§02. Laplace-Wahrscheinlichkeit

1. Wahrscheinlichkeitsmaß und –verteilung (axiomatisch)

Definition:
Eine Funktion P: $A \mapsto P(A)$ mit $A \in \wp(\Omega)$ und $P(A) \in \mathbb{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn sie folgende Eigenschaften (Axiome von Kolmogorow) erfüllt:
1. Für ein beliebiges Ereignis gilt: $P(A) \geq 0$ (Nichtnegativität)
2. Für das sichere Ereignis gilt: $P(\Omega) = 1$ (Normiertheit)
3. Für zwei unvereinbare Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Man nennt diese Zahl P(A) „Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A“.

Definition:
Sei $\{A_1, A_2; ... A_m\}$ eine Zerlegung von Ω (d.h. $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ mit unvereinbaren Ereignissen $A_1, A_2; ... A_m$).
Die Funktion P: $A \mapsto P(A_i)$ mit i = 1; 2; ... ; m heißt *Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zerlegung*.

Beispiele: *Werfen eines Laplace-Würfels (idealer W.)*

ω	1	2	3	4	5	6
P({ω})	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Werfen einer L-Münze:

ω	K	Z
P({ω})	½	½

Glücksrad

ω	G (grün)	B (blau)	R (Rot)
P({ω})	½	¼	¼

2. Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Definition:
Ein stochastisches Experiment heißt *Laplace-Experiment*, wenn alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

Für Laplace-Experimente gilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen gleichwahrscheinlichen Ergebnisse}}$$

Eigenschaften für Wahrscheinlichkeiten:

① $0 \leq P(A) \leq 1$

② a) $P(A) = \Sigma P(\{\omega\})$ $(\omega \in A)$

Damit folgt für unvereinbare Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$:

②.b) $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... P(A_n)$ $(\omega \in A)$

③ $P(\emptyset) = 0$ ④ $P(\Omega) = 1$ ⑤ $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

⑥ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3. Vierfeldertafel

Die Eigenschaften kommen bei der *Vierfeldertafel* zur Anwendung:

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Beispiel

Im Kurs M_1 sind 22 Schüler.
A: „blonde Schüler“: $P(A)$ = ______
B: „Schüler, die ein Musikinstrument spielen“ $P(B)$ = _____
Außerdem ist gegeben: $P(A \cap B)$ = ______
Berechne mit einer Vierfeldertafel die restlichen relativen Häufigkeiten.

	A	$\overline{A}$	
B			
$\overline{B}$			