

TIEFENMIGRATION

VON

D. RISTOW*), H. RISTOW*) UND W. HOUBA*)

Seismische Zeitsektionen sind eine graphische Darstellung der gemessenen Laufzeiten. Bei einfachen und flach gelagerten geologischen Strukturen haben sie eine entfernte Ähnlichkeit mit dem Schichtenbild des Untergrundes. Die zeitliche Darstellung komplizierter tektonischer Verhältnisse läßt jedoch eine unmittelbare Deutung kaum noch zu: z. B. geneigte Reflektoren sind verschoben, viele Diffraktionen überlagern sich zu einem schwer zu interpretierenden Gewirr von Einsätzen.

Die Aufgabe der Migration besteht darin, aus den gemessenen Laufzeiten ein maßstäbliches, d. h. im geometrischen Sinne ähnliches Bild des erfaßten Untergrundes mit seinen Strukturen zu rekonstruieren.

Das Ergebnis der Migration wird jedoch häufig im Zeitmaßstab dargestellt. Man ersetzt die Tiefenkoordinate z durch die vertikale Zeit

$$\tau = 2 \int_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)} \quad (1a)$$

wobei $c = c(z)$ eine dem Modell angepaßte Ersatzgeschwindigkeit ist. Die Darstellung in diesem x, τ -Bereich bietet einige Vorteile: Stapelsektionen und migrierte Sektion lassen sich besser „vergleichen“, der Frequenzinhalt bleibt nahezu erhalten, Multiple lassen sich eindeutig identifizieren.

Die Darstellung im Tiefenmaßstab erhält man durch einen Streckungs- bzw. Stauchungsprozeß einer jeden seismischen Spur unter Berücksichtigung der jeweiligen Geschwindigkeitsverteilung $v(\tau)$:

$$z = \frac{1}{2} \int_0^\tau v(\psi) d\psi \quad (1b)$$

Die früher häufig gewählte Form der Migration von einzelnen ausgewerteten Horizonten oder der Migration von Laufzeitplänen führt auf Grund einer lokalen Geschwindigkeitsannahme direkt zu einer Tiefendarstellung. In beiden Fällen wird mit Hilfe eines Strahlenverfahrens die Lage der reflektierenden Grenzen unter Berücksichtigung der Brechung nach dem Snellius'schen Gesetz exakt konstruiert.

Bei den Migrationsverfahren, die grundsätzlich auf der akustischen Wellengleichung beruhen und die auf gestapelte seismische Sektionen angewandt werden, ist es unwesentlich, welche Darstellung – im Tiefenmaßstab oder Zeitmaßstab – gewählt wird, wenn nur die Diffraktionspunkte in der lateral richtigen Position abgebildet werden. Dies wäre jedoch nur durch einen idealen Abbildungsprozeß zu erreichen, in welchem alle Laufzeiten für die jeweilige Geschwindigkeitsschichtung exakt berechnet werden. Aus Gründen der praktischen Anwendung begnügt man sich aber mit Näherungen.

Hubral hat schon 1977 gezeigt, daß die bis dahin angewandten Migrationsmethoden bei sich lateral ändernden Geschwindigkeitsgesetzen die Bildpunkte der Diffraktoren gegenüber der exakten Lage seitlich verschieben und damit fehlerhafte Abbildungen des Untergrundes liefern. Die Ursache für diese Verschiebung liegt darin, daß alle herkömmlichen Migrationsverfahren die Brechung nur unvollständig berücksichtigen. Je nach der Methode werden anstelle geneigter Gleithorizonte stückweise horizontale Geschwindigkeitsgrenzen angenommen, oder die Geschwindigkeitsschichtung wird durch ein homogenes Medium mit der v_{RMS} -Geschwindigkeit ersetzt. Die Näherungen verursachen eine mehr oder weniger starke Abweichung von der genauen Lage der Reflexionselemente, je nach Neigung der Schichtgrenzen und dem Einfallswinkel.

Um die Brechung zusätzlich bei der Migration berücksichtigen zu können, wurde ein Zwei-Stufen-Verfahren vorgeschlagen (Hubral (1977), Hatton, Larner und Gibson (1979)): Im ersten Schritt wird eine konventionelle Migration durchgeführt, im zweiten Schritt werden mit Hilfe eines Strahlen-Verfahrens die senkrecht an der Erdoberfläche ankommenden Strahlen (Image-rays) unter Berücksichtigung der Brechung berechnet und entsprechend die Position der seismischen Einsätze korrigiert. Die Erfahrung hat jedoch gezeigt, daß in Fällen sehr starker lateraler Geschwindigkeitsänderungen auch dieses Verfahren ungenaue Ergebnisse liefert und nicht in der Lage ist, komplexe geologische Strukturen aufzulösen. Die Fehler der konventionellen Migration können durch den zweiten Schritt der „image-ray-Korrektur“ nicht mehr kompensiert werden.

Ein anderes in zwei Stufen arbeitendes Verfahren ist mit gewissen Einschränkungen geeignet, den Einfluß der Brechung zu berücksichtigen:

Im ersten Schritt wird die gemessene Zeitsektion auf eine solche transformiert, bei der die Geschwindigkeitsfunktion $v = v(z)$ nur von z , nicht aber von x abhängt. Im zweiten Schritt wird eine konventionelle Migration auf die transformierten Daten durchgeführt, wobei jetzt der Vorteil eines vereinfachten Geschwindigkeitsmodells ausgenutzt werden kann.

Die beiden oben erwähnten Zwei-Stufen-Verfahren lassen sich mathematisch wie folgt formulieren: Die Operation A beschreibe die Focussierung der Diffraktionsenergie, die Operation B berücksichtige die Brechung an den Schichtgrenzen. Dann lautet die sequentielle Anwendung der beiden Operatoren auf das Wellenfeld $f = f(x, t, z = 0)$:

$$\hat{f}_1(x, z) = A \cdot \{B \cdot f(x, t, z = 0)\} \quad (2a)$$

oder

$$\hat{f}_2(x, z) = B \cdot \{A \cdot f(x, t, z = 0)\}, \quad (2b)$$

wobei \hat{f} das vollständig migrierte Ergebnis darstellt. Die Reihenfolge für die Anwendung der Operatoren A und B ist nicht einfach vertauschbar, d. h. die migrierten Ergebnisse nach (2a) und (2b) sind nicht notwendig identisch.

Eine verfeinerte Form für die Anwendung der beiden Operatoren ist das Splitting-Verfahren, das sich im Algorithmus der Downward-Continuation-Methode mit Finiten Differenzen realisieren läßt.

Bei jedem Tiefenschritt Δz von einem Tiefenniveau auf das nächst tiefere werden beide Operatoren nacheinander angewandt, z. B.

$$\begin{aligned} f(x, t, z = \Delta z) &= A_1 \cdot \{B_1 \cdot f(x, t, z = 0)\} \\ f(x, t, z = 2\Delta z) &= A_2 \cdot \{B_2 \cdot f(x, t, z = \Delta z)\} \\ &\vdots \\ f(x, t, z = n \Delta z) &= A_n \cdot \{B_n \cdot f(x, t, z = (n - 1) \Delta z)\} \end{aligned} \quad (3)$$

Nach dem Prinzip der Downward-Continuation und des Imaging erhält man die migrierte Sektion aus

$$\hat{f}(x, n \cdot \Delta z) = f(x, t = 0, z = n \cdot \Delta z) \quad (4)$$

für $n = 0, 1, 2, \dots, L$, wobei $L \cdot \Delta z$ gleich der maximalen Tiefe ist.

Dieses Verfahren ist bei der numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen bekannt (Yanenko, 1971) und geeignet, die skalare Wellengleichung für die Lösung der Tiefenmigration nutzbar zu machen. Im Anhang werden die mathematischen Zusammenhänge beschrieben.

Bei der mit Hilfe der akustischen Wellengleichung durchgeführten Downward-Continuation wird die Tiefenschrittweite Δz im Zeitmaßstab festgelegt. Die jeweils erreichten Tiefen sind also bei lateral sich ändernden Geschwindigkeiten unterschiedlich. Nach Erreichen eines jeden Tiefenniveaus werden deshalb die auf dieses Niveau bezogenen Laufzeiten durch kleine statische Verschiebungen auf gleiche Tiefe korrigiert.

Diese Technik ist unter dem Namen „wave-theoretical depth migration“ bekannt. In einem Arbeitsgang werden sowohl Elemente der Diffraktion (Operator A_n) als auch der Refraktion (Operator B_n) unter Berücksichtigung eines geeigneten Geschwindigkeitsmodells erfaßt.

An zwei synthetischen Beispielen soll die Wirkungsweise der beschriebenen Verfahren erläutert werden.

1. In Abb 1 a ist ein brechender Horizont und ein diffraktierender Punkt D dargestellt. Die Geschwindigkeiten sind im Hangenden $v_1 = 1500$ m/s und im Liegenden $v_2 = 3000$ m/s. Nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz lassen sich für den diffraktierenden Punkt D die Laufzeiten berechnen und die Strahlenwege konstruieren.

Das Ergebnis ist in Abb. 1 b aufgetragen. Die dem Punkt D zugeordnete Laufzeitenkurve hat ihren Scheitelpunkt nicht an der Stelle von D, sondern ist um den Betrag b_x seitlich an eine Stelle verschoben, wo ein von D ausgehender Strahl senkrecht auf die Oberfläche trifft (Image-Ray).

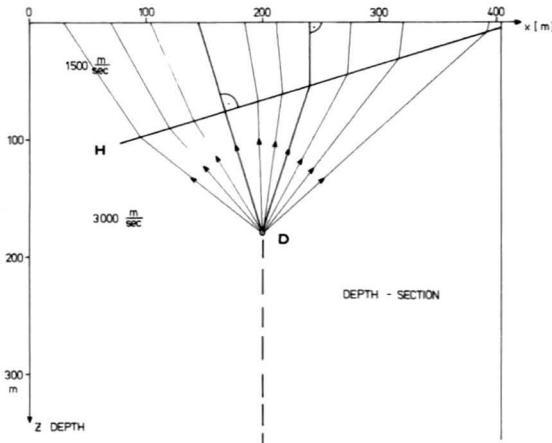


Abb. 1 a Tiefenmodell I

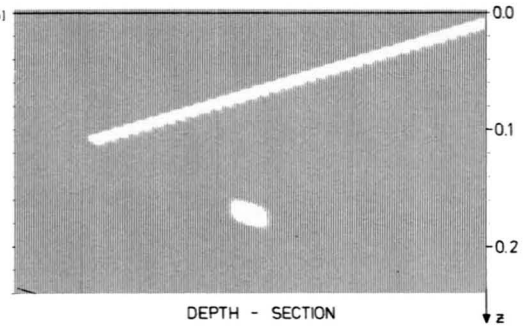


Abb. 2a Digitalisierte Form des Tiefenmodells I

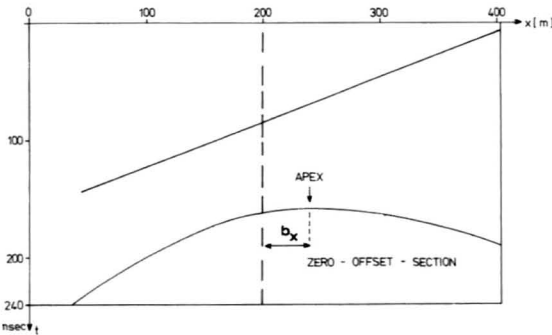


Abb. 1 b Laufzeitdarstellung des Tiefenmodells I

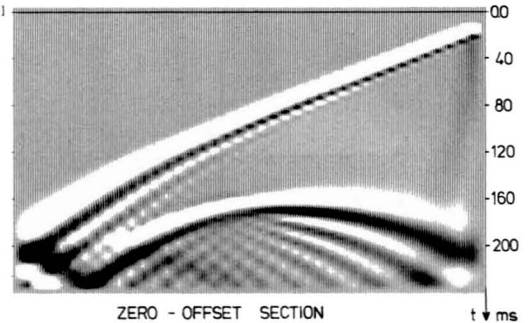


Abb. 2b Laufzeitsektion von 2a)

Die konventionellen Migrationsverfahren bilden den Punkt D im Scheitel der Diffraktionskurve ab, also mit einem lateralen Fehler von b_x .

Die Abb. 2a zeigt die digitalisierte Form des Modells von Abb. 1a im Tiefenbereich. In Abb. 2b ist die zu 2a gehörige Laufzeitsektion mit Hilfe eines Modelling-Verfahrens unter Berücksichtigung der Brechung gerechnet worden. Abb. 2b stimmt recht gut mit der Laufzeitkurve der Abb. 1b überein.

Ausgehend von Abb. 2b soll mit Hilfe der Tiefen-Migration (Splitting-Verfahren) das ursprüngliche Bild in Abb. 2a rekonstruiert werden. Zu diesem Zweck führt man eine Downward-Continuation durch, indem stufenweise das Beobachtungsniveau abgesenkt wird. Das Ergebnis der Migration soll im Zeit-Maßstab dargestellt werden, wobei nach (1a) eine Ersatzgeschwindigkeit $c = c(z)$ eingeführt wird.

Das Ergebnis der Downward-Continuation mit Berücksichtigung der Brechung für einen bestimmten Tiefenschritt zeigt die Abb. 3a. Der Teil oberhalb des Tiefenniveaus stellt den migrierten Anteil im Zeit-Maßstab dar, der untere Teil ist die Zeitsektion, wie sie im abgesenkten Beobachtungsniveau gemessen würde.

In den folgenden Abbildungen bis 3f ist der weitere Ablauf dieses Verfahrens für mehrere Tiefenschritte dargestellt. In dem Bereich, wo der brechende Horizont H

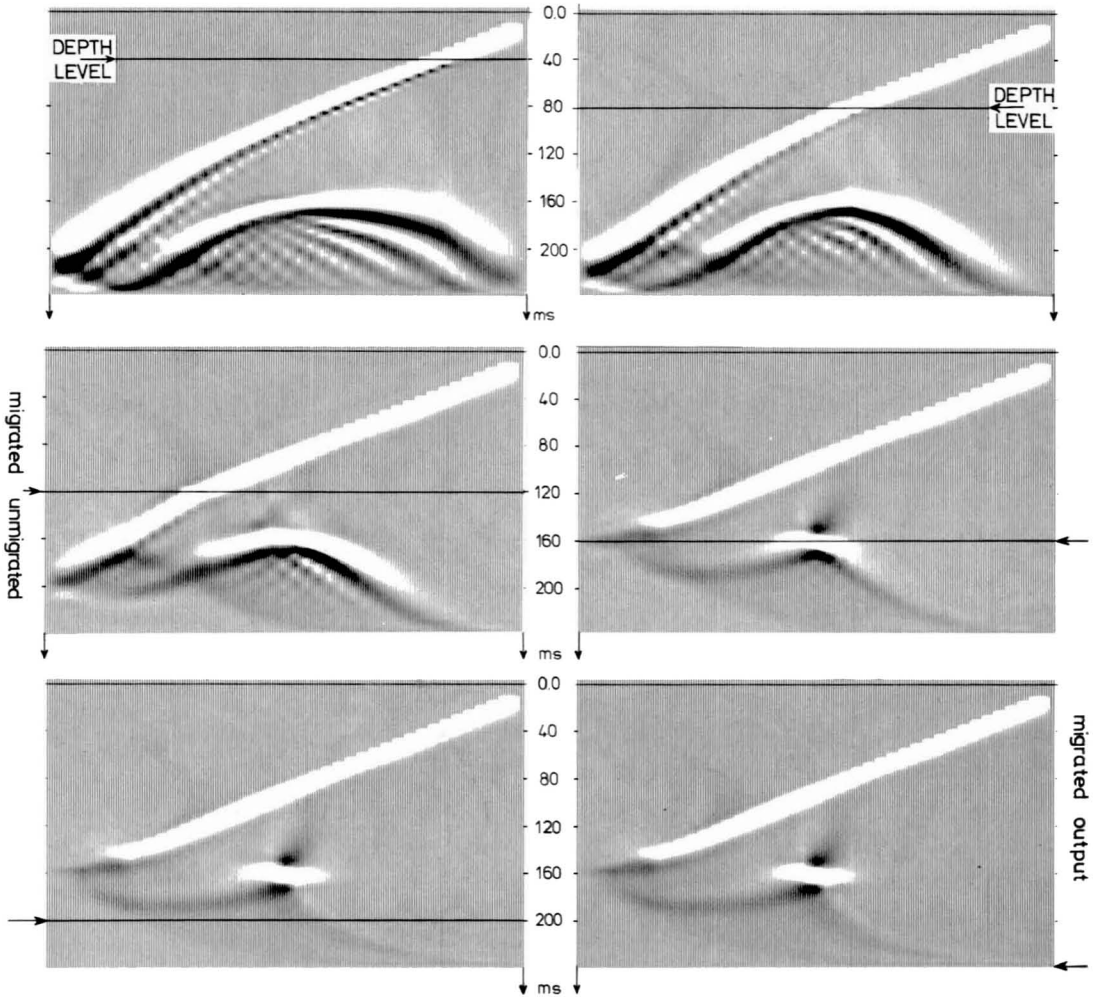


Abb. 3a–3f Verschiedene Stadien der Tiefenmigration im Zeitmaßstab

schon vollständig migriert vorliegt, ist der entsprechende Teil der Diffraktionskurve des Punktes D abgesenkt, so daß ihr Scheitel nach links verschoben erscheint. Die Abb. 4a (identisch mit Abb. 3f) zeigt das vollständig migrierte Ergebnis im Zeitmaßstab. Die Transformation in den Tiefenmaßstab mit Hilfe der Ersatzgeschwindigkeit $c=c(z)$ ist in Abb. 4b dargestellt. Zum Vergleich sind in Abb. 5a und Abb. 5b die erwarteten Ergebnisse noch einmal daneben gestellt.

2. Bei diesem Modell wurde ein geneigter Gleithorizont X und ein darunter liegender söhligiger Horizont Z mit einem deutlichen Versatz an einer Störung angenommen. In der entsprechenden Zeitsektion erscheinen die beiden Schollen des Horizonts Z wegen der Brechung am Horizont X (1500 m/s im Hangenden, 3000 m/s im

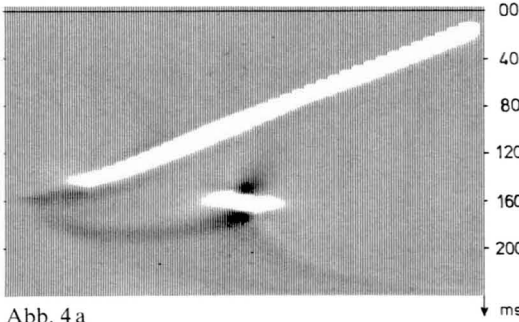


Abb. 4 a
Ergebnis der Tiefenmigration im Zeitmaßstab

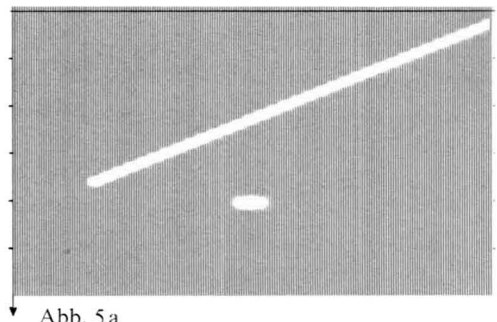


Abb. 5 a
Erwartetes Migrationsergebnis im Zeitmaßstab

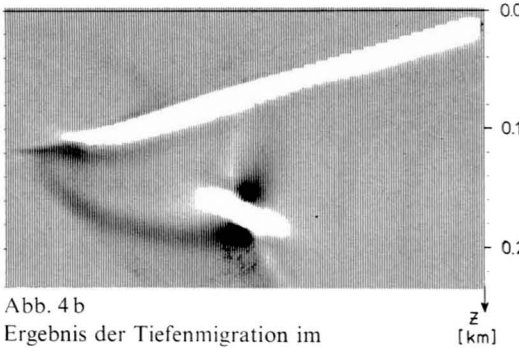


Abb. 4 b
Ergebnis der Tiefenmigration im
Tiefenmaßstab

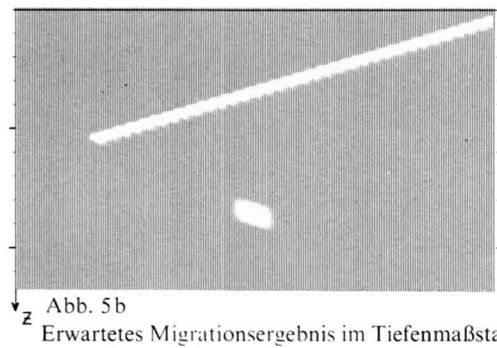


Abb. 5 b
Erwartetes Migrationsergebnis im Tiefenmaßstab

Liegenden) geneigt (Abb. 6a). Drei Verfahren der Tiefenmigration sollen an diesem Beispiel angewendet werden, um zu prüfen, welche Methode am besten die exakte Lage der Störungskanten wiedergibt:

a) Zwei-Stufen-Verfahren, Migration und Transformation

Zunächst wird eine konventionelle Migration durchgeführt, das Ergebnis im x, τ -Bereich wird dann durch eine einfache Stauchung oder Dehnung der migrierten Zeitreihen in den x, z -Bereich transformiert.

Die beiden Schollen werden wegen ihrer Neigung im Zeitbereich ausgeschwenkt, so daß die Störungskanten von A–A im Zeitbereich nach I–I versetzt werden. Die nachfolgende Tiefenwandlung ändert die Lage nicht. Die Ausschwenkung ist gegenüber der wahren Lage der Störungskanten (S–S) zu groß (Abb. 6b).

b) Zwei-Stufen-Verfahren, Transformation und Migration

Die Reihenfolge der Operationen ist vertauscht. Die Transformation des Wellenfeldes in ein anderes ohne laterale Geschwindigkeitsänderungen läßt die Neigung der Schollen des Horizontes X verschwinden. Die nachfolgende Migration ergibt keine Ausschwenkung. Die Störungskanten werden in A–A dargestellt, also in derselben Position wie in der unmigrierten Zeitsektion (Abb. 6c).

c) Das Ergebnis der Splitting-Methode ist in Abb. 6d dargestellt, die rekonstruierten Störungskanten liegen recht genau an der Soll-Position S–S.

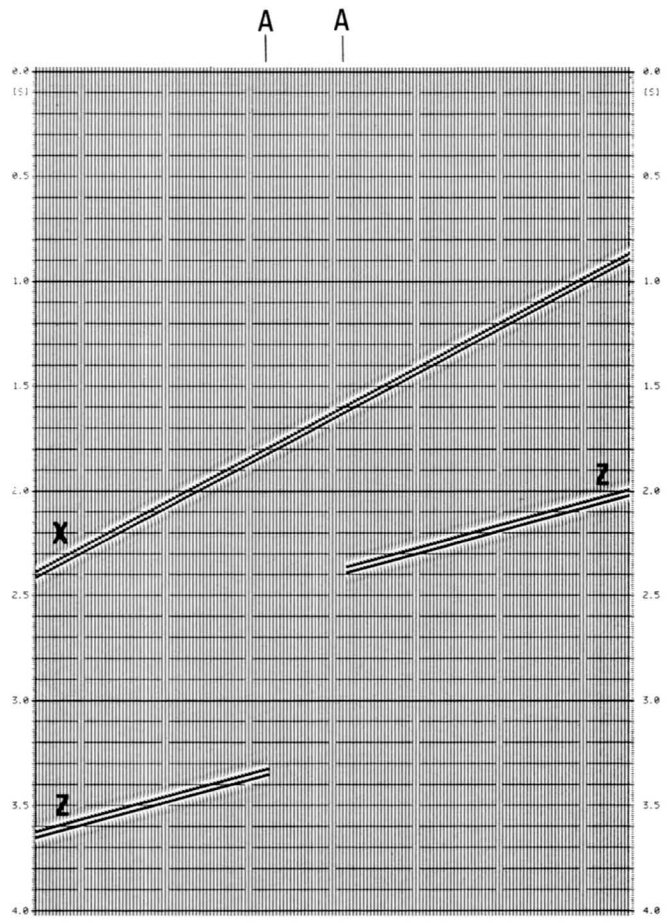


Abb. 6a
 Laufzeitsektion
 des Tiefenmodells II
 (ohne Diffraktionseinsätze)

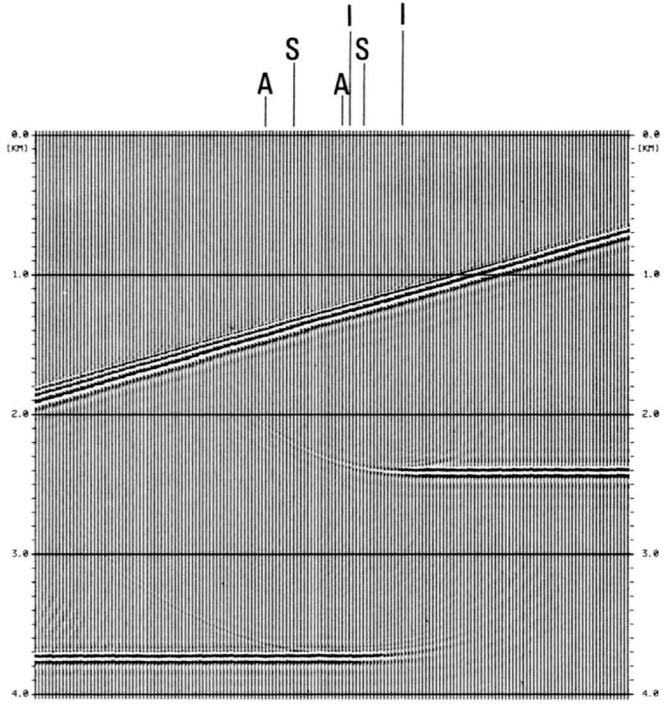


Abb. 6 b
 Zwei-Stufen-Verfahren:
 1. Migration
 2. Zeit-Tiefen-Transformation

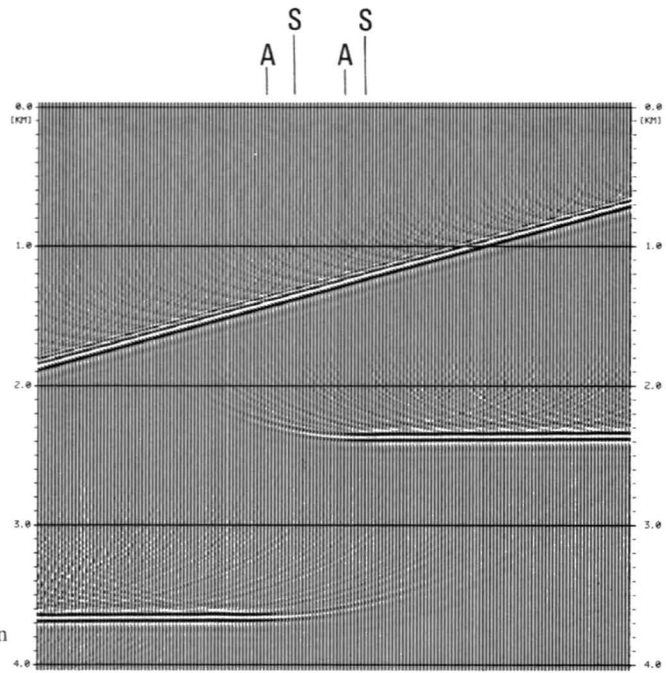


Abb. 6c
Zwei-Stufen-Verfahren:
1. Zeit-Tiefen-Transformation
2. Migration

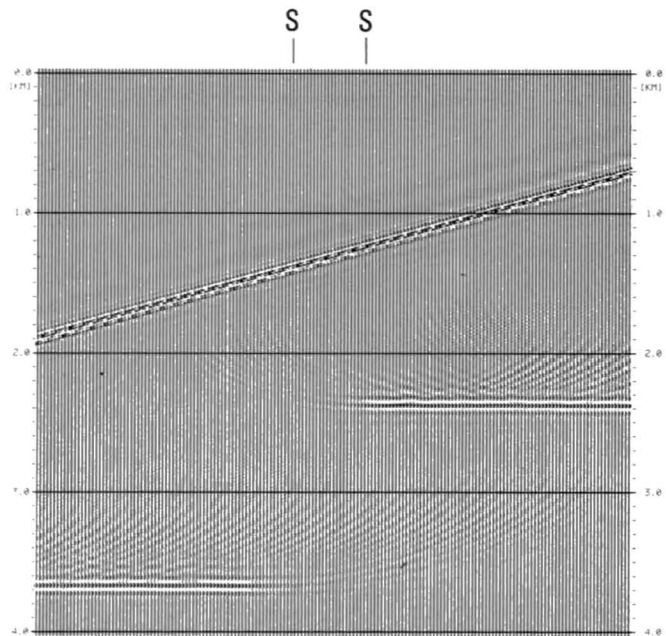


Abb. 6d
Tiefenmigration nach
der Splitting-Methode

Mit der Tiefenmigration nach der Splitting-Methode ist ein Verfahren bereitgestellt, das den berechtigten Anforderungen der Berücksichtigung der Brechung und der Darstellung der Ergebnisse im Tiefenmaßstab mit guter Näherung gerecht wird.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß die Anwendung des Operators (B), der angenähert die Brechung berücksichtigt, eine genaue Kenntnis der Geschwindigkeitsfunktion im *Tiefenbereich* erfordert. Diese Geschwindigkeitsfunktion läßt sich aber erst nach einer ersten Migration mit ausreichender Genauigkeit ermitteln.

Daraus folgt, daß dies Verfahren eine mehrfache Anwendung der Migration (Iteration) nötig macht.

ANHANG

Die partielle Differentialgleichung für die Tiefenmigration

DIE EINWEGWELLENGLEICHUNG (ONE-WAY WAVE EQUATION)

Die Einwegwellengleichung für „nach oben“ laufende akustische Wellen lautet (Claerbout, 1976):

$$\frac{\partial P^+}{\partial z} = \underline{W}jP^+ \quad (A1)$$

Dabei sind:

$$P^+ = P^+(x, \omega, z)$$

– Fouriertransformation des Wellenfeldes
(z. B. Druck)

$$P^+ = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t, z) e^{-j\omega t} dt \quad (A2)$$

„Nach oben“ bedeutet „in negativer z-Richtung“, wobei die positive z-Achse in die Erde hineinzeigt und die x-Koordinate in der als eben angenommenen Erdoberfläche liegt. Der „Square-root-operator“ lautet:

$$\underline{W} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2(x, z)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \quad (A3)$$

Es ist zweckmäßig nach Claerbout (1976), ein neues Koordinatensystem (moving coordinate system) einzuführen mit den Transformationsgleichungen:

$$x' = x, \quad t' = t + \int_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)}, \quad z' = z, \quad (A4)$$

dabei ist $c(z)$ eine Referenzgeschwindigkeit, die nur von z abhängt. Aus der Transformation (A4) ergibt sich eine neue partielle Differentialgleichung im „gestrichelten“ Koordinatensystem:

$$\frac{\partial P'}{\partial z'} = \left\{ j \sqrt{\left(\frac{\omega}{v(x', z')} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x'^2}} - j \frac{\omega}{c(z)} \right\} P'(x', \omega, z') \quad (A5)$$

Wir schreiben (A5) etwas um und erhalten, indem wir das Strichzeichen fortan (mit Ausnahme bei P') weglassen:

$$\frac{\partial P'}{\partial z} = \left\{ j \underbrace{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2(x, z)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}} - j \frac{\omega}{v}}_{\underline{A}_1} \right\} P' + j \underbrace{\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega}{c} \right)}_{\underline{A}_2} P' \quad (\text{A6})$$

Der Operator \underline{A}_1 in (A6) heißt Diffraktionsterm, der Operator \underline{A}_2 in (A6) heißt „Thin-lens-term“ (Claerbout, 1976).

Wir approximieren die Wurzel in (A6) durch eine einfache Taylor-Entwicklung und erhalten die sogenannte 30°-Approximation:

$$\frac{\partial P'}{\partial z} = j \cdot \underbrace{\frac{v(x, z)}{2\omega} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)}_{\underline{A}_1^{(1)}} \cdot P' + j \underbrace{\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega}{c} \right)}_{\underline{A}_2^{(1)}} \cdot P' \quad (\text{A7})$$

SPLITTING-METHODE ZUR LÖSUNG DER GLEICHUNG (A7)

Wir betrachten die partielle Differential-Gleichung

$$\frac{\partial P'}{\partial z} = (\underline{A} + \underline{B}) P' \quad (\text{A8})$$

Es wird angenommen, daß die Operatoren \underline{A} und \underline{B} im Intervall $(0, \Delta z)$ nicht von z abhängig sind.

Die korrekte Lösung zu (A8) kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$P'(x, \omega, z = \Delta z) = \exp\{(\underline{A} + \underline{B}) \cdot \Delta z\} \cdot P'(x, \omega, z = 0) \quad (\text{A9})$$

Der Exponentialterm in (A9) ist durch eine Reihenentwicklung erklärt.

Die approximierte Lösung zu Gleichung (A8) lautet:

$$\hat{P}'(x, \omega, z = \Delta z) = \exp\{\underline{A} \cdot \Delta z\} \exp\{\underline{B} \cdot \Delta z\} \cdot P'(x, \omega, z = 0) \quad (\text{A10})$$

oder durch Einführen eines Zwischenergebnisses \bar{P}' läßt sich (A10) splitten:

$$\begin{aligned} \bar{P}'(x, \omega, z = \Delta z) &= \exp\{\underline{B} \cdot \Delta z\} \cdot P'(x, \omega, z = 0) \\ \hat{P}'(x, \omega, z = \Delta z) &= \exp\{\underline{A} \cdot \Delta z\} \cdot \bar{P}'(x, \omega, z = \Delta z) \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

Das heißt: Wir lösen die Gleichung (A 8) sequentiell

$$\frac{\partial P'}{\partial z} = \underline{B} P' \quad (\text{A 12})$$

$$\frac{\partial P'}{\partial z} = \underline{A} P'$$

Eine Partielle Differentialgleichung mit zwei Operator-Termen ist in zwei Gleichungen gesplittet; es wird dabei angenommen, daß jede Gleichung einzeln leichter als die Ursprungsgleichung gelöst werden kann.

Wir identifizieren den Operator \underline{B} mit \underline{A}_2 in (A 6) und erkennen, daß die Operation $e^{\underline{B}\Delta z}$ in (A 10) lautet

$$e^{\underline{B}\Delta z} e^{j\Delta z \left\{ \frac{\omega}{v} - \frac{\omega}{c} \right\}} \quad (\text{A 13})$$

Gleichung (A 13) beschreibt eine Verschiebungsoperation (statische Korrektur) (Judson et al., 1980).

Gleichung (A 10) kann mit Hilfe von (A 7) geschrieben werden:

$$\hat{P}'(x, \omega, z = \Delta z) = \exp \left\{ j \frac{v(x, z)}{2\omega} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Delta z \right\} \exp \left\{ j \Delta z \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\omega}{c} \right) \right\} P'(x, \omega, z = 0) \quad (\text{A 14})$$

Diffraktions-term
Shift-term

Für den Diffraktionsterm lassen sich durch genauere Annäherung an die Wurzel verbesserte Operatoren errechnen.

REFERENCES

- Claerbout, J. F., 1970, Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure, *Geophysics*, Vol. 35, p. 407–418.
- Claerbout, J. F., and Johnson, A. G., 1971, Extrapolation of time dependent waveforms along their path of propagation, *Geophys. Journ. of R. astro. Soc.*, Vol. 26, p. 285–293.
- Claerbout, J. F., 1976, *Fundamentals of geophysical data processing*, Mc Graw Hill, N. Y., 1976.
- Hatton, L., Larner, K., and Gibson, B., 1979, Migration of seismic data from inhomogeneous media, Paper presented at Migration and Modeling Symposium, Denver Geophys. Society, March 1979.
- Hubral, P., 1977, Time-migration – some ray theoretical aspects, *Geophysical Prospect.*, Vol. 25, p. 728–745.
- Hubral, P., and Krey, 1980, Interval velocities from seismic reflection time measurements, SEG-Monograph of *Geophysics*, to appear in 1980.
- Judson, D. R., Lin, J., Schulz, P. S., and Sherwood, J. W. C., 1980, Depth migration after stack, *Geophysics*, Vol. 45, p. 361–375.
- Loewenthal, D., Lu, L., Roberson, R., and Sherwood, J., 1976, The wave equation applied to migration, *Geophys. Prospect.*, Vol. 24, p. 380–399.
- Richtmyer, R. D., and Morton, K. W., 1967, *Difference methods for initial value problems*, Interscience, 1967.
- Stanford Exploration Project (SEP), Half-yearly reports, Stanford University, California, Project sponsored by industry and institutes.
- Yanenko, N. N., 1971, *The method of fractional steps*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.