

# Umdrucke

Vorlesung Baustatik I

2. Teil Statik - Festigkeitslehre

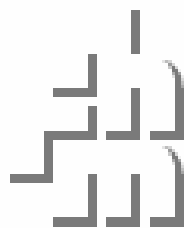
**Prof. Dr.-Ing. Christoph Seeßelberg**

[www.stahlbaustudium.de](http://www.stahlbaustudium.de)

Stand 15.3.2004



Abb.: Elastische Verformung eines Mobilkranauslegers



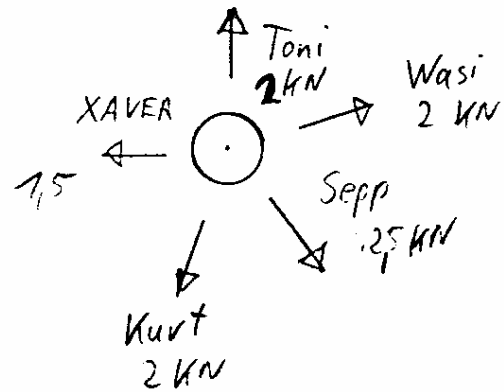
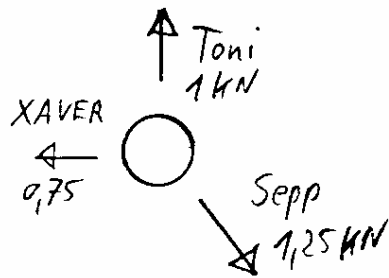
## Aufgabe “zum Warmlaufen” am Semesterbeginn:

a) An einem Tisch im Biergarten treffen sich drei Bayern zu einer Variante des Fingerhakelns. Bei diesem Volkssport haken die Gegner ihre mittelfinger in einen Ring aus metall und ziehen jeweils so stark sie können. Derjenige, der die anderen zu sich herüber zieht ist der Gewinner.

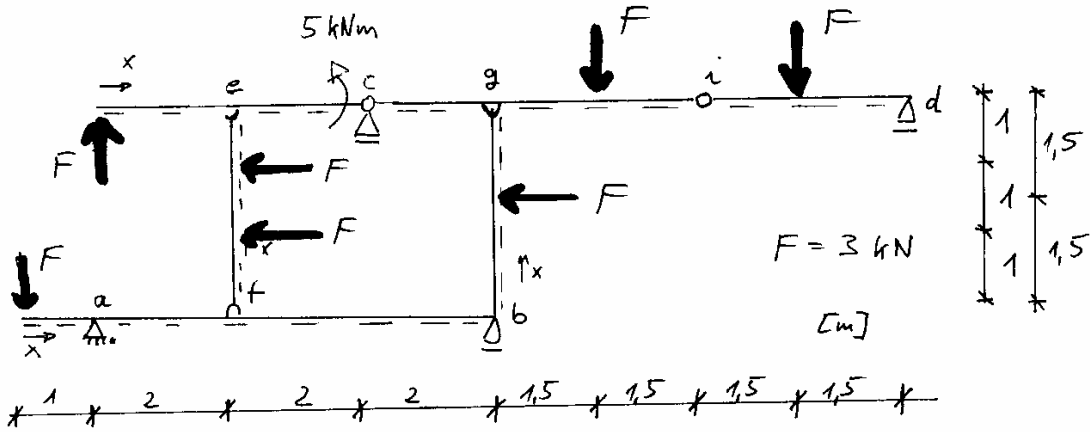
Es ist auch eine skizzierte Draufsicht auf dem Arbeitsblatt. Ich beschreibe sie euch jetzt. Es sitzen Xaver (0,75 KN) Toni (1 KN) und sepp (1,25KN). Xaver und Toni sitzen in einem rechten Winkel zueinander und Sepp sitzt Diagonal zu ihnen.

b) Nach einer Weile setzén sich zwei weitere Bayern dazu und hakeln mit.

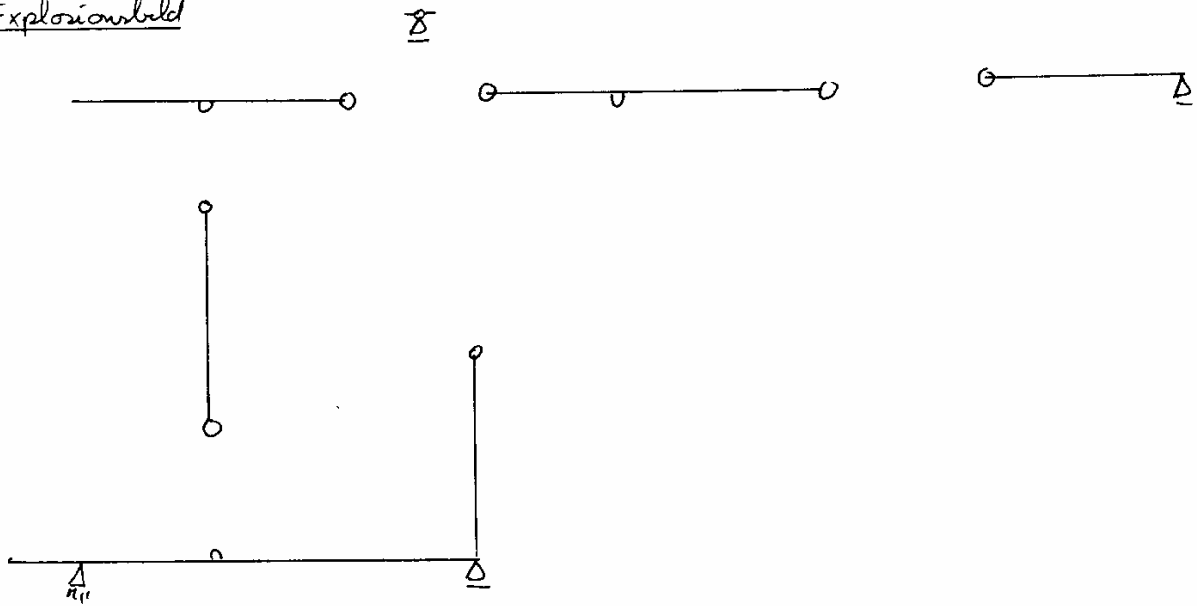
Im Uhrzeiger: Xaver 1,5 KN und Toni 2KN, dann Wasi mit 2KN, Sepp mit 2,5 KN und dann Kurt mit 2KN.



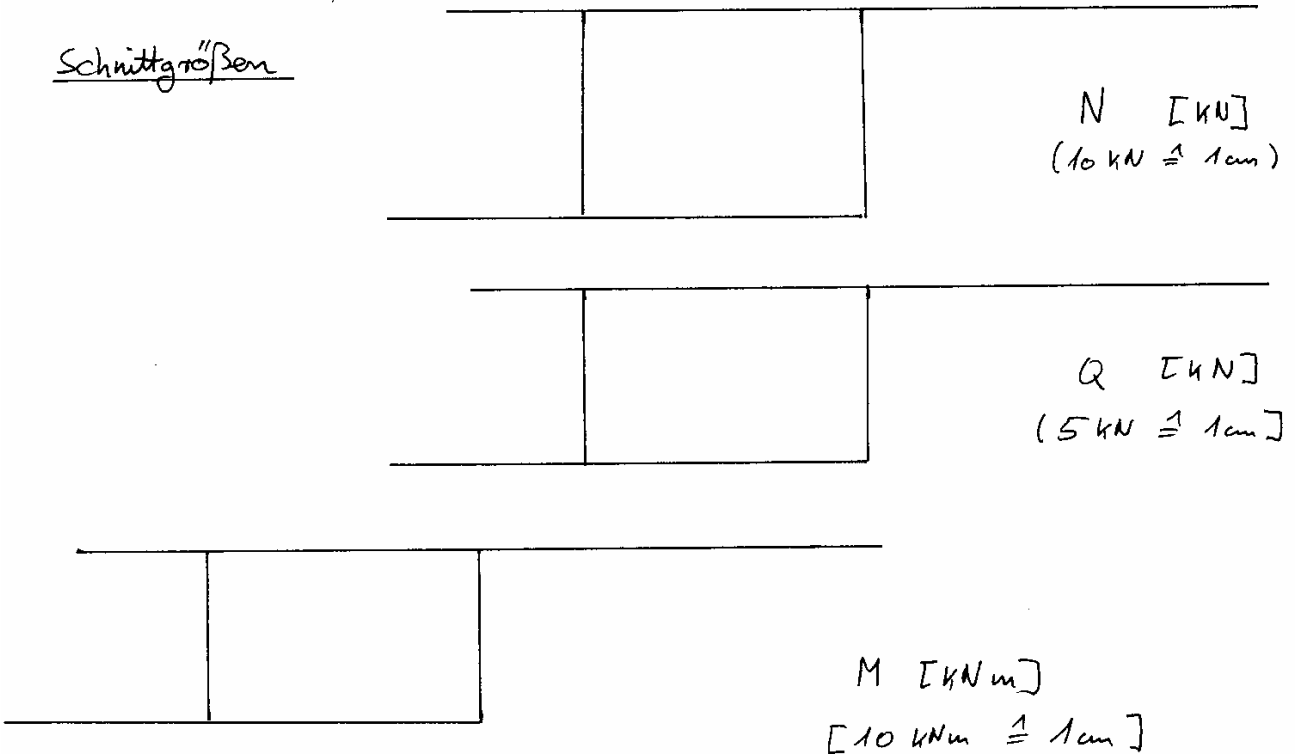
# Übung "komplexes gemischtes System"



Explosionsbild



Schnittgrößen



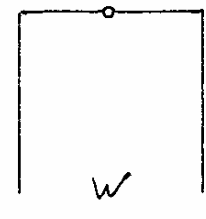
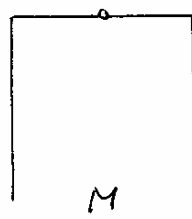
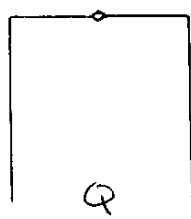
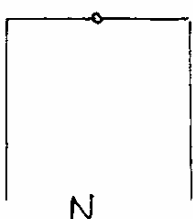
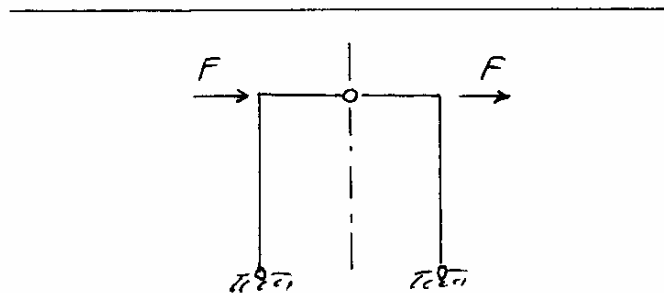
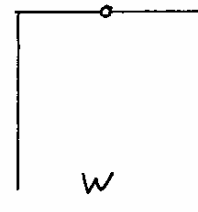
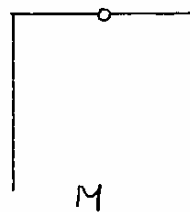
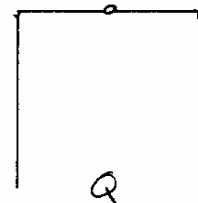
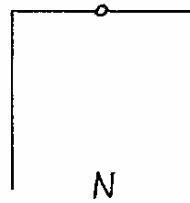
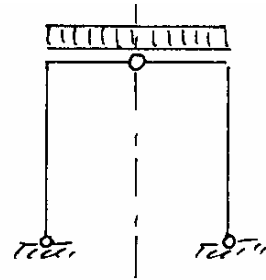
# Symmetrieeigenschaften ebener Stabwerke (1)

- Schnittgrößen und Auflagerkräfte -

s : symmetrisch

a : antimetrisch

Tragwerk:	symmetrisch	
Belastung:	symm.	antimetr.
Auflagerkräfte		
N		
Q		
M		
$\mathcal{Z}$		
W		
Schnittgrößen in der Symmetrieachse		
Belastung	s	a
N		
Q		
M		
$\mathcal{Z}$		
W		



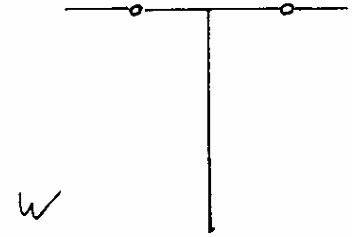
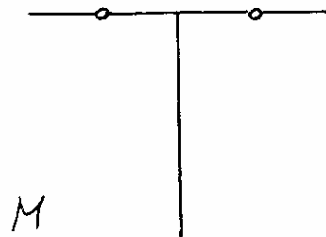
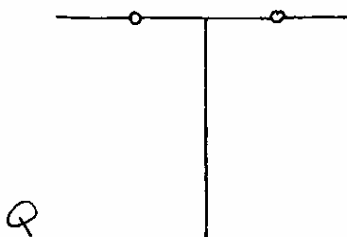
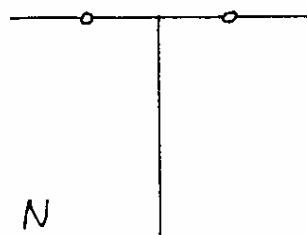
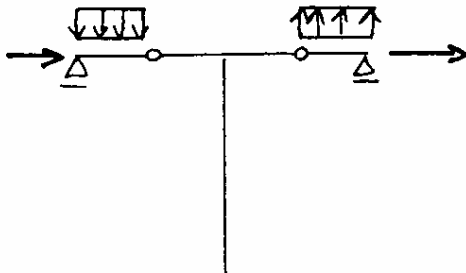
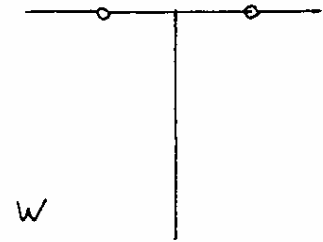
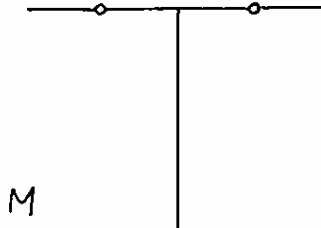
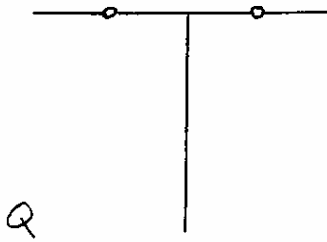
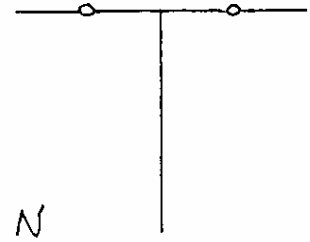
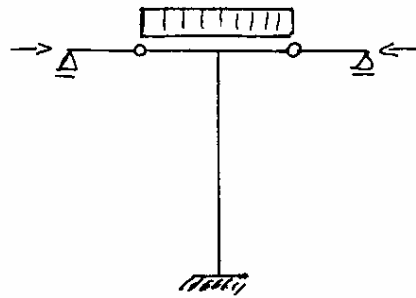
## Symmetrieeigenschaften ebener Stabwerke (2)

- Schnittgrößen für Stäbe in der Symmetrieachse –

s : symmetrisch

a : antimetrisch

Belastung	s	a
N		
Q		
M		
$\varphi$		
W		

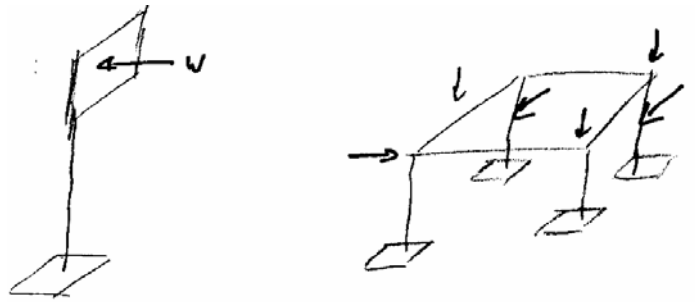


## 8. Senkrecht zur Systemebene belastete ebene Tragwerke

- Kap 5 bis 7: ebenes Tw mit Belastung in der Tw-Ebene

außerdem gibt es :

- ebenes Tw mit Belastung senkrecht zur Tw Ebene
- räumliches Tw mit beliebiger Belastung



### 8.1 Schnittgrößen, Gleichgewichtsbedingungen, Auflagerarten, Gelenke

Das Tw ist in der x-y Ebene gelegen.

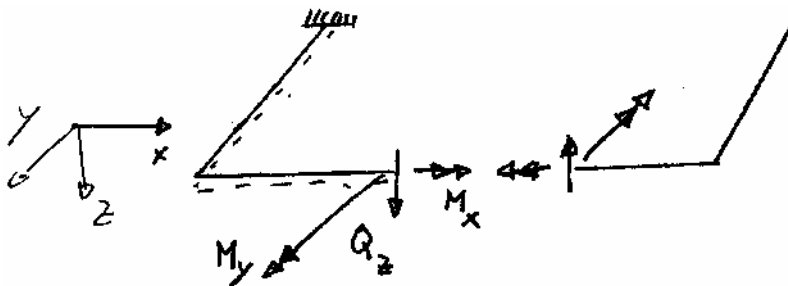
Vorgehensweise bei der Berechnung unverändert:

- Schnittprinzip anwenden
- Gleichgewicht anschreiben

#### 3 Schnittgrößen :

- $Q = Q_z$  : Querkraft in z-Richtung
- $M_x$  : Torsionsmoment (d.h. Moment um die Stabachse)
- $M_y$  : Biegemoment um die y - Achse

Vorzeichendef.: am positiven Schnittufer weisen Schnittgrößen in positive Koordinatenrichtung


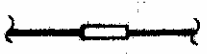
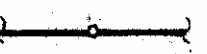



3 Gleichgewichtsbedingungen :  $\Sigma Q_z=0$  ;  $\Sigma M_y=0$  ;  $\Sigma M_x=0$

#### Auflagerarten :

BEZEICHNUNG:	Punktlager		Schneiden- oder Linienkipplager		Einspannung	torsionsfreie Einspannung
	Ansicht	Grundriß	Ansicht	Grundriß	Grundriß	Grundriß
Symbol						
Lagerreaktionen						
Wertigkeit	1		2		3	2
Freiheitsgrade	$\varphi_x, \varphi_y$		$\varphi_y$		-	$\varphi_x$

## Gelenkarten

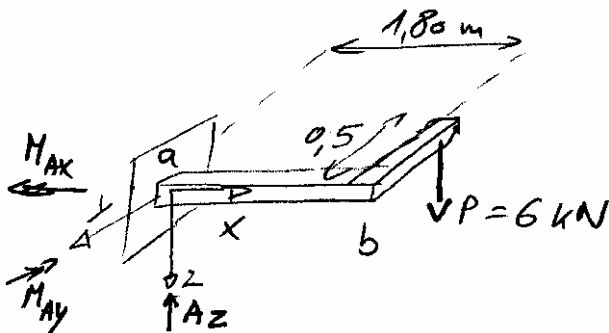
BEZEICHNUNG:	Biegemomentengelenk	Drillmomentengelenk (Torsionsgelenk)	Vollgelenk	Querkraftgelenk
Symbol				
Schnittgrößen (Gelenkkräfte)	$M_x, Q_z$	$M_y, Q_z$	$Q_z$	$M_x, M_y$
Freiheitsgrade	$\Delta\varphi_y$	$\Delta\varphi_x$	$\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y$	$\Delta w$

statische Bestimmtheit :  $n = a + z - 3t$

Schnittgrößenverläufe :

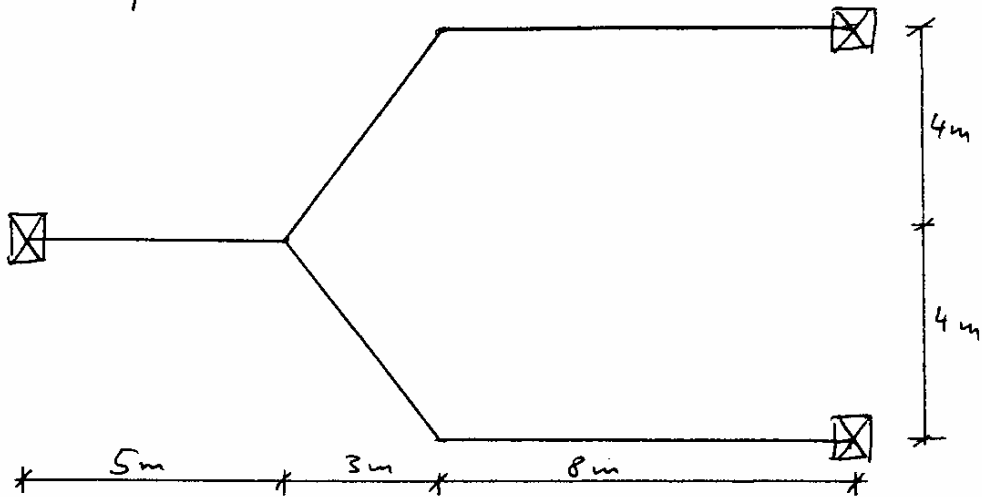
- Biege- und Torsionsmomenten können über Eck Sprünge machen, ohne daß dort ein Moment angreift
- Die Querkraft bleibt über Eck konstant, wenn keine Last angreift oder eine Auflagerkraft wirkt.

Beispiel

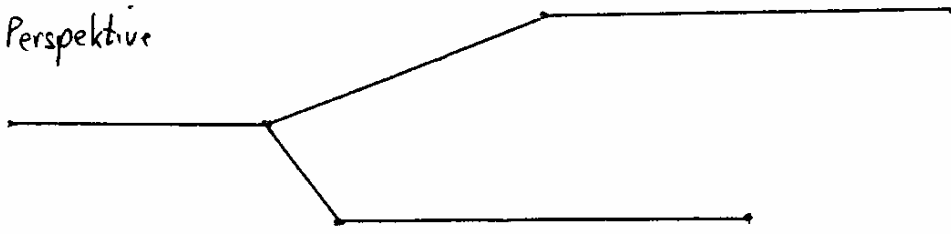


## Beispiel zu Kapitel 8.1

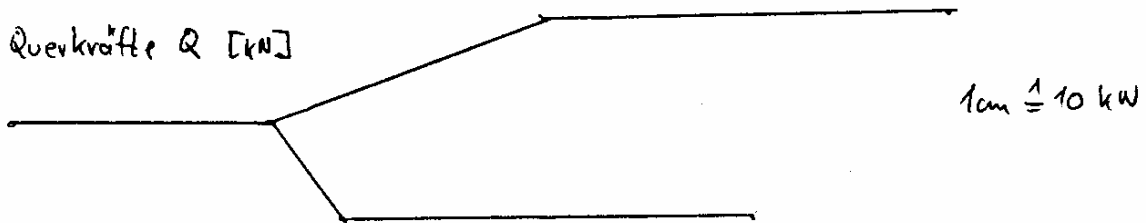
Grundriß :



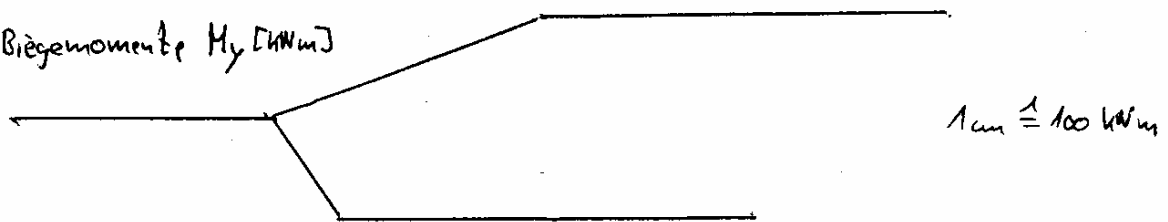
Perspektive



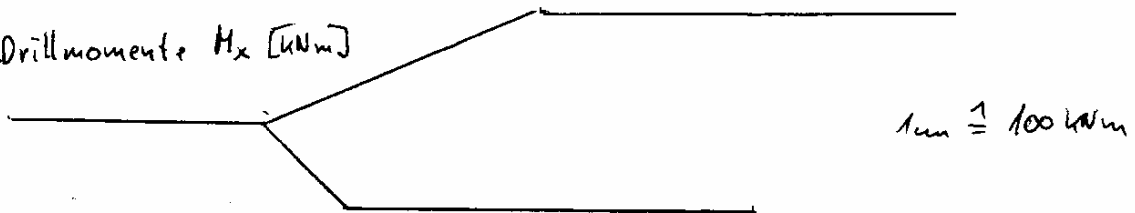
Querkräfte  $Q$  [kN]



Biegemomente  $M_y$  [kNm]



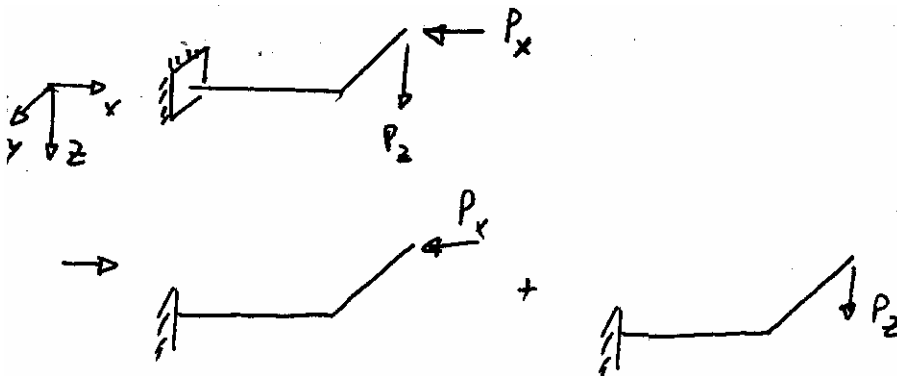
Drillmomente  $M_x$  [kNm]





## 8.2 Ebene Systeme, räumlich belastet

Beispiel :



Belastung in der Ebene

$N, Q_z, M_y$

Belastung senkrecht

$Q_y, M_z, M_x$

Vorgehensweise: Belastung „splitten“, getrennt berechnen, superponieren

## 8.3 Allgemeine räumliche Stabwerke

6 Schnittgrößen (3 Kräfte, 3 Momente):  $N, Q_z, Q_y, M_x, M_y, M_z$

6 Gleichgewichtsbedingungen:  $\Sigma F_x=0; \Sigma F_y=0; \Sigma F_z=0; \Sigma M_x=0; \Sigma M_y=0; \Sigma M_z=0;$

Berechnungsprinzip: Freischneiden, GlGew anschreiben

## II Festigkeitslehre

### 1. Einleitung

- 1.1 Aufgaben der Festigkeitslehre
- 1.2 Spannungen und Formänderungen
- 1.3 Die Grundbeanspruchungsarten

### 2. Zug- und Druckbeanspruchung von Stäben

- 2.1 Spannungsermittlung
- 2.2 Dehnungen
- 2.3 Stoffgesetze und Werkstoffkennwerte

### 3. Der ebene Spannungszustand

- 3.1 Symmetrie der Spannungsmatrix
- 3.2 Drehung des Koordinatensystems
- 3.3 Hauptspannungen
- 3.4 Verformungen in der Ebene
- 3.5 Das Hookesche Gesetz
- 3.6 Die Vergleichsspannung

### 4. Biegebeanspruchung

- 4.1 Normalspannungen bei einachsiger Biegung
- 4.2 Flächenträgheitsmomente
- 4.3 Schiefe Biegung
- 4.4 Biegung mit Normalkraft
- 4.5 Querschnittskern
- 4.6 Querschnitte mit versagender Zugzone

### 5. Schubspannungen infolge Querkraft

- 5.1 Wirkung von Schubspannungen
- 5.2 Berechnung von Schubspannungen infolge Querkraft
- 5.3 Spannungsermittlung bei dünnwandigen Querschnitten
- 5.4 Der Schubmittelpunkt

### 6. Schubspannungen infolge St. Venantscher Torsion

- 6.1 Torsion eines kreisförmigen Stabquerschnitts
- 6.2 Torsion dünnwandiger geschlossener Profile
- 6.3 Torsion dünnwandiger offener Profile
- 6.4 Vorgehensweise bei der Berechnung von Torsionsaufgaben

# 1. Einleitung

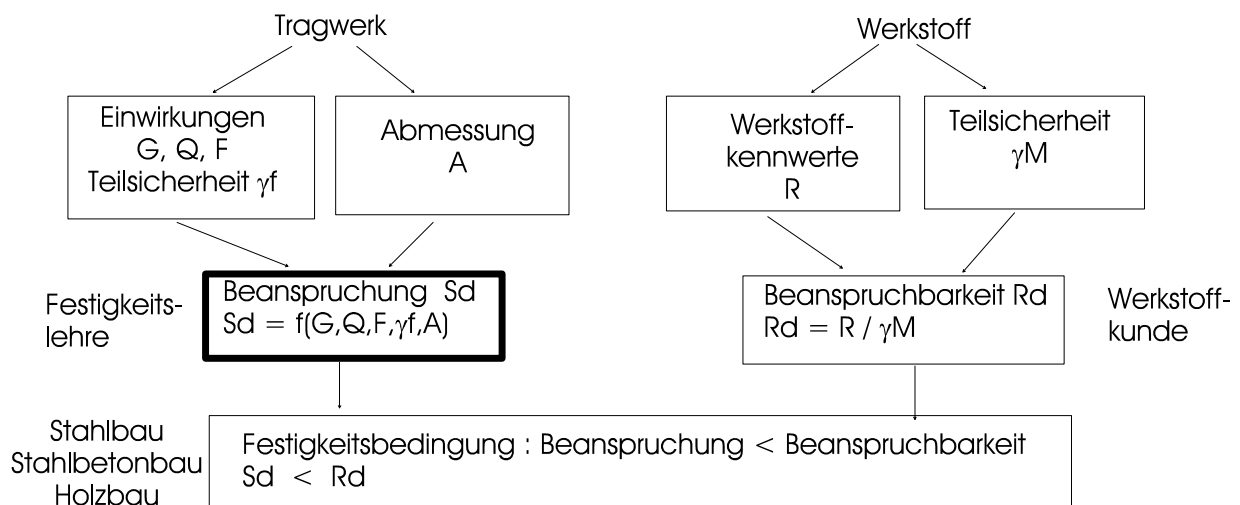
## 1.1 Aufgaben der Festigkeitslehre

Aufgabe der Festigkeitslehre :

- vorhandene Beanspruchungen (Spannungen) feststellen
- erforderliche Abmessungen eines Bauteils festlegen
- auftretende Formänderungen berechnen

Ziel: vorgeschriebene Sicherheit wird mit minimalem Baustoff- bzw. Kostenaufwand erreicht

Prinzip des Tragsicherheitsnachweises :



## 1.2 Spannungen und Formänderungen

Schnittgrößen N, Q, M sind innere Kräfte, die in einer Schnittfläche wirken. Der je Flächenanteil vorhandene Kraftanteil wird als Spannung bezeichnet

**Spannung**  $\sigma = \text{Kraftanteil} / \text{Flächenanteil} = dF / dA$

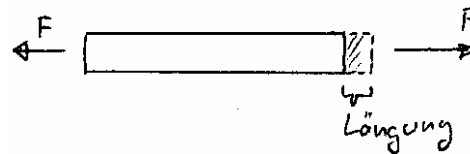
- ist ein Maß für die Beanspruchung des Bauteils.
- Die Spannung ist - wie die Kraft - ein Vektor.
- In einem gezogenen Stab (N) ist die Spannung gleichverteilt :



- Vorzeichen : Wie bei Schnittgrößen (positive Spannungen zeigen am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtung.)  
 $\sigma$ : positiv immer Zug; negativ immer Druck
- Dimension einer Spannung : Kraft / Fläche
- Einheit : kN/cm<sup>2</sup> (oder N/mm<sup>2</sup>)

## Formänderungen

Veränderung der Ausmaße eines belasteten Körpers bezogen auf die Abmessungen des unbelasteten Körpers. Der Rundstab z.B. längt sich infolge der Normalkraft :



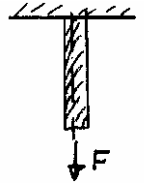
Andere Begriffe : Verformung, Verzerrung

### 1.3 Die Grundbeanspruchungsarten

#### a) Zug / Druckbeanspruchung

##### a1) Zugbeanspruchung

Die äußeren Kräfte wirken in der Stablängsachse und längen den Stab; z.B. Fachwerkstäbe, Seile, Abschleppstange=> Zugspannungen  $\sigma$

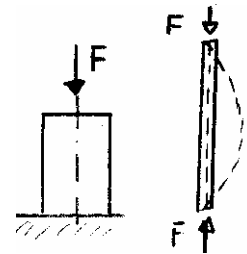


##### a2) Druckbeanspruchung

Die äußeren Kräfte wirken in der Stablängsachse und verkürzen den Stab; z.B. Fachwerkstäbe, Säulen, Stützen, Puffer von Eisenbahnwaggons.

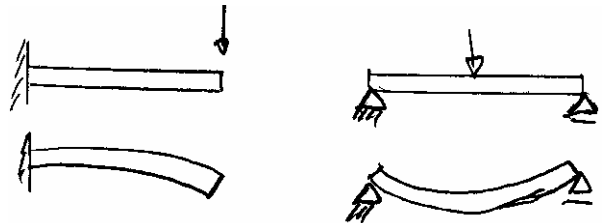
=> Druckspannungen  $\sigma$

Schlanke, druckbeanspruchte Stäbe sind auch auf Knickung zu untersuchen.



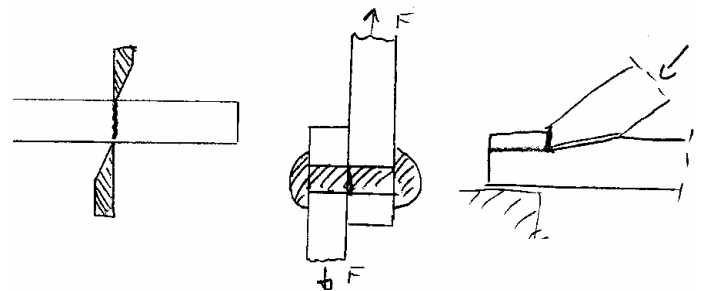
#### b) Biegebeanspruchung

Die äußeren Lasten wirken senkrecht zur Trägerachse und rufen eine Krümmung im Stab hervor.



#### c) Schubbeanspruchung + Abscherbeanspruchung

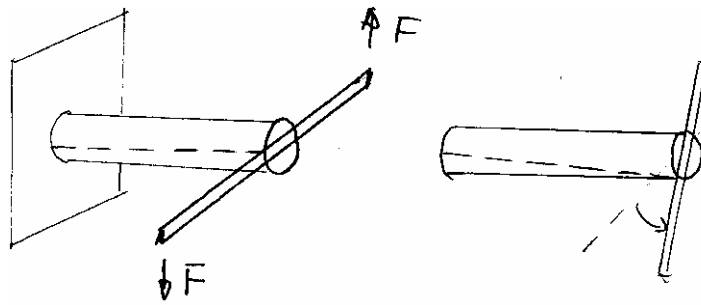
Zwei entgegengesetzt gerichtete Kräfte wirken in der Ebene senkrecht zur Stabachse und versuchen, die Werkstoffteilchen in dieser Ebene zu verschieben; z.B. Schrauben, Bolzen => Schubspannungen  $\tau$



#### d) Torsionsbeanspruchung (Verdrehbeanspruchung)

Der Stab wird durch ein Moment um die Stabachse beansprucht. Es folgt eine Verdrehung der Stabquerschnitte gegeneinander; z.B. Wellen, Zapfen, Schraubendreher

=> Torsionsschubspannungen  $\tau$



## 2. Zug- und Druckbeanspruchung von Stäben

(Merkmale eines Stabes :

- seine Querschnittsabmessungen sind klein bezogen auf seine Länge
- er ist nur in seiner Längsrichtung auf Zug oder Druck beansprucht.)

### 2.1 Spannungsermittlung

Ein Stab wird an seinen Enden durch die in der Stabachse liegenden Kräfte  $F$  belastet.

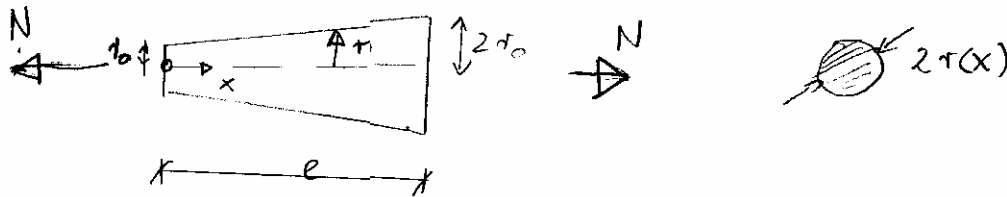
- Im Schnitt  $s-s$  senkrecht zur Stabachse wirken die Spannungen  $\sigma = N/A$ .
- Sie stehen senkrecht („normal“) zur Schnittebene.
- Die Normalspannungen stehen mit der Normalkraft im Gleichgewicht:

- Messungen zeigen, daß in der Nähe des Stabendes, an dem eine Kraft angreift, die Normalspannungen nicht gleichmäßig verteilt sind, sondern Spannungsspitzen auftreten (d.h.: hier ist :  $\sigma \neq N/A$ )

Diese Spannungsüberhöhung bleibt auf die unmittelbare Umgebung des Kraftangriffs beschränkt und klingt mit zunehmendem Abstand vom Stabende sehr schnell ab (Prinzip von St.Venant).

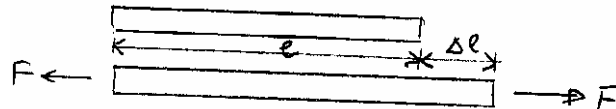
=> Deswegen wird sie im weiteren nicht mehr beachtet.

*Beispiel:* konischer Stab mit kreisförmigen Querschnitt, durch Zugkraft  $F$  belastet. Wie groß ist die Spannung  $\sigma_x$  an einem beliebigen Ort  $x$ ?



## 2.2 Dehnung

Ein unbelasteter Stab mit konstantem Querschnitt habe die Länge  $l$ . Wirkt an seinem Ende eine Zugkraft, dann verlängert er sich um  $\Delta l$ .



Das Verhältnis von Längenänderung zur Ausgangslänge wird als Dehnung  $\varepsilon$  bezeichnet :  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  ( $\varepsilon$  ist dimensionslos)

Diese Definition gilt nur, wenn  $\varepsilon$  konstant über die Stablänge ist. Ist die Querschnittsfläche  $\neq \text{const}$  und/oder  $N \neq \text{const}$ , so ist die Dehnung ortsabhängig:

## 2.3 Stoffgesetz ( Hook'sches Gesetz ) und Werkstoffkennwerte

Verformungsgrößen und Kraftgrößen sind miteinander verknüpft. Die Beziehung zwischen ihnen heißt Stoffgesetz. Das Stoffgesetz ist abhängig von dem verwendeten Werkstoff und wird aus Experimenten bestimmt.

$\sigma$  und  $\varepsilon$  werden in einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm dargestellt.

**Wichtige Punkte der  $\sigma$ - $\varepsilon$  Kennlinie:**

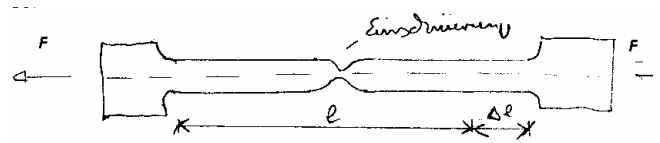
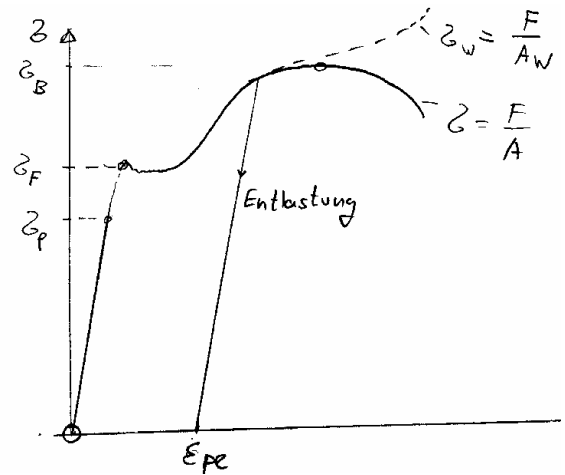
*Proportionalitätsgrenze  $R_p = \sigma_p$ :* Bis  $R_p$  wachsen Spannungen und Dehnungen proportional, d.h. es besteht ein linearer Zusammenhang zw.  $\sigma$  und  $\varepsilon$ .

*Streckgrenze, Fließgrenze  $f_y = R_e = \sigma_f$ :* Von  $R_p$  bis zu  $R_e$  wachsen die Dehnungen überproportional.

Bei Überschreiten der Fließgrenze nehmen die Dehnungen bei praktisch gleichbleibenden Spannungen zu: der Werkstoff fließt.

*Verfestigungsbereich:* Anschließend steigt die Kurve wieder an, d.h. der Werkstoff kann weitere Belastung aufnehmen.

*Brucheinschnürung:* Bei sehr hohen Spannungen unterhalb der Bruchgrenze schnürt sich der Stab an der Bruchstelle ein.



$f_u = R_m = \sigma_b$  : *Bruchgrenze:* der Stab bricht

*Elastisches Materialverhalten:* Nach Belastung  $\sigma < R_p$  und anschließender Entlastung nimmt der Stab seine ursprüngliche Länge wieder ein.

*Plastisches Materialverhalten:* Bei Belastung über  $R_e$  hinaus geht bei Entlastung die Dehnung nicht auf 0 zurück, sondern die Entlastungskurve verläuft parallel zum Proportionalitätsbereich. Die verbleibende Dehnung heißt plastische Dehnung  $\varepsilon_{pl}$ .

(Bezeichnungen: DIN 50145 Zugversuch:  $R_e, R_p$ ; DIN 18800:  $f_y, f_u$ )

Festigkeitslehre-Vorlesung: *linear-elastisches Werkstoffverhalten* vorausgesetzt

d.h.: Spannungen bleiben unterhalb der Proportionalitätsgrenze  $R_p$

Werkstoffkennwerte:

**E : Elastizitätsmodul;** Kraft/Fläche, [N/m<sup>2</sup>]

Elastizitätsgesetz, Hookesches Gesetz: Zwischen Spannung und Dehnung besteht der lineare Zusammenhang ( Hooke 1635 - 1703):  $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Material	E [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\mu$	$\alpha_t$ [10 <sup>-6</sup> /°C]
Stahl			
Aluminium			
Beton			
Buchenholz, II Faser			
Fichte, senkr.			
Gußeisen			
Kupfer			

### Querkontraktionszahl $\mu$

Gleichzeitig mit den Längsdehnungen tritt eine Änderung des Durchmessers des Probestabes auf, die *Querdehnung*  $\varepsilon_q$  bezeichnet wird:

$$\varepsilon_q =$$

$\mu$  [-] kann nicht größer als 0,5 sein, da das Volumen eines gezogenen Körpers nie abnehmen kann.

=> Obwohl Zug nur in einer Richtung aufgebracht wird, treten Dehnungen in allen Richtungen auf !

### Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha_t$

Dehnungen werden auch durch Temperaturänderungen hervorgerufen. Die Längenänderung  $\varepsilon_t$  ist dabei proportional zur Temperaturänderung  $\Delta T$ .

$$\varepsilon_t = \alpha_t [1/^\circ\text{C}]$$

Gesamte Stabdehnung :

$$\varepsilon =$$

**Beispiel:**



### 3. Der ebene Spannungszustand

Aus einem Stab wird ein infinitesimal kleines Element mit der Länge  $dx$  und der Höhe  $dz$  herausgeschnitten.

Die Kantenlängen  $dx$  und  $dz$  sind so klein, daß die Spannungen und die Blechdicke  $t$  als konstant über die Kantenlängen betrachtet werden können.

4 unbekannte Spannungen treten auf :  $\sigma_z, \sigma_x, \tau_{xz}, \tau_{zx}$

$$\text{Spannungsmatrix : } S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Wdh:            1. Index : Normalenrichtung der Schnittfläche  
                  2. Index : Wirkungsrichtung der Spannung

#### 3.1 Symmetrie der Spannungsmatrix

Momentengleichgewicht um den Schwerpunkt des Elements ergibt :

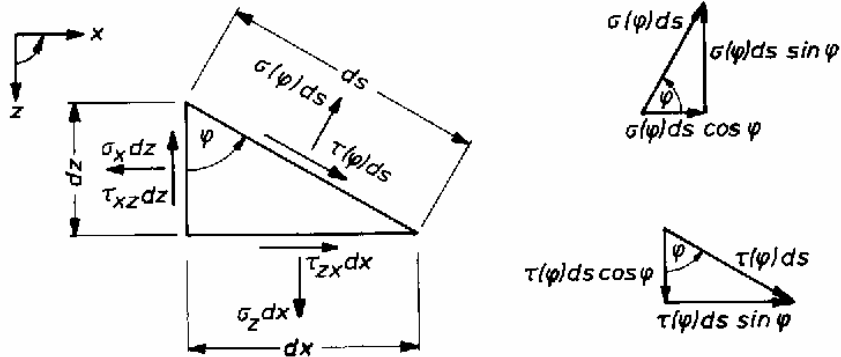
Regel: Die Schubspannungen in zwei senkrecht aufeinander stehenden Schnitten sind gleich. Sie sind beide auf die gemeinsame Schnittkante zu oder von ihr weg gerichtet.

=> es gibt in der Ebene nur 3 unbekannte Spannungen !

### 3.2 Drehung des Koordinatensystems

Gesucht ist der Spannungsvektor  $\underline{s} = (\sigma_{(\varphi)}, \tau_{(\varphi)})$  in einer beliebigen Schnittfläche.

Dicke des Blechs:  $t = 1$



Von der z-Achse aus ist  $\varphi$  im Gegenuhrzeigersinn positiv.

Gleichgewichtsbedingungen :

Mit  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  ;  $dx = ds \cdot \sin \varphi$  ;  $dz = ds \cdot \cos \varphi$  und Division durch  $ds$  ergibt sich:

1. Gl. mit  $\sin \varphi$ , 2. Gl. mit  $\cos \varphi$  multiplizieren ; Gleichungen addieren:

Mit :

wird daraus:

Analog ergibt sich nach Subtraktion der 1. und 2. Gleichungen (oben):

### 3.3 Hauptspannungen

#### *Hauptnormalspannungen*

Die Spannungen  $\sigma_\varphi$  und vom Schnittwinkel  $\varphi$  ab. Bei einem zu bestimmenden  $\varphi^*$  stellen sich dabei Extremalwerte (=Hauptspannungen) ein.

Bedingung :

Mit

ergibt sich aus der Ableitung der Formel für  $\sigma_\varphi$

Wg.  $\tan(\varphi)=\tan(\varphi+\pi/2)$  ergeben sich zwei senkrecht aufeinander stehende Hauptrichtungen zu  $\varphi^*$  und  $(\varphi^*+\pi/2)$  .

Die beiden mit  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  bezeichneten Hauptnormalspannungen erhält man - nach einigen Umformungen - durch Einsetzen von  $\varphi^*$  in die Gleichung für  $\sigma_\varphi$  :

Addiert man die beiden Formeln für  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , so erhält man

Einsetzen von  $\varphi^*$  in die Formel  $\tau_\varphi$  ergibt nach Zwischenrechnung :  $\tau_\varphi(\varphi^*) = 0$

Für Schnittwinkel, die zu den Hauptnormalspannungen führen, werden die Schubspannungen 0 !
--

*Hauptschubspannungen* = Extremalwerte der Schubspannungen

Bedingung :  $d\tau_\varphi / d\varphi = 0$  liefert nach Zwischenrechnungen den Winkel  $\varphi=\varphi^{**}$ , bei dem die Hauptschubspannungen auftreten :

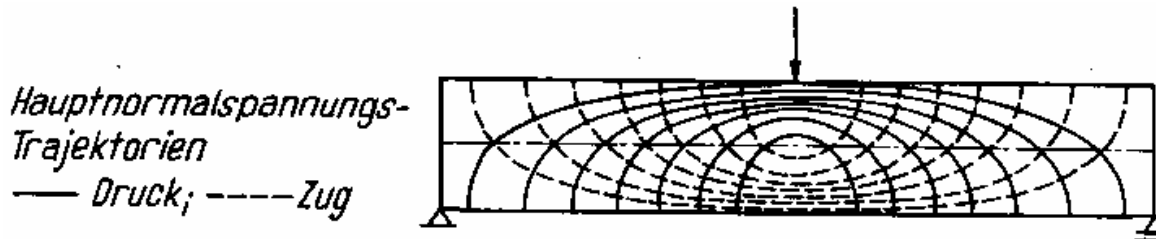
$\varphi^{**}$  steht immer in einem Winkel von  $45^\circ$  zu den Hauptachsen.

Durch Einsetzen der Gleichung in die Gleichung für  $\tau_\varphi$  ergibt sich nach Zwischenrechnungen die maximale Schubspannung zu :

Für die Hauptschubspannungsrichtungen sind die zugehörigen Normalspannungen:

### Hauptspannungstrajektorien

Kurven, deren Tangentenrichtungen den jeweils örtlichen Verlauf der Hauptspannungsrichtungen wiedergeben. Da  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  senkrecht zueinander stehen, schneiden sie sich im rechten Winkel.



Die Trajektorien haben z.B. Bedeutung für die Lage der Spannglieder beim Spannbeton.

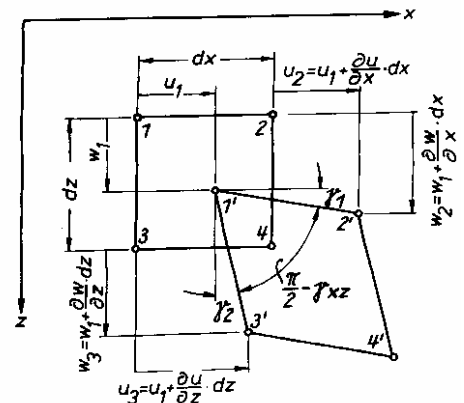
### 3.4 Verformungen in der Ebene

Verformungen und Spannungen treten immer gemeinsam auf, sie bedingen sich gegenseitig.

Wie auch die Spannungen, können Dehnungen und Gleitungen an jedem Punkt des Körpers unterschiedlich sein. Für die Dehnungen gilt :

$$\epsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_z = \frac{w_3 - w_1}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$



$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_1 + \gamma_2$$

Wie auch die Spannungen werden die Verzerrungen als tensorielle Größen bezeichnet, die deshalb den gleichen Transformationsbeziehungen gehorchen.

Ersetzt man in den Formeln für die Koordinatensystemdrehung und Hauptwerte der Spannungen  $\sigma_x$  durch  $\varepsilon_x$ ;  $\sigma_z$  durch  $\varepsilon_z$ ;  $\tau_{zx}$  durch  $\frac{1}{2} \gamma_{zx}$ , ergibt sich

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_z) + \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_z) \cdot \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \gamma_{xz} \cdot \sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{2} \gamma_\varphi = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_z) \cdot \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \cdot \cos 2\varphi$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz}\right)^2}$$

Diese Beziehungen sind z.B. bei der Auswertung von Dehnmeßstreifen-Meßergebnissen wichtig.

### 3.5 Das Hookesches Gesetz

a) Zusammenhang zwischen Dehnung  $\varepsilon$  und Spannung  $\sigma$

Die Verzerrungen in einem Bauteil sind von dessen Belastung abhängig. Für einen Zugstab gilt (s.o.):  $\varepsilon_x = \sigma_x / E$

Neben der Längsdehnung lassen auch in den beiden dazu senkrechten Richtungen Dehnungen beobachten, die als Querdehnung bezeichnet werden :

$$\varepsilon_z =$$

d.h.: ein eindimensionaler Spannungszustand ruft einen räumlichen Verzerrungszustand hervor !

Allgemeine Form des Hookschen Gesetzes:

Der Zusammenhang zwischen Schubspannungen und Gleitungen läßt sich experimentell ermitteln :

$G$  : Schubmodul; Stahl : 8100 kN/cm<sup>2</sup>

Es läßt sich zeigen, daß isotrope, elastische Werkstoffe nur durch 2 unabhängige Größen beschrieben werden. Es gilt :

### 3.6 Die Vergleichsspannung

Zugstab, einachsiger Spannungszustand: Versagen (Fließen), wenn  $\sigma_x = \sigma_f = f_{yk}$

Ebener Spannungszustand: alle 3 Spannungen tragen zum Erreichen des Grenzstandes bei. Bei welchen gleichzeitig wirkenden Werten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  versagt das Bauteil?

Kann man die beim Zugversuch ermittelten Beanspruchbarkeiten  $f_y$  in Beziehung setzen zum Fließbeginn beim ebenen Spannungszustand?

Aus den unterschiedlichen Spannungsarten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  wird ein theoretischer Vergleichswert  $\sigma_v$  berechnet, der das Bauteil genauso stark beansprucht, wie die gleichgroße Zugspannung einen Zugstab. Dieser Wert wird Vergleichsspannung genannt.

Das Bauteil beginnt zu fließen, wenn gilt :

$$\sigma_v \leq \sigma_f$$

Bei Werkstoffen, die nicht fließen können, wird die gleiche Überlegung auf den Bruchzustand angewandt.

Eine Vorschrift zur Berechnung von  $\sigma_v$  wird Festigkeitshypothese genannt.

#### a) Hypothese der größten Normalspannung (Rankine 1858)

Es wird angenommen, daß die größte Normalspannung für das Versagen maßgebend ist :

Anwendung: Bei sprödem Material (z.B. Glas, Keramik) unter überwiegender Zugbeanspruchung.

#### b) Hypothese der größten Schubspannung (Tresca 1864)

- $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  haben das unterschiedliche Vorzeichen

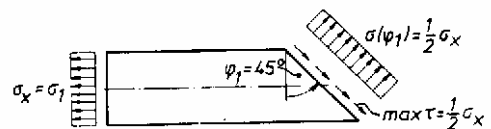
Die Materialbeanspruchung wird durch die größte Schubspannung charakterisiert, die für den ebenen Spannungszustand ist:

$$\tau_{max} =$$

In einem Zugstab mit  $\sigma = \sigma_v$  treten die maximalen Schubspannungen unter  $45^\circ$  auf:

$$\tau_{max} =$$

Gleichsetzen liefert :

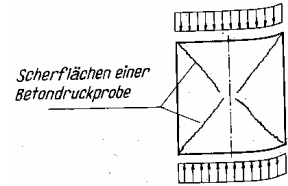


bzw.  $\sigma_v = 2 \cdot \tau_{max} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}$ , wenn nicht  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , sondern  $\sigma_x$  und  $\sigma_z$  bekannt sind.

- Haben  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  das gleiche Vorzeichen, gilt :  $\sigma_v =$

Allgemein gilt:  $\sigma_v =$

Anwendung: Werkstoffe mit ausgeprägtem Fließverhalten und spröde Werkstoffe mit überwiegender Druckbeanspruchung (Bsp.: Druckversuch mit einem Betonwürfel; Bruch unter  $45^\circ$ )



### ***c) Hypothese der Gestaltänderungsenergie (Huber 1904, v.Mises 1913)***

(Vergleichsspannung nach v.Mises)

Formänderung eines Körpers = Volumenänderung + Gestaltänderung

Es wird angenommen, daß nur diejenigen Energieanteile, die zur Gestaltänderung führen, charakteristisch für das Bauteilversagen werden. Ohne Herleitung wird angegeben :

Diese Hypothese hat sich bei metallischen Werkstoffen bewährt und wird deshalb im Stahlbau allgemein verwendet.

Vergleich der drei Hypothesen im  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  Diagramm :

Der Begriff der Vergleichsspannung ist sinnvoll bei homogenen, isotropen Werkstoffen, er ist jedoch nicht anwendbar für Verbundmaterialien (z.B. CFK, GFK, Holz)

## Flächenträgheitsmomente

### Definition

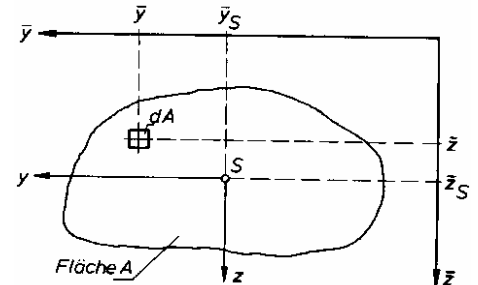
$$I_y = \int z^2 dA \quad I_z = \int y^2 dA \quad I_{yz} = \int y \cdot z \cdot dA$$

### Steiner'scher Satz

Das Koordinatensystem  $y$ - $z$  wird vom Schwerpunkt aus an einen beliebigen Punkt parallelverschoben

$$I_{\bar{z}} = I_z + \bar{y}_s^2 \cdot A \quad I_{\bar{y}} = I_y + \bar{z}_s^2 \cdot A$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} + \bar{z}_s \cdot \bar{y}_s \cdot A$$



### Drehung des Koordinatensystems um den Winkel $\varphi$

$$I_{\eta} = \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{1}{2}(I_y - I_z) \cdot \cos 2\varphi - I_{yz} \cdot \sin 2\varphi$$

$$I_{\zeta} = \frac{1}{2}(I_y + I_z) - \frac{1}{2}(I_y - I_z) \cdot \cos 2\varphi + I_{yz} \cdot \sin 2\varphi$$

$$I_{\eta\zeta} = \frac{1}{2} \cdot (I_y - I_z) \cdot \sin 2\varphi + I_{yz} \cdot \cos 2\varphi$$

### Hauptträgheitsmomente / Querschnittshauptachsen

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

### Berechnung zusammengesetzter Flächen

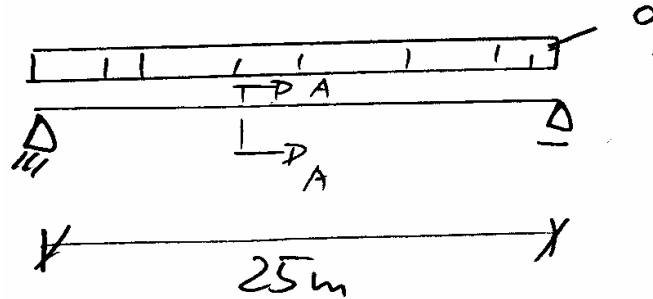
$$I_y = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} z^2 dA = \sum_{i=1}^n I_{yi} + z_i^2 A_i$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} y^2 dA = \sum_{i=1}^n (I_{zi} + y_i^2 A_i)$$

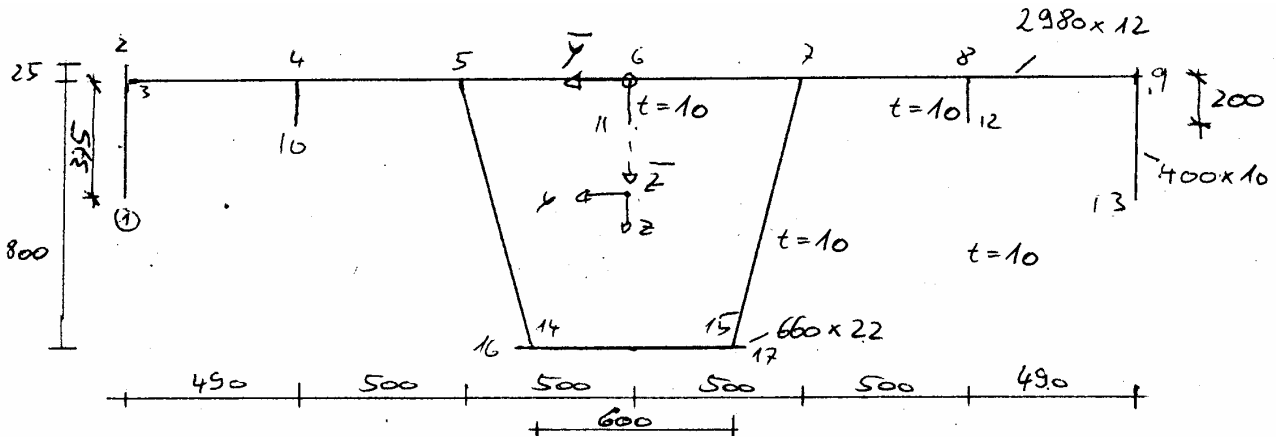
$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} yz dA = \sum_{i=1}^n (I_{yzi} + y_i z_i A_i)$$



Beispiel: Fußgängerbrücke mit dünnwandigem Querschnitt  
 geg.: Einfeldträger  $l = 25$  m; Achsmaße des Querschnitts



Schnitt A-A:



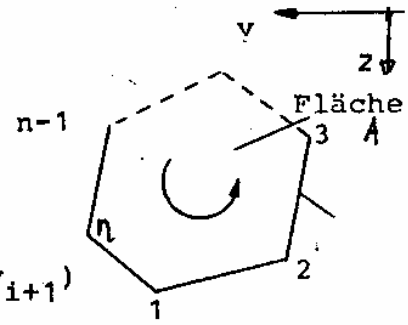
gesucht: Spannungen infolge der Verkehrslast  $q = 5$  kN/m<sup>2</sup>

benötigte Querschnittswerte:

i	$b_i$	$t_i$	$A_i$	$\bar{z}_{si}$	$\bar{z}_{si} \cdot A_i$	$\bar{z}_{si}^2 \cdot A_i$	$I_{y,i}$
	cm	cm	cm <sup>2</sup>	cm	cm <sup>3</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							

Summe:

### Flächenträgheitsmomente mit dem Gaußschen Integralsatz

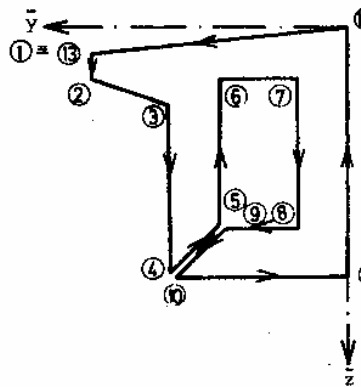
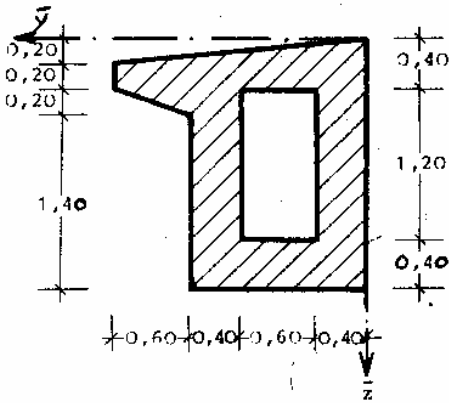


$$A = \iint_{(A)} dy dz = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - z_i y_{i+1})$$

$$I_y = \iint_{(A)} z^2 dy dz = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - z_i y_{i+1}) * (z_i^2 + z_i z_{i+1} + z_{i+1}^2)$$

$$I_z = \iint_{(A)} y^2 dy dz = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - z_i y_{i+1}) * (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2)$$

$$I_{yz} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - z_i y_{i+1}) * (2y_i z_i + y_i z_{i+1} + z_i y_{i+1} + 2y_{i+1} z_{i+1})$$



i	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$	$\bar{y}_i \bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i \bar{y}_{i+1}$		
(a)	(b)	(c)	m <sup>2</sup>		
			(d)	(e)	
1	2,00	0,20	0,800	-0,400	0,400
2	2,00	0,40	1,200	-0,560	0,640
3	1,40	0,60	2,800	-0,840	1,960
4	1,40	2,00	2,240	-2,000	0,240
5	1,00	1,60	0,400	-1,600	-1,200
6	1,00	0,40	0,300	-0,160	0,240
7	0,40	0,40	0,640	-0,160	0,400
8	0,40	1,60	0,640	-1,600	-0,960
9	1,00	1,60	2,000	-2,240	-0,240
10	1,40	2,00	2,300	-0	2,600
11	0,00	2,00	0	-0	0
12	0,00	0,00	0	-0	0
13	2,00	0,20			
			2A	=	4,360
			A	=	2,180

$\bar{z}_i + \bar{z}_{i+1}$	$\bar{y}_i + \bar{y}_{i+1}$	$(f)^2 - \bar{z}_i \bar{z}_{i+1}$	$(e) \cdot (k)$	$(h)^2 - \bar{y}_i \bar{y}_{i+1}$	$(e) \cdot (m)$	$(f) \cdot (h) + \bar{y}_i \bar{z}_i + \bar{y}_{i+1} \bar{z}_{i+1}$	$(e) \cdot (c)$
m	m	m <sup>2</sup>	m <sup>4</sup>	m <sup>2</sup>	m <sup>4</sup>	m <sup>2</sup>	m <sup>4</sup>
(f)	(h)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)	(p)
0,60	4,00	0,360 - 0,080	0,112	16,000 - 4,000	4,800	2,400 + 0,400 + 0,800	1,440
1,00	3,40	1,000 - 0,240	0,486	11,560 - 2,800	5,606	3,400 + 0,800 + 0,840	3,226
2,60	2,80	6,760 - 1,200	10,898	7,840 - 1,960	11,525	7,280 + 0,840 + 2,800	21,403
3,60	2,40	12,960 - 3,200	2,342	5,760 - 1,400	1,046	8,640 + 2,800 + 1,600	3,130
2,00	2,00	4,000 - 0,640	-4,032	4,000 - 1,000	-3,600	4,000 + 1,600 + 0,400	-7,200
0,30	1,40	0,640 - 0,160	0,115	1,960 - 0,400	0,374	1,120 + 0,400 + 0,160	0,403
2,00	0,80	4,000 - 0,640	1,613	0,640 - 0,160	0,230	1,600 + 0,160 + 0,640	1,152
3,20	1,40	10,240 - 2,560	-7,373	1,960 - 0,400	-1,498	4,480 + 0,640 + 1,600	-6,451
3,60	2,40	12,960 - 3,200	-2,342	5,760 - 1,400	-1,046	8,640 + 1,600 + 2,800	-3,130
4,00	1,40	16,000 - 4,000	33,600	1,960 - 0	5,488	5,600 + 2,800 + 0	23,520
2,00	0	4,000 - 0	0	0 - 0	0	0 + 0 + 0	0
0,20	2,00	0,400 - 0	0	4,000 - 0	0	0,400 + 0 + 0,400	0
		12I <sub>y</sub> =	35,419	12I <sub>z</sub> =	22,925	24I <sub>yz</sub> =	37,493
		I <sub>y</sub> =	2,952	I <sub>z</sub> =	1,913	I <sub>yz</sub> =	1,562

## Schiefe Biegung mit Swainscher Formel

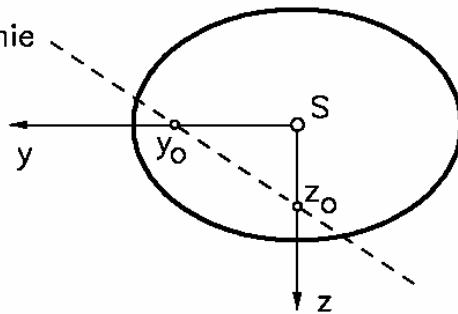
$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z \cdot I_y + M_y \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y \cdot I_z + M_z \cdot I_{yz}}{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2} \cdot z$$

### Spannungsnulllinie

$$y_0 = \frac{N}{A} \cdot \frac{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2}{M_z \cdot I_y + M_y \cdot I_{yz}}$$

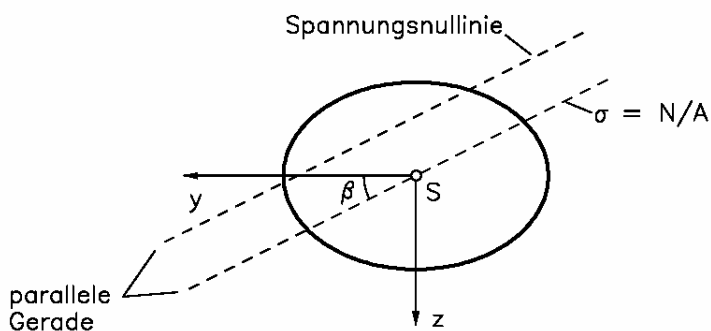
$$z_0 = -\frac{N}{A} \cdot \frac{I_y \cdot I_z - I_{yz}^2}{M_y \cdot I_z + M_z \cdot I_{yz}}$$

### Spannungsnulllinie



### Winkel der Spannungsnulllinie

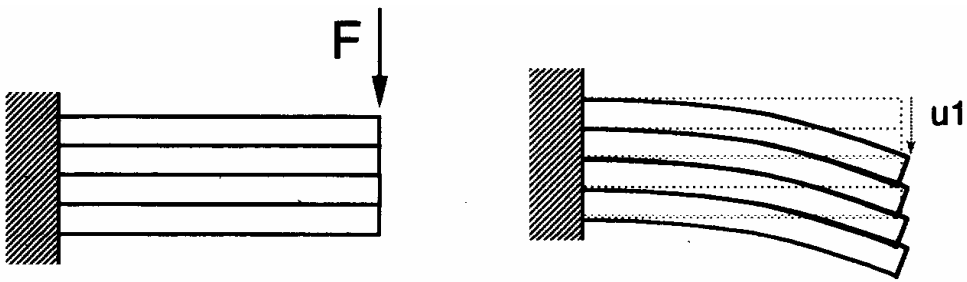
$$\tan \beta = \frac{z}{y} = \frac{M_z \cdot I_y + M_y \cdot I_{yz}}{M_y \cdot I_z + M_z \cdot I_{yz}}$$



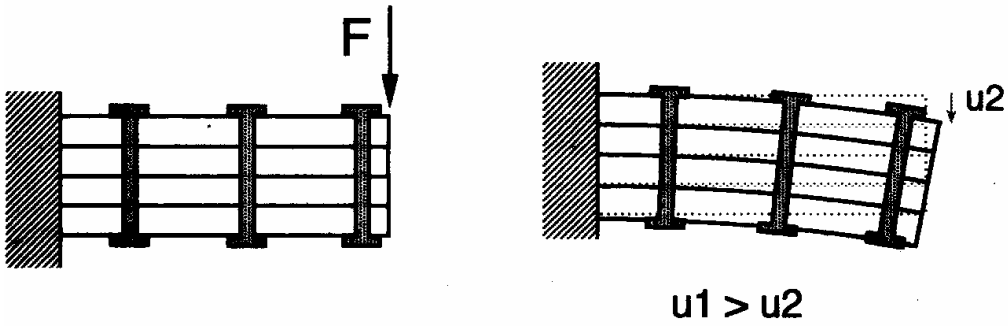
## **5. Schubspannungen infolge Querkraft**

Die Wirkung von Querkraftschubspannungen läßt sich durch Vergleich der beiden Verformungsbilder erkennen:

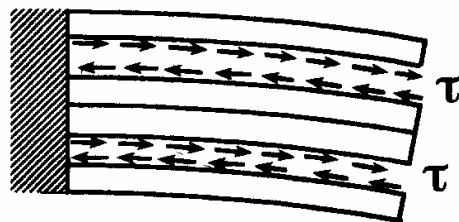
a) Schubspannungen können in den Fugen nicht übertragen werden



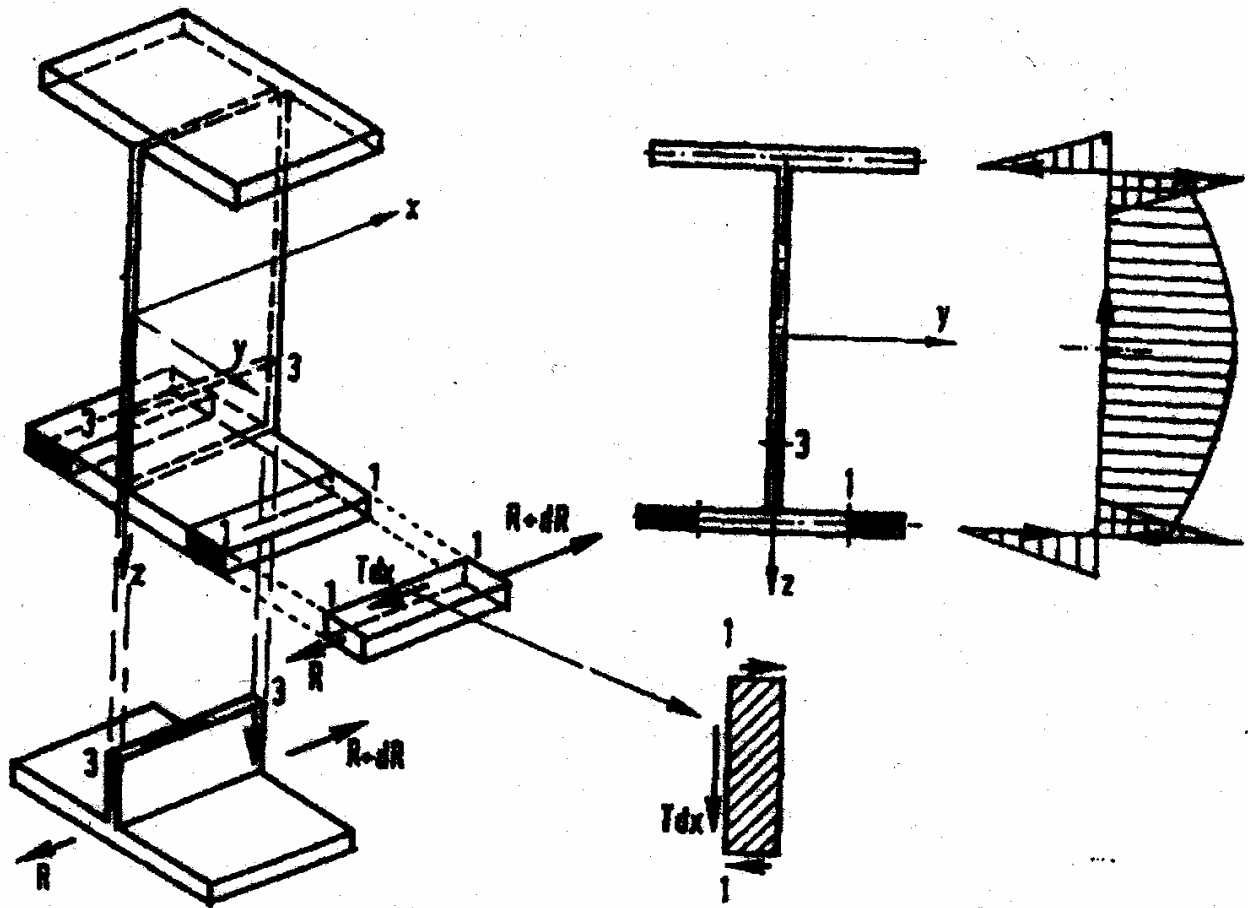
b) Schubsteifer Verbund



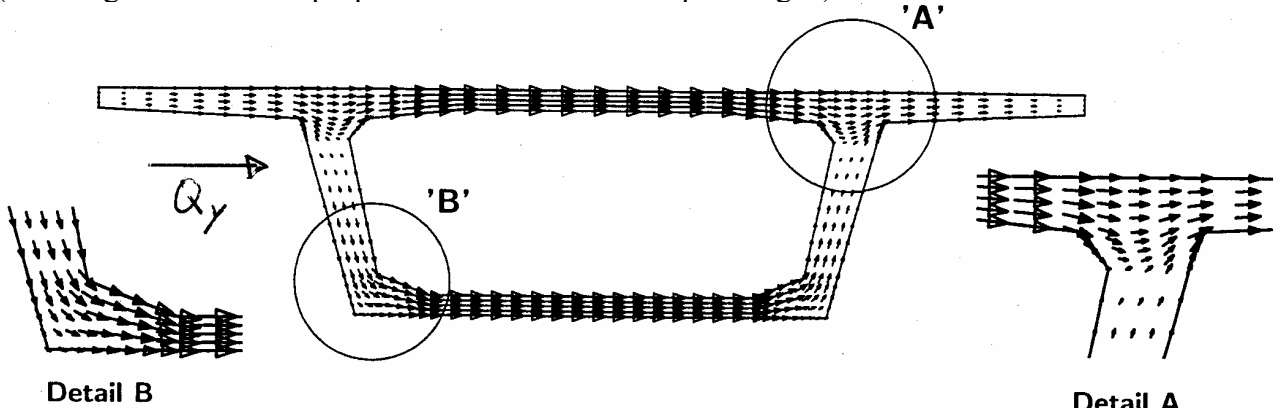
Zuggurt, Verlängerung



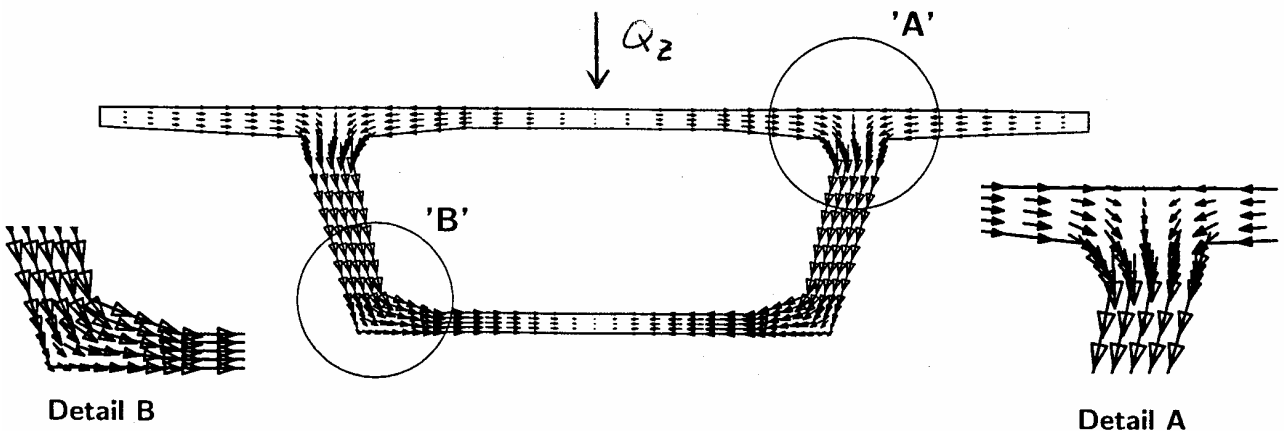
Druckgurt, Verkürzung



Plot der resultierenden Schubspannungen für den Kastenquerschnitt für  $Q_y = 1$   
 (die Länge der Pfeile ist proportional zur Größe der Spannungen)



Plot der resultierenden Schubspannungen für den Kastenquerschnitt für  $Q_z = 1$

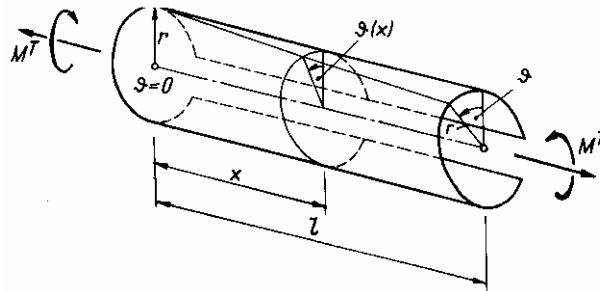


## 6. Torsion

Ein Balken wird auf Torsion beansprucht, wenn in der Ebene senkrecht zur Balkenachse ein Kräftepaar angreift.



1. *Auswirkung* : Verwindung der Querschnitte um den Winkel  $\vartheta(x)$



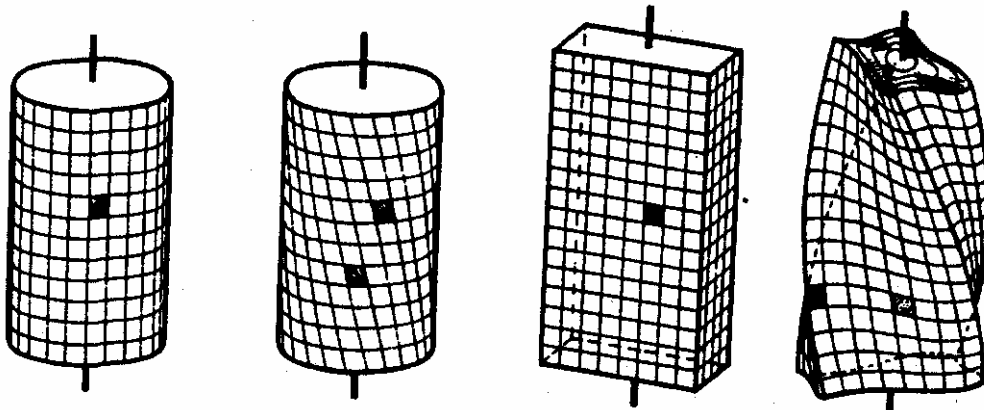
Die Endquerschnitte eines Stabelements  $dx$  sind um den Winkel  $d\vartheta$  gegeneinander verdreht.

Die Veränderung des Drehwinkels  $\vartheta$  wird als Verdrillung bezeichnet :

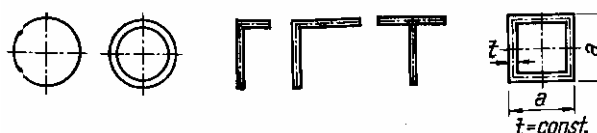
$$\text{Verdrillung} = \frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta'$$

2. *mögliche Auswirkung der Torsion* : Verwölbung der Querschnitte

=> Querschnitte sind nicht mehr eben (zeigen an einem geschlitzten Rohr aus Papier)



Wölbfrei oder quai-wölbfrei sind u.a. folgende Querschnitte :



Schneiden sich 2 schmale Rechtecken in 1 Punkt, so liegt ein quasi-wölbfreier Querschnitt vor ( $t$  muß nicht const. sein)

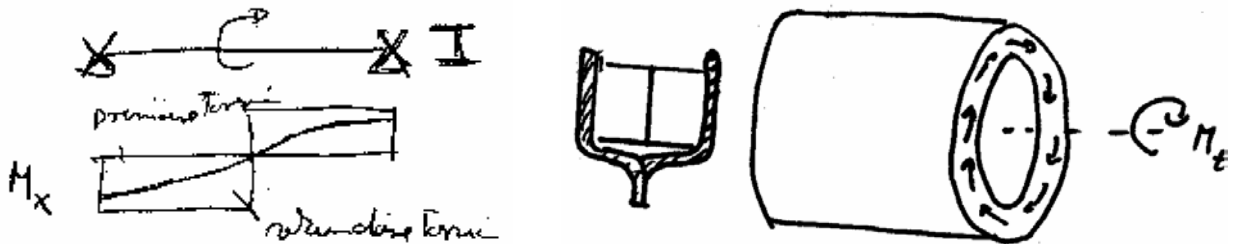
2 Arten von Torsion :

a) *St. Venantsche Torsion* oder *freie Torsion* oder *primäre Torsion* :

- Nur Schubspannungen werden verursacht

b) *Wölbkrafttorsion* oder *sekundäre Torsion* (siehe 7. Semester)

- es entstehen Normalspannungen (infolge der behinderten Verwölbung)
- immer dann, wenn die Verwölbung behindert ist, tritt Wölbkrafttorsion zusätzlich zur St. Venantschen Torsion auf.
- Kann niemals ohne St. Venantsche Torsion auftreten.



Wann liegt nur St. Venantsche Torsion, aber keine Wölbkrafttorsion vor ?

- bei wölbfreien Querschnitten immer
- bei nicht wölbfreien Querschnitten nur, wenn die Verwölbung nirgendwo behindert ist und gleichzeitig  $M_x = \text{const.}$  Dies setzt an den Auflagern Gabelagerung voraus.

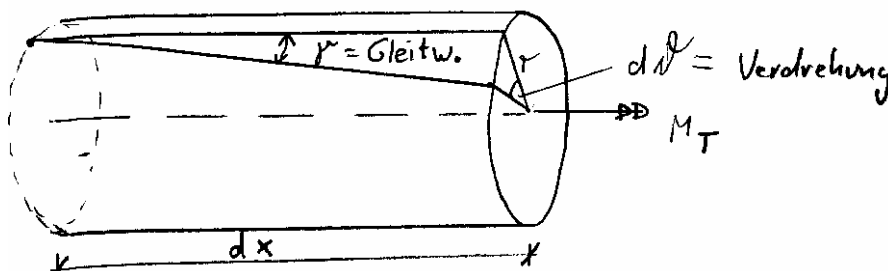
Im folgenden wird ausschließlich die St. Venantsche Torsion behandelt!

### 6.1 Torsion eines kreisförmigen Stabquerschnitts

Stab mit Kreisquerschnitt,  $R = \text{const.}$ , Belastung:  $M_T$ ; Schnittgröße  $M_x = M_T$

Verdrehung  $d\vartheta$  der um  $dx$  benachbarten Querschnitte gegeneinander ( $\vartheta$  positiv rechts-drehend). Zwischen  $d\vartheta$  und dem Gleitwinkel  $\gamma$  besteht der Zusammenhang :

$$r d\vartheta = \gamma dx \quad \Rightarrow \quad \gamma = r * d\vartheta / dx$$



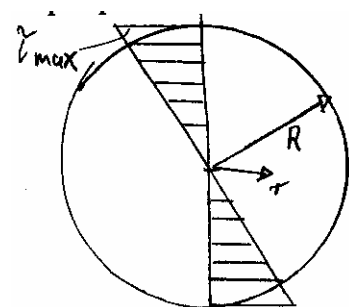
Das Hook'sche Gesetz verknüpft den Gleitwinkel  $\gamma$  mit der Schubspannung  $\tau$ .

$$\tau = G \gamma = G r d\vartheta / dx = G r \vartheta'$$

$\tau$  ist also proportional zum Abstand von der Stabachse.

$\tau$  verursacht ein Torsionsmoment, das genau dem im Schnitt wirkenden Torsionsmoment entsprechen muß :

$$M_x = \int r \tau dA$$





Mit  $\tau = G \gamma = G r \vartheta'$  :

$$\begin{aligned} M_x &= G \vartheta' \int r^2 dA \\ &= G \vartheta' I_T \end{aligned}$$

$$\text{Kreiswelle : } I_T = \int r^2 dA = \pi/2 R^4$$

Die Größe  $I_T$  wird Torsionsträgheitsmoment genannt.

Allgemein gilt :

$$\boxed{\vartheta' = M_x / G I_T}$$

Die Endverdrehung eines einseitig eingespannten Stabes der Länge  $l$  ist

$$\vartheta_l = \int_0^l \vartheta' dx \quad \rightarrow \quad \vartheta_l = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot I_T}$$

Schubspannungsverteilung (aus umrahmter Formel  $\vartheta'$  eliminieren)

$$\tau = G \cdot r \cdot \vartheta' = G \cdot r \frac{M_x}{G \cdot I_T} = r \frac{M_x}{I_T}$$

Der Größtwert tritt am Rand mit  $r = R$  auf .

Alle Formeln gelten auch für den Kreisringquerschnitt mit :

$$I_T = \frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4)$$

**Bsp.:**

geg.: Stabquerschnitt  $d = 100 \text{ mm}$  ;  $M_x = 400 \text{ kNcm}$

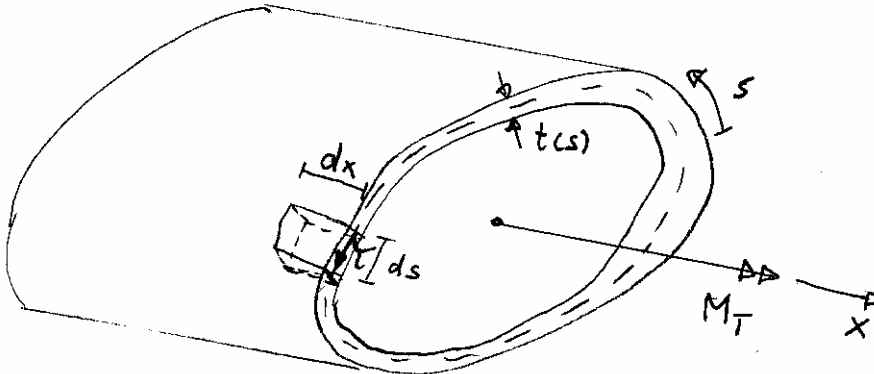
ges :  $I_T, \tau_T$

Für nicht kreisförmige Vollquerschnitte gilt allgemein:

- $\vartheta' = M_x / G I_T$
- $\max \tau = M_x / W_T$  ( $W_T$  siehe Schneider, 15. Aufl., S 4.30f)

## 6.2 Torsion dünnwandiger geschlossener Profile

- Annahmen :
- Querschnitt konstant
  - $M_x(x) = \text{const.}$
  - Wandstärke  $t(s)$  darf veränderlich sein ( $s$ =Umfangskoordinate)



(im Bild  $M_T$  durch  $M_x$  ersetzen)

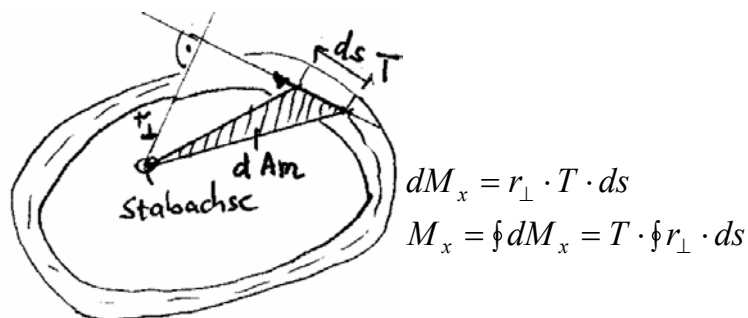
- Außen- und Innenflächen des Hohlzylinders sind belastungsfrei  
=> Spannungen an den Rändern müssen tangential verlaufen.
- Annahme:  $\tau$  ist über die Wanddicke gleichmäßig verteilt
- Schubfluß  $T$  [Kraft / Länge]  $T = \tau \cdot t$
- infinitesimales Rechteck ausschneiden :

Gleichgewichtsbedingung

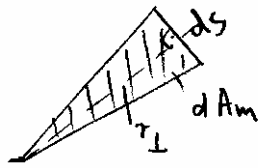
- $\Sigma V = 0$  : Schubfluß über  $x$  konstant ! ( $d T_{xz} = d T_{zx} = 0$ )
- $\Sigma H = 0$  der Schubfluß an jeder Stelle  $s$  des Querschnittes gleich ist. ( $T_{xz} = T_{zx}$ )

Berechnung der Schubspannung  $\tau$  :

Das Momentengleichgewicht liefert bezüglich der Stabachse :



Es gilt  $r_{\perp} \cdot ds = 2 \cdot dA_m$



Umlaufintegral :  $\oint r_{\perp} \cdot ds = 2 \cdot A_m$

$A_m$  : von der Mittellinie eingeschlossene Fläche

Es folgt : 1. Bredtsche Formel nach R. Bredt 1842 - 1900 :

$$\tau = \frac{T}{t} = \frac{M_x}{2 \cdot A_m \cdot t}$$

max  $\tau$  tritt an der Stelle der kleinsten Wanddicke min  $t$  auf.

$$\tau_{\max} = \frac{T}{t_{\min}} = \frac{M_x}{2 \cdot A_m \cdot t_{\min}} = \frac{M_x}{W_T}$$

mit Torsionswiderstandsmoment :  $W_T = 2 A_m t_{\min}$

### Berechnung der Verdrillung $\vartheta'$

Wie bei den Kreisquerschnitten gilt :

$$\tau / G = \gamma = r \vartheta'$$

Multiplikation mit  $ds$ , Integration über den Umfang  $s$  :

$$\frac{1}{G} \int_s \tau ds = \vartheta' \int_s r ds = \vartheta' \cdot 2A_m$$

Für  $\tau$  wird die 1. Bredt'sche Formel eingesetzt und nach  $\vartheta'$  aufgelöst

$$\vartheta' = \frac{M_x}{G \cdot 4 \cdot A_m^2} \cdot \int_s \frac{1}{t} ds$$

mit Einführung des Torsionsflächenmoments :

$$I_T = 4A_m^2 / \left( \int_s \frac{1}{t} ds \right)$$

wird daraus die 2. Bredt'sche Formel :

$$\vartheta' = \frac{M_x}{G \cdot I_T}$$

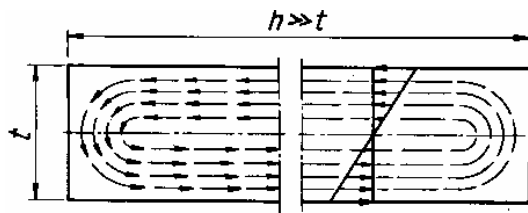
Bei Stahlbauquerschnitten ist die Blechdicke  $t_i$  i.d.R. abschnittsweise konstant :

$$I_T = 4A_m^2 / \left( \sum_i s_i / t_i \right)$$

### 6.3 Torsion dünnwandiger offener Profile

Schmaler Rechteckquerschnitt :

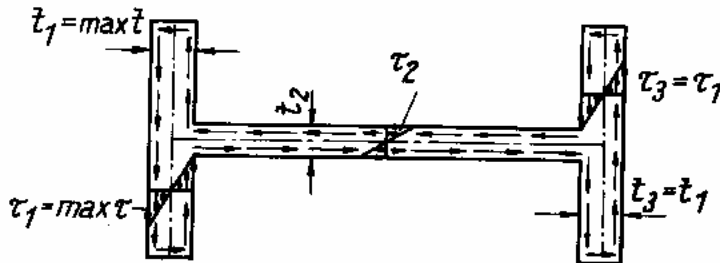
Schubspannungen fließen anders als bei geschl. Querschnitten



Faßt man den Querschnitt als die Summe einzelner sehr dünner Hohlquerschnitte auf, läßt sich zeigen :

$$I_T = \frac{1}{3} t^3 h$$

Aus mehreren Rechtecken zusammengesetzter Querschnitt(ohne Herleitung):



$$I_T = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n t_i^3 h_i$$

mit  $W_T = I_T / t_{\max}$  wird

$$\max \tau = \frac{M_x}{W_T} = \frac{M_x \cdot t_{\max}}{I_T}$$

Für die Verdrillung gilt weiterhin :

$$\vartheta' = \frac{M_x}{G \cdot I_T}$$

## 6.4 Vorgehensweise bei der Berechnung von Torsionsaufgaben

- a) *Querschnitte, die in Querschnittstabellen enthalten sind* (z.B. Schneider 4.30)  
 $I_T$ ,  $W_T$  mit in Tabelle angegebenen Formeln berechnen.

$$\max \tau = \frac{M_x}{W_T} \quad \vartheta' = \frac{M_x}{G \cdot I_T} \quad \text{für } \vartheta' = \text{const} \text{ gilt: } \vartheta = \vartheta' \cdot l$$

- b) *geschlossene Querschnitte*

max  $\tau$  an der dünnsten Querschnittsstelle !!!

$$\tau = \frac{T}{t} = \frac{M_x}{2 \cdot A_m \cdot t} \quad \tau_{\max} = \frac{M_x}{2 \cdot A_m \cdot t_{\min}} \quad \vartheta' = \frac{M_x}{G \cdot I_T}$$

$$I_T = 4A_m^2 / \left( \sum_i s_i / t_i \right)$$

$$W_T = 2 \cdot A_m \cdot t_{\min}$$

- c) *Offene Querschnitte*

max  $\tau$  an der dicksten Querschnittsstelle !

$$I_T = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n t_i^3 h_i \quad \max \tau = \frac{M_x}{W_T} = \frac{M_x \cdot t_{\max}}{I_T} \quad \vartheta' = \frac{M_x}{G \cdot I_T}$$

$$W_T = I_T / t_{\max}$$

- d) Noch nicht berechenbar mit den vorliegenden Formeln sind ...

- Querschnitte, (die nicht verwölbungsfrei sind) **und** (die gleichzeitig in ihrer freien Verwölbung verhindert sind **oder** für die gilt:  $M_x \neq \text{const}$ )
- Vollquerschnitte, die nicht tabelliert sind (Grund: aufwendige Dgl zu lösen, Seifenhautgleichnis)
- Mehrzellige Hohlquerschnitte (Grund : statisch unbestimmtes Problem)