Jacobi Matrix und Kettenregel

Aufgabe 1:

Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Wir betrachten die Abbildungen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^2$ und $g : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^2$ mit

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} e^x + \frac{2}{y} \\ e^x + y^2 \end{pmatrix}, \qquad g(x,y) := \begin{pmatrix} \ln x \\ x + y \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme die Jacobi-Matrizen J_f und J_g von f bzw. g.

b) Man berechne explizite Darstellungen der Funktionen

$$\begin{array}{c} h : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+^2 \\ h := f \circ g \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c} \tilde{h} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^2 \\ \tilde{h} := g \circ f. \end{array}$$

c) Man berechne die Jacobi-Matrizen J_h und $J_{\tilde{h}}$ von h bzw. $\tilde{h}$ jeweils auf zweierlei Arten:

i) durch direktes Ableiten der Ergebnisse in b),

ii) durch Anwendung der Kettenregel.

Jacobi Matrix und Kettenregel

Aufgabe 2:

Wir betrachten die Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ e^{x^2+y^2} \\ \cos z \end{pmatrix}, \qquad g(r,\varphi,t) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ t \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne die Jacobi-Matrizen J_f und J_g in einem beliebigen Punkt.

b) Man bestimme explizite Darstellungen der Funktionen $h, \tilde{h} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$h := f \circ g \qquad \text{und} \qquad \tilde{h} := g \circ f.$$

c) Man berechne die Jacobi-Matrix J_h in einem beliebigen Punkt $(r,\varphi,t) \in \mathbb{R}^3$
i) durch direktes Ableiten des Ergebnisses für h aus b),
ii) durch Anwendung der Kettenregel.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Jakobimatrix folgender Funktionen:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \; : \; f(x_1, x_2, x_3) := 3x_1^2 x_2 + \mathrm{e}^{x_1 x_3^2} + 4x_3^3,$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \; : \; g(x_1, x_2) := (x_1 x_2, \cosh(x_1 x_2), \ln(1 + x_2^2)),$$
$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \; : \; h(x_1, x_2, x_3) := (x_1 \sin x_2 \cos x_3, x_1 \sin x_2 \sin x_3, x_1 \cos x_2).$$

Sei die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & \text{für} \quad (x_1, x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß h „längs der Geraden $x_2 = a x_1$“ für $a \in \mathbb{R}$ bei $(0, 0)$ stetig ist, d.h., daß

$$h(x_n, a x_n) \to h(0, 0) = 0$$

für jede reelle Nullfolge $(x_n)_n$ gilt. Beweisen Sie, daß h bei $(0, 0)$ aber nicht stetig ist.

Aufgabe 4:

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und $g : (0, \infty)^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) := \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \qquad g(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} 1 + \ln x_1 \\ x_1\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß diese Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitungen.

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \text{für} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(0,0)$ und $\partial_2 f(0,0)$ existieren, daß die übrigen Richtungsableitungen bei $(0,0)$ hingegen nicht existieren.

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & \text{für} \quad x_2 > 0, \\ x_1 & \text{für} \quad x_2 = 0, \\ -\sqrt{x_1^2 + x_2^2} & \text{für} \quad x_2 < 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß f bei $(0,0)$ stetig ist, und daß jede Richtungsableitung von f bei $(0,0)$ existiert. Ist f bei $(0,0)$ differenzierbar?