# Übungen zu den Grundlagen der Mechanik, WS 2015/16
# Hausaufgabenblatt 10

Dr. Anne Stockem Novo
Abgabe bis 26.01.2016, 8:30 Uhr, im Briefkasten gegenüber NB 7/67

## Aufgabe 10.1 (10 Punkte)

Betrachten Sie noch einmal eine punktförmige Perle der Masse $m$, die sich reibungsfrei entlang eines Drahtes bewegen kann. Der Draht rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ in der $x$-$y$-Ebene um den Ursprung. In Hausaufgabe 6.2 wurde bereits gezeigt, dass die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\varrho, \dot{\varrho}) = \frac{1}{2} m (\dot{\varrho}^2 + \omega^2 \varrho^2)$$

lautet, sofern die Gravitation vernachlässigt wird. Die generalisierte Koordinate $\varrho$ ist in diesem Fall der Abstand der Perle vom Koordinatenursprung.

(a) Bestätigen Sie zunächst, dass die damals für die Anfangsbedingungen $\varrho(0) = R$ und $\dot{\varrho}(0) = 0$ gefundene Lösung $\varrho(t) = R \cosh(\omega t)$ die Lagrangesche Gleichung zweiter Art erfüllt.

(b) Dass die in (a) untersuchte Lösung die Lagrangesche Gleichung zweiter Art erfüllt, ist äquivalent dazu, dass sie von allen Funktionen $\varrho(t)$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten diejenige ist, für die das Wirkungsintegral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\; \mathcal{L}(\varrho, \dot{\varrho})$$

extremal wird. Um dies zu bestätigen, wird zu dieser Lösung eine Abweichung $A(t)$ hinzuaddiert, die am Anfangs- und Endpunkt verschwindet:

$$\varrho(t) = R \cosh(\omega t) + A(t)\,, \qquad \text{wobei } A(t_1) = A(t_2) = 0\,.$$

Bestimmen Sie das Wirkungsintegral $S$ für diese Bahnkurve und integrieren Sie den $(\sinh(\omega t) \dot{A})$-Term partiell, um zu zeigen, dass

$$S = \frac{1}{4} m R^2 \omega \sinh(2\omega t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\; (\dot{A}^2 + \omega^2 A^2)\,. \qquad (*)$$

*Hinweis:* Verwenden Sie die Relation $\sinh^2 x + \cosh^2 x = \cosh(2x)$ der Hyperbelfunktionen.

(c) Folgern Sie aus $(*)$, dass die bekannte Lösung $z = R \cosh(\omega t)$ die Bahnkurve ist, für die das Wirkungsintegral minimal wird.

*Hinweis:* Alle hier auftretenden Größen müssen reellwertig sein, dürfen also keine echt komplexen Werte annehmen.

*Bitte wenden!*

## Aufgabe 10.2 (10 Punkte)

Betrachten Sie einen starren Körper, der mit der (nicht notwendig konstanten) Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ rotiert. In der Vorlesung haben Sie bereits den Unterschied zwischen einem raumfesten und einem körperfesten Bezugssystem kennengelernt. Für die Zeitableitung eines beliebigen Vektors $\boldsymbol{G}$ gilt die Transformation

$$\dot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{R}} \equiv \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} \boldsymbol{G} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{K}} \boldsymbol{G} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G} \equiv \dot{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G}\,,$$

wobei die Indizes R und K für das raumfeste bzw. körperfeste System stehen. Hier ist unterstellt, dass der Ursprung beider Bezugssysteme identisch ist, so dass auch die Ortsvektoren in beiden Systemen gleich sind: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{K}} \equiv \boldsymbol{r}$.

(a) Wie transformiert sich die Winkelbeschleunigung $\dot{\boldsymbol{\omega}}$? Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}$ und $\boldsymbol{v}_{\mathrm{K}}$?

(b) Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus (a), um einen Zusammenhang zwischen den in beiden Bezugssystemen gemessenen Kräften $m\dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{R,K}}$ herzuleiten. Identifizieren Sie die auftretenden Scheinkräfte.

*Hinweis:* In rotierenden Bezugssystemen treten die folgenden Scheinkräfte auf: Die *Bahnbeschleunigungskraft* resultiert aus einer zeitlichen Änderung der Winkelgeschwindigkeit; die *Zentrifugalkraft* steht senkrecht auf der Rotationsachse und wirkt radial nach außen; die *Corioliskraft* tritt erst bei einer Bewegung der Masse auf und ist senkrecht orientiert sowohl zur Drehachse als auch zur Bewegungsrichtung.

(c) Beim Übergang vom System R ins System K handelt es sich um eine Punkttransformation. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen sind invariant unter solchen Punkttransformationen und die transformierte Lagrangefunktion ergibt sich einfach durch Einsetzen der neuen Koordinaten in die alte Lagrangefunktion.

Gehen Sie von der Lagrangefunktion $\mathcal{L}_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}^2 - V(\boldsymbol{r})$ aus und zeigen Sie durch Einsetzen der Geschwindigkeitstransformation $\boldsymbol{v}_{\mathrm{R}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{K}})$, dass die Lagrangefunktion im körperfesten Bezugssystem folgende Form besitzt:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_{\mathrm{K}}^2 - V(\boldsymbol{r}) + f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{K}})\,. \qquad (**)$$

Wie lautet der Zusatzterm $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{K}})$, der allein aufgrund der Rotation des Bezugssystems auftritt und somit die Scheinkräfte repräsentiert?

(d) Gehen Sie von der Darstellung (∗∗) aus und stellen Sie die zugehörige Bewegungsgleichung auf. Welche Terme drücken darin die Scheinkräfte aus?

*Hinweis:* Ersetzen Sie $f$ hier *nicht* durch den in (c) bestimmten Ausdruck, sondern lassen Sie $f$ als abstrakte Größe in den Gleichungen stehen.