Lösungen zu Übungsblatt 9
Modul Algebra-2, SoSe 2006

---

(25) Sei $f_{a,b} := x^3 + ax^2 + bx + 1$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_3$. Da $\deg f = 3$ ist reicht es aus, die Polynome zu finden, die in $\mathbb{Z}_3$ keine Nullstelle haben.
Es ist $f_{a,b}(0) = 1 \neq 0$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}_3$. Ferner ist $f_{a,b}(1) = a + b + 2$ genau dann $\neq 0$, falls $(a, b) \in \{(0, 0); (1, 1); (0, 2); (2, 0); (1, 2); (2, 1)\}$ ist. Nun ist $f_{a,b}(2) = (8 + 3a + 2b + 1)_3 = (a + 2b)_3 \neq 0$, falls $(a, b) \in \{(1, 0); (0, 2); (2, 0); (1, 2); (2, 1)\}$. Also hat $f_{a,b}$ nur für $(a, b) \in \{(0, 2); (2, 0); (1, 2); (2, 1)\}$ gar keine Nullstellen in $\mathbb{Z}_3$, was uns die unzerlegbaren Polynome $x^3 + 2x + 1$, $x^3 + 2x^2 + 1$, $x^3 + x^2 + 2x + 1$ und $x^3 + 2x^2 + x + 1$ liefert.

(26) Sei $\frac{b}{c}$ Nullstelle von $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ und ein vollständig gekürzter Bruch (also $ggT(b, c) \sim 1$). Dann gilt

$$\left(\frac{b}{c}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Multiplikation auf beiden Seiten mit c^n liefert

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1}c + \cdots + a_1bc^{n-1} + a_0c^n = 0, \tag{1}$$

bzw.:

$$b^n = c \cdot \underbrace{\left(-a_{n-1}b^{n-1} - \cdots - a_1bc^{n-2} - a_0c^{n-1}\right)}_{=:r}.$$

Dies ist eine Gleichung in R.
Sei nun $b = p_1 \dots p_k$ eine Primzerlegung von b (möglich, da R faktoriell). Ferner sei $c \nsim 1$ und $c = q_1 \dots q_l$ eine Primzerlegung von c. Es gilt dann

$$b^n = c \cdot r \Leftrightarrow p_1^n \dots p_k^n = q_1 \dots q_l \cdot r$$

Da $ggT(b, c) \sim 1$ ist, gilt $p_i \neq q_j$ für $i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, l\}$ und es ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme, dass $c \nsim 1$.

O.E. kann nun $c = 1$ angenommen werden. Die Gleichung (1) ergibt dann

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1b + a_0 = b\big(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1\big) + a_0 = 0,$$

bzw.

$$b\big(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \cdots + a_1\big) = -a_0\,.$$

und es folgt: $b|a_0$. □

(27) (a) Sei $f := 9x^3 - x^2 + 6x - 7 \in \mathbb{Q}[x]$. $\rho_2(f) = x^3 + x^2 + 1$ besitzt keine Nullstelle in $\mathbb{Z}_2$ und ist somit unzerlegbar in $\mathbb{Z}_2[x]$. Außerdem ist $c(f) = 1$ und $hK(f) \notin \ker \rho_2$. Nach Satz 13.7 ist f nun in $\mathbb{Z}[x]$ unzerlegbar und als nicht konstantes Polynom dann auch in $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Sei $f := (y + 103)^2x^3 - x^2 + (y + 102)(y + 103)x - (y + 107) \in (\mathbb{Q}[y])[x]$. Betrachte die Einsetzung $\pi_{-102}(f) = x^3 - x^2 - 5 \in \mathbb{Z}[x]$. Es gilt $c(f) = 1$ und $hK(f) \notin \ker \pi_{-102}$. Die Reduktion $\rho_2(\pi_{-102}(f)) = x^3 + x^2 + 1$ liefert ein in $\mathbb{Z}_2[x]$ unzerlegbares Polynom. Nach Satz 13.7 ist daher $\pi_{-102}(f)$ unzerlegbar in $\mathbb{Z}[x]$ und (vgl. (a)) in $\mathbb{Q}[x]$. Nochmalige Anwendung von Satz 13.7 zeigt: f ist in $(\mathbb{Q}[y])[x]$ unzerlegbar.

(c) Gegeben ist $f := 5x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 3x + 21 \in \mathbb{Z}[x]$. Es gilt $c(f) = 1$ und $\rho_2(f) = x^4 + x + 1$ sowie $hK(f) \notin \ker \rho_2$, außerdem hat $\rho_2(f)$ keine Nullstelle in $\mathbb{Z}_2$. Ferner existieren keine Primfaktoren zweiten Grades, da $(x^2 + x + 1)^2 \neq x^4 + x + 1$ und $x^2 + x + 1$ das einzige Primpolynom zweiten Grades über $\mathbb{Z}_2$ ist. Somit ist nach Satz 13.7 f unzerlegbar in $\mathbb{Z}[x]$ und dann in $\mathbb{Q}[x]$.

(d) Sei $f := x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. $\rho_2(f) = x^5 + x^2 + 1$ besitzt keine Nullstelle in $\mathbb{Z}_2[x]$. Außerdem existieren keine quadratischen Primteiler, da $x^2 + x + 1$ einziges Primpolynom vom Grad 2 über $\mathbb{Z}_2[x]$ ist und der Rest der Division $(x^5 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1)$ ungleich 0 ist. Wie zuvor ergibt sich, dass f unzerlegbar in $\mathbb{Q}[x]$ ist.

(e) Sei $f := x^4 + y^2x^3 + (y + 1)x^2 + 1 \in (\mathbb{Q}[y])[x]$. Betrachte die Einsetzung $\pi_1(f) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ und die Reduktion $\rho_2(\pi_1(f)) = x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. Das Polynom $\rho_2(\pi_1(f))$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{Z}_2$ und auch keine quadratischen Primfaktoren ($x^2 + x + 1$ ist kein Teiler, siehe auch c.) und d.)), daher ist f unzerlegbar mit den gleichen Argumenten, wie zuvor. Alternative: Betrachte f als Polynom in $(\mathbb{Q}[x])[y]$.

(f) Sei $f := x^5 + 7x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Hier ist $c(f) = 1$, also reicht es, die Unzerlegbarkeit in $\mathbb{Z}[x]$ zu prüfen, da daraus automatisch die Unzerlegbarkeit in $\mathbb{Q}[x]$ folgt. Da die anderen Kriterien hier versagen, nehmen wir an, es existiere eine Zerlegung in $\mathbb{Z}[x]$ von der Form $x^5 + 7x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^3 + cx^2 + dx + e) = x^5 + (a+c)x^4 + (ac+b+d)x^3 + (e+ad+bc)x^2 + (ae+bd)x + be$. Also muss gelten: $a + c = 0, ac + b + d = 0, e + ad + bc = 0, ae + bd = 7, be = 1$. Wenn wir ohne Einschränkung $a = -c$ annehmen, bleibt immer noch die Fallunterscheidung $b = e = 1$ oder $b = e = -1$ beim Auflösen der entstandenen Abhängigkeiten. Im ersten Fall erhalten wir $d = 7 + c$, womit $-c^2 + c + 8 = 0$ und somit $c = \pm\sqrt{\frac{33}{4}} + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ folgt. Der zweite Fall liefert $-c^2 + c + 6 = 0$ und somit $c = \pm\sqrt{8} \notin \mathbb{Z}$. Daher existiert keine quadratische Zerlegung des Polynoms in $\mathbb{Z}[x]$ und somit auch nicht in $\mathbb{Q}[x]$.

(28) (a) Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion.
Anfang: Sei $d = 1$. Dann ist $L = K, [L : K] = 1 \leq 1!$
Voraussetzung: Die Behauptung gelte für ein $d - 1 \in \mathbb{N}$.
Schluss: Sei α Nullstelle von f in L und $d := \deg(f)$.
Dann ist $f = (x - \alpha)g$ mit einem $g \in (K[\alpha])[x]$ und $[K[\alpha] : K] \leq d$.
L' ist Zerfällungkörper von g über $K[\alpha]$. Also gilt nach Induktionsannahme $[L' : K[\alpha]] \leq (d - 1)!$, denn $\deg(g) = d - 1$. Nach Paragraph 14, Satz 10 e.) gilt jetzt

$$[L' : K] \leq [L' : K[\alpha]] \cdot [K[\alpha] : K] = (d - 1)! \cdot d.$$

Da $K[\alpha] \subseteq L'$ folgt, dass L' Zerfällungskörper von f ist, also $L \cong L'$.
Somit gilt $[L : K] \leq d!$ $\square$

(b) Betrachte $f = x^3 - 2$. Die Nullstellen von f sind $\sqrt[3]{2}, \zeta\sqrt[3]{2}$ und $\zeta^2\sqrt[3]{2}$ mit $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Nun ist $\mathrm{MiPo}_Q(\sqrt[3]{2}) = x^3 - 2$, also $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}] = 3$. Ferner ist $\mathrm{MiPo}_Q(\zeta) = (x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$ und somit $[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}] = 2$. Da $ggT(2, 3) = 1$ ist, folgt mit dem Gradsatz (Paragraph 14, Satz 10), dass 6 Teiler von $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \zeta] : \mathbb{Q}]$ ist. Nach Teil $a.$) folgt, dass $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \zeta] : \mathbb{Q}] \leq 3! = 6$. Somit besitzt der Zerfällungskörpers von f innerhalb $\mathbb{C}$ die $\mathbb{Q}$-Dimension 6.