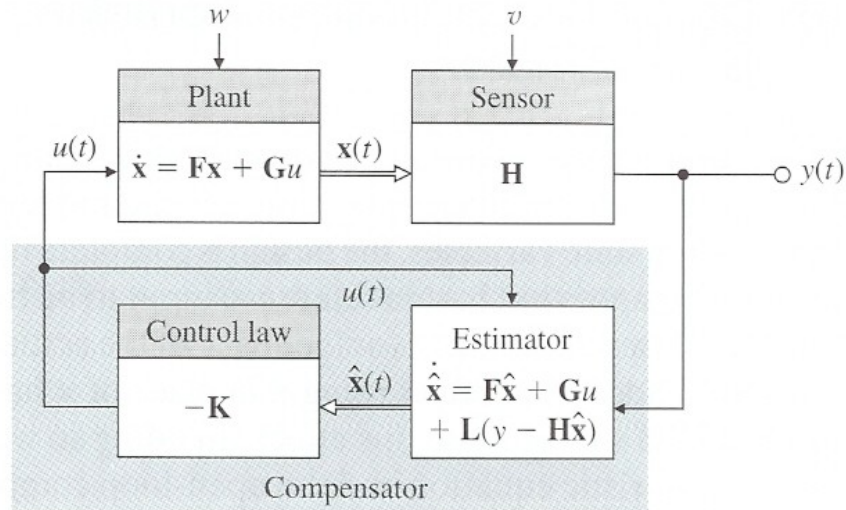
$$\det[sI - (F - LH)] = 0$$

$$\det[sI - (F - LH)] = s^n + (a_1 + l_n)s^{n-1} + (a_2 + l_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_n + l_1) = 0$$

## Zustandsrückführung mit Beobachter

### Grundidee

Die Zustandsrückführung ist nur dann möglich, wenn die Zustände auch beobachtbar sind. Im allgemeinen ist dies aber nicht der Fall. Man ist daher bemüht, einen Beobachter einzuführen, um die nicht-beobachtbaren Zustände zu schätzen und diese als Grundlage der Zustandsrückführung für den Regler zu verwenden. Die folgende Abbildung zeigt ein derartiges System.



$w$  und  $v$  sind angreifende Störgrößen und werden hier nicht weiter betrachtet. Interessant ist aber die Tatsache, dass die Laplacetransformation einer Zustandsrückführung mit Beobachter Lag- und Lead-Glieder ergibt. Somit ist gezeigt, dass die Regelglieder des klassischen Reglerentwurfs gut gewählt sind.

### Vorgehen und Schlussfolgerungen

Für den Beobachter gilt:

$$\dot{\hat{x}} = F \hat{x} + Gu + L(y - \hat{y}) = F \hat{x} + Gu + L(y - H \hat{x})$$

$$\hat{y} = H \hat{x}$$

Weiter gilt dann für den Schätzfehler:

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

Für die Zustandsrückführung gilt:

$$u = -K \hat{x}$$

Für das modellierte System gilt:

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Hx$$

Damit gilt dann:

$$\dot{x} = Fx - GK \hat{x} = Fx - GK(x - \tilde{x})$$

$$y = Hx$$

Daraus folgt:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F-GK & GK \\ 0 & F-LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe der Laplacetransformation erhält man:

$$\begin{bmatrix} sI - F + GK & -GK \\ 0 & sI - F + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ \tilde{X}(s) \end{bmatrix} = 0$$
$$Y(s) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ \tilde{X}(s) \end{bmatrix}$$

Damit gilt:

$$\det \begin{bmatrix} sI - F + GK & -GK \\ 0 & sI - F + LH \end{bmatrix} = \det[sI - F + GK] \cdot \det[sI - F + LH] = 0$$

Daraus folgt das **Superpositionsprinzip**:

**Die Polstellen des Gesamtsystems ist gleich den Polstellen des Zustandsreglers und des Beobachters. Es gilt:**

$$\det[sI - F + GK] \cdot \det[sI - F + LH] = 0$$

## Mehrvariablenregelung

### **Problemstellung**

Im Gegensatz zu SISO-Systemen besitzen MIMO-Systeme mehrere Ein- und Ausgangssignale. Eine entsprechende Regelung beschränkt sich also nicht nur auf eine Eingang-Ausgang-Beziehung, sondern auf mehrere Eingang-Ausgang-Beziehungen, die auch gekoppelt sein können. Ein Ausgangssignal kann also auch von mehreren Eingangssignalen abhängen. Dieser Umstand erschwert die Auslegung eines Reglers.

### **Regelkreisstrukturen**

Grundsätzlich lassen sich folgende Regelkreisstrukturen unterscheiden:

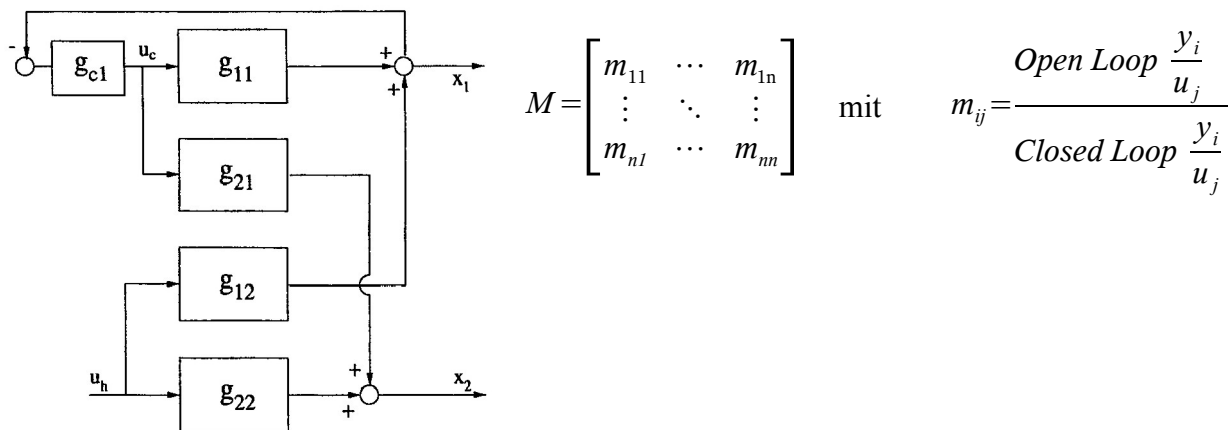
- **Mehrgrößenregelung:** Der Regler berücksichtigt alle Messgrößen und Kopplungen. Dieser Ansatz erweist sich in der Praxis als schwierig zu realisieren.
- **Mehrschlaufenregelung:** Die Kopplungen werden vernachlässigt. Dadurch ergeben sich aber mitunter grosse Regelfehler.
- **Entkopplung:** Die Übertragungsmatrix wird mit Hilfe eines Vorfilters entkoppelt. Das entkoppelte System kann dann mit Hilfe der Merhschlaufenregelung geregelt werden. Dieser Ansatz erweist sich in der Praxis meist als sehr nützlich und wird deshalb vielfach angewendet.

## Entkopplung

### Relative Gain Array (RGA)

Das Kopplungsmass eines MIMO-Systems wird mit Hilfe einer Matrix beschrieben.  $y_i$  bezeichne den Ausgang  $i$  und  $u_i$  den Eingang  $i$  des MIMO-Systems. Man untersucht nun alle Eingang-Ausgang-Kombinationen (Übertragungsfunktionen) des Systems im rückgeführten Fall ( $g_{c1} \neq 0$ ) und im offenen Fall ( $g_{c1} = 0$ ). Dies zeigt die folgende Abbildung.

Die Kopplungsmatrix  $M$  (auch Relative Gain Array genannt) gibt jeweils alle Verhältnisse zwischen offenen und geschlossenen Übertragungsfunktionen des MIMO-Systems an.



### Entkopplung eines beliebigen Systems

Die Übertragungsmatrix  $G(s)$  soll mit Hilfe der Entkopplungsmatrix  $H(s)$  in die entkoppelte Übertragungsmatrix  $G_e(s)$  überführt werden. Es gilt dann:

$$H(s)G(s) = G_e(s) \Rightarrow H(s) = G_e(s)G^{-1}(s)$$

### Entkopplung eines Systems mit 2x2-Übertragungsmatrix

Gegeben sei das folgende System:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Für die Übertragungsmatrix gilt:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

Die Kopplungsmatrix  $M$  lautet:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = m_{22} = \frac{g_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}, \quad m_{12} = m_{21} = -\frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

Für die Entkopplungsmatrix gilt dann:

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & 1 \end{bmatrix}$$

Für das entkoppelte System  $G_{dec}(s)$  gilt dann:

$$G_{dec}(s) = G(s) \cdot H(s)$$

Mit Hilfe der Mehrschlaufenregelung kann nun das System  $G_{dec}(s)$  geregelt werden.



# Anhang

## Faltungsintegral

Allgemein gilt für die Faltung:

$$y(t) = u(t) * g(t) = (u * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{L}\{u(t) * g(t)\} = U(s)G(s)$$

$$Z\{u(k) * g(k)\} = U(z)G(z)$$

Für die einseitige Laplacetransformation gilt:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t u(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

Für die einseitige Z-Transformation gilt:

$$y(k) = \sum_{i=0}^k u(i) g(k - i) = \sum_{i=0}^k u(k - i) g(i)$$

## Siebeigenschaft des Dirac-Stosses

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = f(t)$$

## Anfangswerttheorem (Initial Value Theorem)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad , \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

**Achtung:** Es muss ein Anfangswert existieren!

## Endwerttheorem (Final Value Theorem)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad , \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z)$$

**Achtung:** Es muss ein Endwert existieren!

**Merke:** Das Ausgangssignal eines stabilen Systems nimmt nach langer Zeit das Verhalten des Eingangssignal an.

## Matrixexponentialschreibweise

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \cdot \frac{t^i}{i!} \quad \text{mit der Matrix } A$$

$$A^0 = I \quad \text{mit der Einheitsmatrix } I$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$e^{A(a+b)} = e^{Aa} \cdot e^{Ab} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

$$e^{At} \cdot e^{-At} = I$$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = e^{At} \cdot A \quad A \int_0^t e^{A\tau} d\tau = e^{At} - I$$

$$e^{At} = T e^{Dt} T^{-1} \quad \text{mit } A = T D T^{-1}$$

Die Matrix D ist diagonal mit den Eigenwerten von A als Diagonalelemente.

Die Matrix  $e^{Dt}$  ist ebenfalls diagonal mit den Diagonalelementen  $e^{\lambda_i t}$ .

$$e^{At} = T e^{Dt} T^T \quad \text{mit } A = T D T^T$$

Die Matrix A ist orthogonal. Die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix können so gewählt werden, dass die Matrix orthogonal wird.

### Inverse einer zweidimensionalen Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### Inverse einer dreidimensionalen Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \det(A) \neq 0, \quad A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$$

$A_{ik}$ : algebraischen Komplemente (Adjunkte) von  $a_{ik}$

$D_{ik}$ : (n-1)-reihige Unterdeterminante von  $\det(A)$  (in  $\det(A)$  wird die i-te Zeile und k-te Spalte gestrichen)

### Die Z-Transformation

$$f(k) \leftrightarrow F(z)$$

$$F(z) = Z\{f(k)\}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k} \quad \text{mit } f(k) = 0 \quad \text{für } k < 0$$

### Rücktransformation oder inverse Z-Transformation

$$f(k) = Z^{-1}\{F(z)\}$$

#### Methode 1: Spezielle Taylorreihe bilden

Man entwickelt  $F(1/z)$  in eine Taylorreihe um  $z=0$ . Es gilt:

$$f(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} F\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{bei } z=0 \quad \text{für } k=0, 1, 2, 3, \dots$$

#### Methode 2: Polynomdivision

Man führt eine Polynomdivision durch und erhält damit direkt die gesuchten Koeffizienten. Es gilt:

$$F(z) = a_1 + a_2 \cdot z^{-1} + a_3 \cdot z^{-2} + a_4 \cdot z^{-3} + \dots \rightarrow f(k) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

### **Method 3: Partialbruchzerlegung**

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung wird  $F(z)$  in Ausdrücke  $G(z)$  mit der folgenden Gestalt zerlegt:

$$G(z) = \frac{1}{1 + \frac{q}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \cdot z^{-k} \quad \text{mit} \quad g(k) = q^k \quad \text{für} \quad \left|\frac{q}{z}\right| < 1$$

Die Ausdrücke  $G(z)$  lassen sich dann bequem nach  $g(k)$  transformieren. Das Resultat kann dann noch zusammengefasst werden. Der Vorteil dieser Methode besteht in der Angabe einer geschlossenen Form für  $f(k)$ , was bei anderen Methoden nicht möglich ist.

### **Rechenregeln**

- Erster Verschiebungssatz:  $Z\{f(k-m)\} = z^{-m} F(z)$
- Zweiter Verschiebungssatz:  $Z\{f(k+m)\} = z^m \left( F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(i) \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^i \right)$
- Grenzwertsatz:  $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1+0} (1-z)F(z)$
- Differentiation:  $Z\{k \cdot f(k)\} = -z \frac{dF(z)}{dz}$
- Integration:  $Z\left\{\frac{f(k)}{k}\right\} = \int_z^{\infty} \frac{F(u)}{u} du$

### **Laplacebereich – Z-Bereich**

Die Transformationsregel lautet:

$$G(z) = Z\{\mathcal{L}^{-1}\{P(s)\}, t = Tk\} = \zeta\{P(s)\}$$

Man beachte, dass die Transformation nur in diese Richtung eindeutig ist.

Für die Übertragungsfunktionen im Laplace- und Z-Bereich gilt mit Hilfe eines Halteglieds:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \zeta\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Weitere direkte Transformationen zwischen Laplace- und Z-Bereich sind den Transformationstabellen zu entnehmen.

Die bilineare Transformation von Tustin erweist sich oft als gute Approximation. Sie lautet:

$$s = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

### **Eigenschaften der Laplacetransformation**

siehe Anhang!

### **Laplacetransformationstabelle**

siehe Anhang!

## Sensitivität

Gegeben sei eine Funktion  $y(t, \theta + \Delta\theta)$ , bei der der Parameter  $\theta$  um  $\Delta\theta$  variiert wird. Man interessiert sich nun für die Änderungen des Funktionswerts  $y$  bei gleichzeitiger Änderung des Parameters  $\theta$ . Mit Hilfe einer Taylorreihe erhält man:

$$y(t, \theta + \Delta\theta) = y(t, \theta) + \frac{\partial y(t, \theta)}{\partial \theta} \cdot ((\theta + \Delta\theta) - \theta) + \dots$$

$$y(t, \theta + \Delta\theta) - y(t, \theta) = \Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \Delta\theta$$

Somit gilt:

$$\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \Delta\theta$$

Die Sensitivität ist dann wie folgt definiert:

$$S = \frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{\theta}{\Delta\theta}$$

Die Sensitivität ist ein Mass für die Auswirkungen der Änderungen von Parametern auf die Änderungen des Funktionswerts. In der Regelungstechnik interessiert man sich für die Auswirkungen von Änderungen der Regelparametern auf die Änderungen der Ausgangsfunktionen. Man spricht dann von der Sensitivität von Regelparametern. Eine hohe Sensitivität der Regelparameter bedeutet, dass durch kleine Änderungen grosse Auswirkungen auf das Ausgangssignal zu erwarten sind. Eine geringe Sensitivität bedeutet, dass die Regelparameter kaum Auswirkungen auf das Ausgangssignal haben.

## Quellenangaben

Die Bilder und Inhalte sind teilweise von folgenden Quellen entnommen:

- **Feedback and Control of Dynamic Systems (Fourth Edition)** by Gene F. Franklin, J. David Powell and Abbas Emani-Naeini; published at Prentice Hall
- Vorlesungsskript **Regelsysteme** von Prof. M. Morari