6. Aussagenlogische Resolution, mehrwertige Logik

6.1 Resolutionskalkül der Aussagenlogik

A Klauseln und Resolventen von Klauseln

Definition 6.1: Klausel (der Aussagenlogik)

:= eine Menge $\{L_{i1},...,L_{in_i}\}$ von Literalen, die als Abkürzung eingesetzt wird für die **Disjunktion** $(L_{i1}\vee...\vee L_{in_i})$.

Definition 6.2: Klauselmenge (der Aussagenlogik)

:= eine Menge $\{\{L_{11},...,L_{1n_1}\},...,\{L_{k1},...,L_{kn_k}\}\}$ von Klauseln, die als Abkürzung eingesetzt wird für die **aussagenlogische Formel** in KNF $((L_{11}\vee...\vee L_{1n_1})\wedge...\wedge(L_{k1}\vee...\vee L_{kn_k}))$.

Bemerkungen:

a) Für sämtliche Literale L_{ij} in den Definitionen 6.1 und 6.2 gilt $L_{ij}\in\{A_1,A_2,...\}\cup\{\neg A_1,\neg A_2,...\}$.

b) Wegen der Mehrdeutigkeit der Mengendarstellung (z. B. wird jedes Element nur einmal aufgeführt und die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle) gibt es als Abkürzung für eine Disjunktion über Literalen i. Allg. mehrere gleichwertige Schreibweisen.

c) Die Mehrdeutigkeit der Mengendarstellung ist äquivalent zur Gültigkeit des Kommutativgesetzes, des Assoziativgesetzes und der Idempotenz (sowie des Ersetzbarkeitstheoremes) gemäß

(1) $(A\vee B) \equiv (B\vee A) \equiv \{A,B\}$;

(2) $((A\vee B)\vee C) \equiv (A\vee(B\vee C)) \equiv \{A,B,C\}$;

(3) $(A\vee A) \equiv \{A\}$.

d) Damit bildet jede Klausel die Abkürzung für eine ganze Äquivalenzklasse von Disjunktionen über Literalen.

e) Klauseln bzw. Klauselmengen können gemäß d) als Normalformen aufgefasst werden, d. h. als (mengentheoretisch betrachtet) eindeutige Repräsentanten aller zu ihnen äquivalenten Formeln in KNF.

f) Dementsprechend werden Klauseln bzw. Klauselmengen wie korrekte Formeln in KNF behandelt.

Beispiel 6.1: (Klauseln und Klauselmengen)

a) Die Klausel $\{A_1,\neg A_1,A_3\}$ ist äquivalent zu den aussagenlogischen Formeln $((A_1\vee\neg A_1)\vee A_3)$, $(A_1\vee(\neg A_1\vee A_3))$,$(((A_3\vee A_1)\vee\neg A_1)\vee A_3)$, ...

b) Die aussagenlogischen Formeln $(((A\vee\neg B)\wedge C)\wedge C)$, $(C\wedge(\neg B\vee A))$, $(C\wedge((\neg B\vee\neg B)\vee A))$ in KNF besitzen die selbe Klauselmengen-Darstellung $\{\{A,\neg B\},\{C\}\} = \{\{C\},\{\neg B,A\}\} = ...$.

Definition 6.3: aussagenlogischer Resolvent

:= eine Klausel der Form $R = (K_1 - \{L\})\cup(\{K_2 - \{\overline{L}\})$, wobei L in K_1 und

$$\overline{L} = \left\{ \begin{array}{ll} \neg A_i\,, & \text{falls } L = A_i \\ A_i\,, & \text{falls } L = \neg A_i \end{array} \right\} \quad \text{in } K_2 \text{ enthalten ist.}$$

Bezeichnung: R wird aus K_1 und K_2 nach L resolviert.

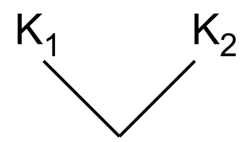
Definition 6.4: aussagenlogische Resolutionsregel

:= die zur Bildung aussagenlogischer Resolventen verwendete syntaktische Operation.

Darstellung als **Regel**:

$$\frac{\begin{array}{l} K_1 \\ K_2 \end{array}}{(K_1 - \{L\})\cup(K_2 - \{\overline{L}\})}$$

Graphische Darstellung:



$R = (K_1 - \{L\})\cup(K_2 - \{\overline{L}\})$

Definition 6.5: aussagenlogische Resolution

:= die Anwendung der Resolutionsregel aus Definition 6.4 für die Berechnung aussagenlogischer Resolventen.

Beispiel 6.2: (Bildung von Resolventen)

a) Die Literale, welche eliminiert werden, sind jeweils unterstrichen:

$\{B,\underline{\neg C},A\}$ $\{\underline{C},\neg A\}$

$\{B,A,\neg A\} := (\{B,\neg C,A\} - \{\neg C\}) \cup (\{C,\neg A\} - \{C\})$

b) $\{B,\neg C,\underline{A}\}$ $\{C,\underline{\neg A}\}$

$\{B,\neg C,C\} := (\{B,\neg C,A\} - \{A\}) \cup (\{C,\neg A\} - \{\neg A\})$

c) $\{\underline{B}\}$ $\{\underline{\neg B}\}$

$\{\,\} := (\{B\} - \{B\}) \cup (\{\neg B\} - \{\neg B\})$

Bemerkungen:

a) Die Resolutionsregel ist als Regel der Syntax mit der Ableitungsregel im Hilbert-Kalkül vergleichbar (s. u. Satz 6.1).

b) Der Resolvent zweier Klauseln $K_1 = \{L\}$ und $K_2 = \{\overline{L}\}$ besteht rein syntaktisch aus der leeren Menge { } bzw. leeren Klausel, welche künftig "□"geschrieben wird und eine bisher nicht definierte neue Formel in KNF darstellt.

Satz 6.1: (Resolutions-Lemma der Aussagenlogik)

Sei F eine aussagenlogische Formel in KNF und in Klauseldarstellung sowie R ein Resolvent zweier Klauseln K_1, K_2 aus F.

Dann sind F und $F \cup \{R\}$ **semantisch äquivalent** (i.a.W.: $F \equiv F \cup \{R\}$).

Beweis:

Sei $R = (K_1 - \{L\}) \cup (K_2 - \{\overline{L}\})$ mit $L \in K_1$, $\overline{L} \in K_2$ sowie $K_1, K_2 \in F$, und sei **A** eine passende Belegung zu F und damit auch zu $F \cup \{R\}$.

(⇒): Ist $\mathbf{A}(F \cup \{R\}) = 1$, so natürlich auch $\mathbf{A}(F) = 1$ (und $\mathbf{A}(\{R\}) = 1$).

(⇐): Ist $\mathbf{A}(F) = 1$, so auch $\mathbf{A}(K_1) = 1$ und $\mathbf{A}(K_2) = 1$ und, da es sich bei K_1, K_2 und R um Disjunktionen handelt, gilt weiter:

Entweder ist **A**(L) = 1 und **A**($\bar{L}$) = 0 und damit **A**((K_2 - {$\bar{L}$})) = 1 also auch **A**(R) = 1 und **A**(F∪{R}) = 1
oder es ist **A**(L) = 0 und **A**($\bar{L}$) = 1 und damit **A**((K_1 - {L})) = 1 also auch **A**(R) = 1 und **A**(F∪{R}) = 1.

Bemerkungen:

a) Der obige Beweis zeigt auch, dass jeder Resolvent R aussagenlogischer Klauseln K_1, K_2 eine **logische Folgerung** dieser Klauseln sowie der Klauselmenge F ist, d. h. $\models((K_1 \wedge K_2) \rightarrow R)$ und $\models(F \rightarrow R)$.
Diese Aussage wird auch als **Korrektheits-Lemma** bezeichnet.

b) Damit ist **A**(($K_1 \wedge K_2$)) ≤ **A**(R) sowie **A**(F) ≤ **A**(R) für jede zu F passende Belegung **A**.

c) Aus dem Resolutions-Satz folgt, dass jede Klauselmenge F, aus der die leere Klausel resolviert werden kann, unerfüllbar sein muss.

d) Deshalb sind der Grenzfall {□} einer KNF gemäß Definition 6.2, sowie □ alleine (als reine Disjunktion derselbe Grenzfall) und jede Klauselmenge, welche □ enthält, unerfüllbar.

Definition 6.6: Einmalige Erweiterung Res einer Klauselmenge F (um alle Resolventen zu den Klauseln in F)

≔ die (gemäß Satz 6.2 weiter unten) eindeutige Klauselmenge Res(F) = F∪{R|R ist Resolvent zweier Klauseln in F}.

Definition 6.7: Rekursive Erweiterung einer Klauselmenge F (um Resolventen)

≔ die Erweiterungen einer Klauselmenge F wie folgt:

(1) $Res^0(F) = F$

(2) $Res^{n+1}(F) = Res(Res^n(F))$ für n = 0,1,2,...

(3) $Res^*(F) = \bigcup_{n \geq 0} Res^n(F)$

Bemerkungen:

a) Die Klauselmenge Res*(F) ist die **Resolutions-Hülle** bzgl. der Erweiterung einer Klauselmenge F um Resolventen.

b) Da jede aussagenlogische KNF nur endlich viele Literale enthält, können aus ihren Bestandteilen auch nur endlich viele Resolventen gebildet werden, so dass nach einer endlichen Anzahl n von Resolutionsschritten $Res^{n+1}(F) = Res^n(F) = Res^*(F)$ ist (vgl. Satz 6.2).

Beispiel 6.3: (Rekursive Erweiterung um Resolventen)

a) Als Erweiterungen der **aussagenlogischen Klauselmenge** $F = \{\{\neg A,B\}, \{\neg B,C\}, \{\neg C,D\}\}$ ergeben sich

$Res^0(F) = \{\{\neg A,B\}, \{\neg B,C\}, \{\neg C,D\}\};$

$Res^1(F) = \{\{\neg A,B\}, \{\neg B,C\}, \{\neg C,D\}\} \cup \{\{\neg A,C\}, \{\neg B,D\}\};$

$Res^2(F) = \{\{\neg A,B\}, \{\neg B,C\}, \{\neg C,D\}, \{\neg A,C\}, \{\neg B,D\}\} \cup \{\{\neg A,D\}\};$

$Res^3(F) = Res^2(F) = Res^*(F).$

Wegen der (semantischen) Äquivalenz

$$\{\{\neg A,B\},\{\neg B,C\},\{\neg C,D\}\} \equiv ((A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to D))$$

ließen sich alle Resolventen auch mit Hilfe der semantischen Kettenschlussregel als **logische Folgerungen**

$$(A \to C) \equiv \{\neg A,C\},\ (B \to D) \equiv \{\neg B,D\} \text{ und } (A \to D) \equiv \{\neg A,D\}$$

von F bzw. von Klauseln aus F herleiten.

b) Als Erweiterungen der **aussagenlogischen Klauselmenge** $G = \{\{\neg B,C,\neg C\}, \{B,\neg C\}, \{\neg B\}, \{C\}\}$ ergeben sich

$Res^0(F) = \{\{\neg B,C,\neg C\}, \{B,\neg C\}, \{\neg B\}, \{C\}\};$

$$Res^1(F) = \{\{\neg B,C,\neg C\}, \{B,\neg C\}, \{\neg B\}, \{C\}\} \\ \cup \{\{C,\neg C\}, \{\neg B,\neg C,B\}, \{\neg B,C\}, \{\neg C\}, \{B\}\};$$

$$Res^2(F) = \{\{\neg B,C,\neg C\}, \{B,\neg C\}, \{\neg B\}, \{C\}, \\ \{C,\neg C\}, \{\neg B,\neg C,B\}, \{\neg B,C\}, \{\neg C\}, \{B\}\} \\ \cup \{\{\neg B,\neg C\}, \{\neg B,B\}, \square\};$$

$Res^3(F) = Res^2(F) = Res^*(F).$

Bemerkungen:

a) Die Resolventen in $Res^1(F)$, $Res^2(F)$, ... sollten mit einer gleichbleibenden Systematik berechnet werden. Z. B. kann stets die 1., 2., ... Klausel in Folge mit allen restlichen Klauseln in Folge auf die Möglichkeit einer Resolventenbildung hin überprüft werden.

b) In iterierenden Berechnungsschritten brauchen nur (noch) Klausel-Paare, bei denen mindestens eine der Klauseln neu ist, auf die Möglichkeit einer Resolventenbildung hin verglichen werden.

B Der Aussagenlogische Resolutions-Kalkül

Bemerkung:

Ein Kalkül besteht i. Allg. aus ersten wahren Sätzen (Axiomen) und korrekten Regeln der Art, dass nur durch die Anwendung der Regeln aus den wahren Sätzen neue wahre Sätze abgeleitet werden können.

Definition 6.8: Aussagenlogischer Resolutions-Kalkül

:= ein aussagenlogischer Kalkül, der als einzige "korrekte Regel" die **Resolutionsregel** einsetzt, um durch ihre Anwendung aus einer gegebenen Klauselmenge F die leere Klausel herzuleiten, wobei das Ergebnis $\square \in Res^*(F)$ als syntaktischer Beweis der semantischen Unerfüllbarkeit der Formel F gewertet wird.

Bemerkungen:

a) Im Resolutions-Kalkül wird, passend zu Definition 6.8, nicht die Allgemeingültigkeit von Formeln getestet sondern deren Unerfüllbarkeit.

b) Da die Resolution nur auf die getesteten Klauselmengen wirkt, benötigt der Resolultions-Kalkül keine Axiome.

b) Dabei ist nach Satz 3.1 jede aussagenlogische Formel F genau dann allgemeingültig wenn $\neg F$ unerfüllbar ist, so dass wahlweise die KNF einer Formel F getestet werden kann oder die KNF ihrer Negation $\neg F$.

d) Ein Kalkül ist nur dann uneingeschränkt brauchbar, wenn er bzgl. der interessierenden Problemstellungen korrekt und vollständig ist (vgl. die Definitionen 4.6 und 4.7).

e) **Korrektheit** bedeutet im Resolutions-Kalkül:

"Ist bei einer gegebenen Klauselmenge F (bzw. Formel in KNF) $\square \in Res^*(F)$, so ist F unerfüllbar".

f) **Vollständigkeit** bedeutet im Resolutions-Kalkül:

"Ist eine Klauselmenge F (bzw. Formel in KNF) unerfüllbar, so ist $\square \in Res^*(F)$".

g) Der Resolutions-Kalkül ist in der Informatik u. a. deshalb beliebt, weil die Berechnung von Res* leicht automatisiert werden kann.

Satz 6.2: (Endliche Mächtigkeit von Res*(F))
Für jede aussagenlogische Klauselmenge F ist Res*(F) von endlicher Mächtigkeit und in endlich vielen Schritten berechenbar.

Beweis:
Seien $A_1,\dots,A_n$ o.B.d.A. die endlich vielen Aussagenvariablen in einer gegebenen aussagenlogischen Formel F. Dann sind alle Klauseln in F, $Res^1(F)$, $Res^2(F)$, ... Teilmengen von $\{A_1,\dots,A_n,\neg A_1,\dots,\neg A_n\}$.
Da jedes der 2n Literale in jeder Klausel entweder vorkommt oder nicht vorkommt, gibt es maximal 2^{2n} Klauseln, d. h. endlich viele Klauseln.
Also gilt spätestens nach $k = 2^{2n}$ Erweiterungen mit Res:
$Res^k(F) = Res^{k+1}(F) = \dots = Res^*(F)$.

Satz 6.3: (Resolutions-Satz der Aussagenlogik)
Für jede aussagenlogische Klauselmenge F gilt:
F ist unerfüllbar gdw $\square \in Res^*(F)$
I.a.W.: Der Resolutions-Kalkül der Aussagenlogik ist korrekt und vollständig.

Beweis:

Zur Korrektheit: Wenn $\square \in Res^*(F)$, dann ist F unerfüllbar.

Ist $\square \in Res^*(F)$, so liegt die leere Klausel entweder schon in F oder sie entsteht durch Resolution aus Klauseln der Form $\{A_i\}$ und $\{\neg A_i\}$.
Im zweiten Fall gibt es nach Satz 6.2 ein $k \in \mathbb{N}$ mit $Res^*(F) = Res^k(F)$, wobei $\{A_i\}$ und $\{\neg A_i\}$ schon in $Res^{k-1}(F)$ liegen müssen. Da die Disjunktionen $\{A_i\}$ und $\{\neg A_i\}$ nicht gleichzeitig erfüllbar sind, ist $Res^{k-1}(F)$ also notwendig unerfüllbar.
Aus dem Resolutionslemma folgt dann weiter, wenn es auf jede Resolventenbildung, die von F zu Res*(F) führt, einmal angewendet wird, $F \equiv Res^1(F) \equiv \dots \equiv Res^{k-1}(F) \equiv Res^*(F)$. Also ist auch F unerfüllbar.

Zur Vollständigkeit: Wenn F unerfüllbar ist, dann $\square \in Res^*(F)$.

Beweis durch **Induktion** über die Anzahl n der in F vorkommenden Aussagenvariablen, die (o.B.d.A.) mit $A_1,\dots,A_n$ benannt seien.

Induktionsanfang:

n = 0: Wegen $F = \{\square\}$ und $F \subseteq Res^*(F)$ ist $\square \in Res^*(F)$.

[alternativ: **n = 1**: $F \subseteq \{\square, \{A_1\}, \{\neg A_1\}\}$ ist unerfüllbar, wenn $\square \in F$ oder $\{A_1\},\{\neg A_1\} \in F$ mit $\square \in Res(\{\{A_1\},\{\neg A_1\}\})$. Dann ist jeweils $\square \in Res^*(F)$].

Induktionsvoraussetzung: (IV)

Für jede unerfüllbare Klauselmenge F, die nur Aussagenvariablen aus $\{A_1,...,A_n\}$ enthält, ist $\square \in Res^*(F)$.

Induktionsbehauptung:

Für jede unerfüllbare Klauselmenge F, die nur Aussagenvariablen aus $\{A_1,...,A_{n+1}\}$ enthält, ist $\square \in Res^*(F)$.

Induktionsschritt:

a) Es werden wie folgt Klauselmengen F_0, F_1, F', F_0', F_1' definiert (**Vorsicht!** Bezeichnungen gegenüber **Schöning** leicht geändert):

$F_0 = \{K | K \in F \text{ und } \neg A_{n+1} \notin K\}$;

$F_1 = \{K | K \in F \text{ und } A_{n+1} \notin K\}$;

$F' = \{K | K \in F \text{ und } A_{n+1}, \neg A_{n+1} \notin K\}$.

F_0' bzw. F_1' entstehen aus F_0 bzw. F_1, indem in allen Klauseln die Literale A_{n+1} bzw. $\neg A_{n+1}$ eliminiert werden. Danach erfüllen die Klauselmengen F', F_0' und F_1' auf Grund ihrer Konstruktion die Induktionsvoraussetzung (IV).

Veranschaulichung:

	Klauseln, die A_{n+1} nicht enthalten	Klauseln, die A_{n+1} enthalten
Klauseln, die $\neg A_{n+1}$ nicht enthalten	identisch mit F'; in F_0', F_1' ganz enthalten	in F_0' berücksichtigt (nur A_{n+1} gestrichen)
Klauseln, die $\neg A_{n+1}$ enthalten	in F_1' berücksichtigt (nur $\neg A_{n+1}$ gestrichen)	in F_0', F_1' nicht berücksichtigt

b) Fall 1: $\square \in Res^*(F')$. Dann ist mit $F' \subseteq F$ auch $Res^*(F') \subseteq Res^*(F)$ und damit $\square \in Res^*(F)$.

Fall 2: $\square \notin Res^*(F')$. Dann werden zur Herleitung der leeren Klausel auch die Klauselmengen F_0' - F' bzw. F_1' - F' benötigt mit Klauseln, die ursprünglich das Literal A_{n+1} bzw. $\neg A_{n+1}$ enthielten.

Annahme (indirekter Schluss):

Es gebe **Modelle $\mathbf{A_0'}$** bzw. **$\mathbf{A_1'}$** der Klauselmengen F_0' bzw. F_1'.
Dann existieren aber im **Widerspruch** zur Unerfüllbarkeit von F auch Modelle $\mathbf{A_0}$ bzw. $\mathbf{A_1}$ für F wie folgt (vgl. Tabelle):

$$\mathbf{A_0}(A_i) = \begin{Bmatrix} \mathbf{A_0}'(A_i), & \text{für } 1 \le i \le n \\ 0 & , \text{für } i = n+1 \end{Bmatrix}$$, d. h. mit $\mathbf{A_0}(\neg A_{n+1}) = 1$ bzw.

$$\mathbf{A_1}(A_i) = \begin{Bmatrix} \mathbf{A_1}'(A_i), & \text{für } 1 \le i \le n \\ 1 & , \text{für } i = n+1 \end{Bmatrix}$$, d. h. mit $\mathbf{A_1}(A_{n+1}) = 1$,

wobei Klauseln, die sowohl A_{n+1} als auch $\neg A_{n+1}$ enthalten, auf jeden Fall erfüllt sind. Da die obige Annahme zum Widerspruch führt, müssen sowohl F_0' als auch F_1' als auch F unerfüllbar sein.

Wegen $A_{n+1} \notin F_0'$ und $\neg A_{n+1} \notin F_1'$ folgt damit aus (IV)

$\square \in \mathrm{Res}^*(F_0')$ und $\square \in \mathrm{Res}^*(F_1')$ $(*)$.

c) Werden nun A_{n+1} bzw. $\neg A_{n+1}$ überall, wo sie bei der Bildung von F_0' bzw. F_1' eliminiert wurden, wieder eingesetzt, so entstehen die ursprünglichen Klauselmengen F_0 bzw. F_1.

Da in F_0 bzw. F_1 die Partner A_{n+1} bzw. $\neg A_{n+1}$ zum Resolvieren fehlen, bleiben A_{n+1} bzw. $\neg A_{n+1}$ bei jeder Resolventenbildung erhalten, sofern sie in einer der Elternklauseln des Resolventen vorkommen.

Weil Klauseln aus F - F' bei der Herleitung von $\square$ in $\mathrm{Res}^*(F_0')$ und in $\mathrm{Res}^*(F_1')$ zu berücksichtigen waren (als Voraussetzung für den Fall 2), ergibt sich gegenüber $(*)$ die Änderung

$\square \cup \{A_{n+1}\} = \{A_{n+1}\} \in \mathrm{Res}^*(F_0)$ **und** gleichzeitig

$\square \cup \{\neg A_{n+1}\} = \{\neg A_{n+1}\} \in \mathrm{Res}^*(F_1)$.

Nun sind aber F_0 und F_1 Teilmengen der Klauselmenge F. Also ist auch $\{A_{n+1}\} \in \mathrm{Res}^*(F)$ sowie $\{\neg A_{n+1}\} \in \mathrm{Res}^*(F)$, und aus Definition 6.4 und 6.6 folgt damit

$\square \in \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^*(F))$, d. h. $\boldsymbol{\square \in \mathrm{Res}^*(F)}$.

C Unerfüllbarkeit aussagenlogischer Formeln in KNF

Definition 6.9: Unerfüllbarkeitstest für aussagenlogische Formeln in KNF

$:=$ der Test beliebiger aussagenlogischer Formeln F in KNF auf Unerfüllbarkeit mit folgendem Ablauf:

(1): Berechnung einer zu F äquivalenten **Klauseldarstellung** F_K.

(2): Als **Anfangswerte** für den Test werden gesetzt: $n:=0$; $R_0:=F_K$.

(3): Die folgende **Programm-Schleife** wird solange durchlaufen, bis eine der Abbruchbedingungen erfüllt ist:

repeat
$n:=n+1$; $R_n:=\mathrm{Res}(R_{n-1})$;
until $\square\in R_n$ **or** $R_n=R_{n-1}$;

(4): Die Ausgabe des Test-**Ergebnisses** geschieht wie folgt:

if $\square\in R_n$ **then** Ausgabe "F ist unerfüllbar"
else Ausgabe "F ist erfüllbar".

Bemerkungen:

a) Der Unerfüllbarkeitstest gemäß Definition 6.9 ist auf jede aussagenlogische Formel in KNF anwendbar.
b) Da Res*(F) endliche Mächtigkeit besitzt (vgl. Satz 6.4), stoppt der Unerfüllbarkeitstest stets nach endlich vielen Schleifendurchläufen.
c) Der Unerfüllbarkeitstest ist nicht effizient, d. h. die Rechenzeit kann sich, abhängig von der Länge der Formel, exponentiell entwickeln.
d) Der Test ist nicht konstruktiv, d. h. im **else**-Fall liefert er keine erfüllende Belegung.(siehe Satz 6.4)

Beispiel 6.4: (Unerfüllbarkeitstest für eine Formel in KNF)

a) Eingabe: Gegeben sei die aussagenlogische Formel in KNF

$$F = (A\vee B\vee C) \wedge (\neg A\vee B\vee C) \wedge \neg C \wedge (\neg B\vee C)$$

(1): Eine zu F **äquivalente Klauselmenge** ist z. B.

$$F_K = \{\underbrace{\{A,B,C\}}_{=:K_1}, \underbrace{\{\neg A,B,C\}}_{=:K_2}, \underbrace{\{\neg C\}}_{=:K_3}, \underbrace{\{\neg B,C\}}_{=:K_4}\}$$

(2): Die **Anfangswerte** sind $n := 0$; $R_0 := F_K = Res^0(F_K)$.

(3): Ablauf der **Programm**-Schleife:

$n := 1$; $R_1 := Res(R_0) = \{\{A,B,C\},\{\neg A,B,C\},\{\neg C\},\{\neg B,C\}\}$
$\cup\{\{B,C\},\{A,B\},\{A,C\},\{\neg A,B\},\{\neg A,C\},\{\neg B\}\}$;

$n := 2$; $R_2 := Res(R_1) = R_1 \cup \{\{B\},\{A\},\{\neg A\}, \{C\}\}$;

$n := 3$; $R_3 := Res(R_2) = R_2 \cup \{\ \}$;

danach ist die Abbruchbedingung $\square \in R_3$ erfüllt:

(4): Die Ausgabe lautet gemäß (3): "F ist **unerfüllbar**".

b) Für das Ergebnis des Unerfüllbarkeitstestes ist es entscheidend, ob es eine Auswahl von Klauseln gibt, aus denen alleine $\square$ resolviert werden kann. Hier leisten das die Klauseln K_1, K_2, K_3, K_4 aus F_K sowie z. B. die Resolventen

$K_5 := (K_1 - \{A\}) \cup (K_2 - \{\neg A\}) = \{B,C\}$:

$K_6 := (K_5 - \{B\}) \cup (K_4 - \{\neg B\}) = \{C\}$;

$K_7 := (K_6 - \{C\}) \cup (K_3 - \{\neg C\}) = \square$.

Veranschaulichung als **Resolutions-Graph** (die Literale, welche eliminiert werden, sind zur Verdeutlichung jeweils unterstrichen):

$K_1=\{\underline{A}, B, C\}$ $K_2=\{\underline{\neg A}, B, C\}$

$K_5=\{\underline{B},C\}$ $K_4=\{\underline{\neg B},C\}$

$K_6=\{\underline{C}\}$ $K_3=\{\underline{\neg C}\})$

$\square$

Bemerkungen:

a) Zum Beweis der Unerfüllbarkeit einer Klauselmenge F genügt es offensichtlich, eine geeignete Teilmenge der Klauseln von Res*(F) zu berechnen, aus denen sich $\square$ durch Resolution herleiten lässt.

b) Wegen der (im Vergleich zur Allgemeingültigkeit) gegensätzlichen Problemstellung, wird im Resolutionskalkül gelegentlich der Begriff der Widerlegungs-Vollständigkeit verwendet.

Definition 6.10: Aussagenlogische Deduktion (auch Beweis) der leeren Klausel aus einer Klauselmenge F

$:=$ eine Folge $K_1,K_2,...,K_n$ aussagenlogischer Klauseln, für die gilt

(R1) $K_n = \square$ **und**

(R2) für alle K_i mit $i = 1,2,...,n$

ist **entweder** $K_i \in F$

oder ist K_i der Resolvent zweier Klauseln K_j, K_k der Folge $K_1,K_2,...,K_{n-1}$ mit $j,k<i$.

Bemerkungen:

a) Definition 6.10 führt zum **modifizierten Resolutionssatz**:
"Für jede aussagenlogische Klauselmenge F gilt:
F ist unerfüllbar gdw es gibt eine Deduktion von $\square$ aus F."

b) Es gibt unerfüllbare aussagenlogische Klauselmengen, die in jeder Deduktion der leeren Klausel (bzgl. der Anzahl der Aussagenvariablen) exponentiell viele Klauseln enthalten (nach **Schöning**).

c) Dies gilt z. B. für alle unerfüllbaren Formeln in kanonischer KNF, die stets alle Elementardisjunktionen enthalten. Bei n Aussagenvariablen enthält dann jede Deduktion der leeren Klausel ungefähr $2^n+2^{n-1}+...+2^1+2^0 = 2^{n+1}-1 \approx 2^{n+1}$ Klauseln.

d) Für eine weitere wichtige Gruppe von Formeln (vgl. Definition 6.11), ist die Unerfüllbarkeit mit fast nur linearem Aufwand nachweisbar.

Definition 6.11: Aussagenlogische Hornformel

$:=$ eine aussagenlogische Formel F in KNF, in der jede Disjunktion höchstens ein positives Literal enthält.

Beispiel 6.5: (Formeln mit und ohne Hornformeleigenschaft)

a) Um eine Hornformel handelt es sich bei der unter Verwendung von Klammerersparnis-Regeln abgekürzt geschriebenen Formel

$$F = (A\vee\neg B) \wedge (\neg C\vee\neg A\vee\neg E\vee D) \wedge (\neg A\vee\neg B) \wedge D \wedge \neg E.$$

b) Dagegen ist die ebenfalls abgekürzt geschriebene Formel

$$G = (B\vee\neg C) \wedge (A\vee C\vee\neg C) \wedge (\neg D\vee\neg A)$$

keine Hornformel, da $(A\vee C\vee\neg C)$ zwei positive Literale enthält.

c) Hornformeln lassen sich mit Hilfe der nullstelligen Junktoren **0** und **1** (mit $\mathbf{0}\equiv(A\wedge\neg A)$ und $\mathbf{1}\equiv(A\vee\neg A)$) darstellen als Konjunktionen über Implikationen. Dann gilt z. B. für die Formel F aus Teil a)

$$F \equiv (\neg B\vee A) \wedge (\neg(C\wedge A\wedge E)\vee D) \wedge (\neg(A\wedge B)\vee 0) \wedge (\neg 1\vee D) \wedge (\neg E\vee 0)$$
$$\equiv (B\rightarrow A) \wedge ((C\wedge A\wedge E)\rightarrow D) \wedge ((A\wedge B)\rightarrow 0) \wedge (1\rightarrow D) \wedge (E\rightarrow 0).$$

Definition 6.12: Erfüllbarkeitstest für Hornformeln

:= der Test aussagenlogischer Hornformeln mit folgendem Ablauf:

(1): Eingabe der zu testenden Hornformel F und Überführung von F in eine äquivalente **Konjunktion über Implikationen** F_I.
Vorbelegung aller Aussagenvariablen A_j in F_I mit $\mathbf{A}(A_j):=0$.

(2): **Anfangs-Markierung**: Alle Aussagenvariablen A_j, die in F_I in einer Implikation der Form $(1\rightarrow A_j)$ vorkommen, werden überall, wo sie auftreten, markiert, und es wird für sie gesetzt $\mathbf{A}(A_j):=1$.

(3): Es wird folgende **Programm-Schleife** durchlaufen:

while
es gibt in F_I eine Teilformel der Form $\{\neg A_1,\ldots,\neg A_n,A_{n+1}\}$, in der $A_1,\ldots,A_n$ markiert sind A_{n+1} aber nicht
oder es gibt in F_I eine Teilformel der Form $\{\neg A_1,\ldots,\neg A_n\}$, in der $A_1,\ldots,A_n$ markiert sind
do
if eine Teilformel der Form $\{\neg A_1,\ldots,\neg A_n\}$ erfüllt die Bedingung
then wird "nicht erfüllbar" ausgegeben und gestoppt
else A_{n+1} wird überall markiert und gesetzt $\mathbf{A}(A_{n+1}):=1$.

(4): Es wird "erfüllbar" ausgegeben und gestoppt.

Beispiel 6.6: (Erfüllbarkeitstest für Hornformeln)

a) Eingabe: die Hornformel

$$F = (A\vee\neg B) \wedge (\neg A\vee D\vee\neg B) \wedge (\neg C\vee\neg A) \wedge B \wedge \neg E.$$

(1): F besitzt die äquivalente **Konjunktion über Implikationen**
$F_I = (B\rightarrow A)\wedge((A\wedge B)\rightarrow D)\wedge((C\wedge A)\rightarrow 0)\wedge(1\rightarrow B)\wedge(E\rightarrow 0).$
Vorbelegung: $\mathbf{A}(A):=\mathbf{A}(B):=\mathbf{A}(C):=\mathbf{A}(D):=\mathbf{A}(E):=0.$

(2): **Anfangsmarkierung**:
Wegen $(1\rightarrow B)\in F_I$ wird B markiert und gesetzt $\mathbf{A}(B):=1$. Nun ist
$F_I = (B^1\rightarrow A)\wedge((A\wedge B^1)\rightarrow D)\wedge((C\wedge A)\rightarrow 0)\wedge(1\rightarrow B^1)\wedge(E\rightarrow 0).$

(3): **Erster Schleifendurchlauf**:
Wegen $(B^1 \to A)$ wird A markiert und gesetzt **A**(A):=1. Dann ist
$F_I = (B^1 \to A^2) \wedge ((A^2 \wedge B^1) \to D) \wedge ((C \wedge A^2) \to 0) \wedge (1 \to B^1) \wedge (E \to 0)$.

Zweiter Schleifendurchlauf:
Wegen $((A^2 \wedge B^1) \to D)$ wird D markiert und gesetzt **A**(D):=1.
Dann ist
$F_I = (B^1 \to A^2) \wedge ((A^2 \wedge B^1) \to D^3) \wedge ((C \wedge A^2) \to 0) \wedge (1 \to B^1) \wedge (E \to 0)$.

Danach ist die **Abbruchbedingung** der while-Schleife erfüllt, und es findet kein weiterer Schleifendurchgang statt.

(4): Es wird "**erfüllbar**" ausgegeben mit der erfüllenden Belegung **A**(C):=**A**(E):=0 und **A**(A):=**A**(B):=**A**(D):=1.

b) Eingabe: die Hornformel
$G = (A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee D \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge C \wedge \neg D$.

(1): G besitzt die äquivalente **Konjunktion über Implikationen**
$G_I = (C \to A) \wedge ((A \wedge C) \to D) \wedge ((B \wedge A) \to 0) \wedge (1 \to C) \wedge (D \to 0)$.
Vorbelegung: **A**(A):=**A**(B):=**A**(C):=**A**(D):=0.

(2): **Anfangsmarkierung**:
Wegen $(1 \to C) \in F_I$ wird C markiert und gesetzt **A**(C):=1. Nun ist
$G_I = (C^1 \to A) \wedge ((A \wedge C^1) \to D) \wedge ((B \wedge A) \to 0) \wedge (1 \to C^1) \wedge (D \to 0)$.

(3): **Erster Schleifendurchlauf:**
Wegen $(C^1 \to A)$ wird A markiert und gesetzt **A**(A):=1.
Dann ist
$G_I = (C^1 \to A^2) \wedge ((A^2 \wedge C^1) \to D) \wedge ((B \wedge A^2) \to 0) \wedge (1 \to C^1) \wedge (D \to 0)$.

Zweiter Schleifendurchlauf:
Wegen $((A^2 \wedge C^1) \to D)$ wird D markiert und gesetzt **A**(D):=1.
Dann ist
$G_I = (C^1 \to A^2) \wedge ((A^2 \wedge C^1) \to D^3) \wedge ((B \wedge A^2) \to 0) \wedge (1 \to C^1) \wedge (D^3 \to 0)$.

Dritter Schleifendurchlauf:
Wegen $(D^3 \to 0)$ wird "**unerfüllbar**" ausgegeben und gestoppt.

(4) wird demgemäß nicht mehr ausgeführt.

Definition 6.13: Regeln, Fakten, Zielklauseln

$:=$ **Regeln** sind Klauseln, die genau ein positives und mindestens ein negatives Literal enthalten;
Fakten sind Klauseln, die genau ein positives Literal enthalten;
Zielklauseln sind Klauseln, die nur negative Literale enthalten.

Beispiel 6.7: (Hornformeln in Klauseldarstellung)

a) Die Hornformel aus Beispiel 6.5a) lautet in **Klauseldarstellung**

$$F = (A\vee\neg B) \wedge (\neg C\vee\neg A\vee\neg E\vee D) \wedge (\neg A\vee\neg B) \wedge D \wedge \neg E$$
$$\equiv F_K = \{\{A,\neg B\}, \{\neg C,\neg A,\neg E,D\}, \{\neg A,\neg B\}, \{D\}, \{\neg E\}\}.$$

b) Weitere Hornformeln, die zu F_K **äquivalent** sind, lauten z. B.

$$F_K \equiv (A\vee\neg B) \wedge (\neg A\vee\neg B) \wedge (\neg A\vee\neg E\vee\neg C\vee D) \wedge D \wedge \neg E \quad \text{und}$$
$$F_K \equiv (\neg A\vee\neg E\vee\neg C\vee D) \wedge (\neg B\vee A) \wedge \neg E \wedge (\neg B\vee\neg A) \wedge D.$$

c) Als Konjunktion über **Implikationen** dargestellt, ist z. B.

$$F \equiv \{\{\neg A,\neg E,\neg C,D\}, \{\neg B,A\}, \{\neg E\}, \{\neg B,\neg A\}, \{D\}\}$$
$$[\equiv (\neg A\vee\neg E\vee\neg C\vee D) \wedge (\neg B\vee A) \wedge \neg E \wedge (\neg B\vee\neg A) \wedge D$$
$$\equiv (\neg(A\wedge E\wedge C)\vee D) \wedge (\neg B\vee A) \wedge (\neg E\vee 0) \wedge (\neg(B\wedge A)\vee 0) \wedge (\neg 1\vee D)]$$
$$\equiv ((A\wedge E\wedge C)\rightarrow D) \wedge (B\rightarrow A) \wedge (E\rightarrow 0) \wedge ((B\wedge A)\rightarrow 0) \wedge (1\rightarrow D).$$

Bemerkungen:

a) Hornformeln in Klauseldarstellung bestehen nur aus Regeln, Fakten und Zielklauseln.

b) Hornformeln sind von besonderer Wichtigkeit in der logischen Programmierung.

c) Im Hinblick auf spätere Anwendungen wird der Beweis des folgenden Satzes 6.4 für Hornformeln in Klauseldarstellung durchgeführt.

Satz 6.4: (Korrektheit des Erfüllbarkeitstests für Hornformeln)

Der Erfüllbarkeitstest für Hornformeln nach Definition 6.13 ist korrekt und effektiv, d. h. der Test gibt für jede Hornformel F genau dann "erfüllbar" bzw. "unerfüllbar" aus, wenn sie erfüllbar bzw. unerfüllbar ist, und der Test stoppt, wenn F n Aussagenvariablen enthält, nach maximal n Markierungsschritten.

Beweis:

a) Enthält die **Klauseldarstellung** F_K der Hornformel F keine Fakten (bzw. die Darstellung als Konjunktion über Implikationen keine Disjunktion der Form A_i), so unterbleibt die Anfangsmarkierung, und F ist bereits durch die Vorbelegung in Schritt (1) erfüllt. Das ist der Grund für die Vorbelegung.

b) Enthält F_K **Fakten** der Form $\{A_j\}$ (bzw. Disjunktionen der Form A_j), so muss in jedem **Modell A** von F für solche A_j gesetzt werden **A**$(A_j):=1$. Das besorgt die Anfangs-Markierung in Schritt (2).

c) Die Schleife in Schritt (3) wird genau so lange durchlaufen, wie in F_K (noch) eine Regel oder eine Zielklausel vorkommt, in der alle negierten Aussagenvariablen markiert sind und damit endgültig den Wert 0 besitzen.

   Liegt eine **Zielklausel** vor, so stoppt demgemäß das Verfahren zu Recht mit der Ausgabe "**unerfüllbar**".

   Liegt eine Regel vor, so lässt sich diese nur noch erfüllen, wenn für ihr positives Literal A_{n+1} gesetzt wird: **A**$(A_{n+1}):=1$. Dies, verbunden mit der Markierung, erfolgt in Schritt (3).

d) Genau dann, wenn Schritt (3) nicht mit der Ausgabe "unerfüllbar" endet, ist die Belegung **A** ein Modell für F und in Schritt (4) erfolgt korrekterweise die Ausgabe "**erfüllbar**".

e) Der Aufwand in Schritt (1) bzw. in Schritt (2) und (3) ist, bei maximal n Markierungen, näherungsweise proportional zur Länge der Hornformel bzw. zur Anzahl der atomaren Formeln in ihr.

Bemerkungen:

a) Der Erfüllbarkeitstest für Hornformeln liefert bei erfüllbaren Formeln stets ein minimales Modell, d. h. eines mit den minimalen Wahrheitswerten für alle Aussagenvariablen.

b) Enthält eine Hornformel keine Zielklausel, so existiert für sie ein maximales Modell, d. h. ein Modell, in dem alle Aussagenvariablen den größtmöglichen Wahrheitswert 1 besitzen.

6.2 Mehrwertige Aussagenlogik

A Allgemeine Grundlagen

Bemerkungen:

a) In der klassischen Aussagenlogik gilt das **Extensionalität**s-Prinzip, d. h. der Wahrheitswert zusammengesetzter Aussagen hängt nur vom Wahrheitswert der einzelnen Aussagen ab, aber nicht von ihrer Bedeutung (= Intension).

b) Der Satz von der **Zweiwertigkeit** ist nicht immer realitätsnah (z. B. nicht in der Quanten-Physik). Seine Verneinung führt zur **intuitionistisch**en Logik, in der es u. a. keine Widerspruchsbeweise gibt, sowie zu mehrwertigen Logik-Systemen.

c) Zu den nichtklassischen Logiksystemen gehören u. a. auch die "**modale** Logik" mit den Junktoren "möglich" und "notwendig" sowie die "**temporale** Logik" mit Junktoren wie "immer" und "schließlich".

Beispiel 1.7: (Extensionale und intuitionistische Logik)

a) Die zusammengesetzte Aussage

   Wenn "Sand eine Flüssigkeit ist",
   dann "wird es im Norden kalt"

   ist im umgangssprachlichen Sinne nicht sinnvoll.

b) Die zusammengesetzten Aussagen

   "Hans wurde reich" und "Hans verließ das Land" sowie

   "Hans verließ das Land" und "Hans wurde reich"

   beschreiben umgangssprachlich u. U. verschiedene logische Zusammenhänge (z. B. abhängig von einer zeitlichen Reihenfolge).

c) Die Ergebnisse beim Werfen eines idealen Zahlenwürfels mit sechs Seitenflächen, die mit den Zahlen 1 bzw. 2 ... bzw. 6 beschriftet sind, können in einer 7-wertigen Logik, bei der die Wahrheitswerte {0, 1/6, 2/6, ..., 1} auftreten, wie folgt beschrieben werden (der Wahrheitswert entspricht dabei der Wahrscheinlichkeit, mit welcher der in der Aussage beschriebene Fall jeweils auftritt):

Aussage	Wahrheitswert
"Der Würfel zeigt keine der Zahlen 1,..,6 an"	0
"Der Würfel zeigt die Zahl 1 an"	1/6
…	…
"Der Würfel zeigt eine der Zahlen 1,..,6 an"	6/6

Definition 6.14: Klassische Logische Matrix ML

:= ein Sieben-Tupel **ML** = (**W**, **T**, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) mit einer Menge **W** von Wahrheitswerten, einer Menge **T** (wie true) von ausgezeichneten Wahrheitswerten, der Junktorbasis $\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$ und ein- bzw. zweistelligen Wahrheitsfunktionen f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 zur Festlegung der Werteverläufe der Junktoren $\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$.

Definition 6.15: Aussagenlogische Belegung s

:= eine Abbildung **s: V'→W**, wobei **V'** eine Teilmenge der Menge **V** aller Aussagenvariablen ist, d. h. **V'**$\subseteq$**V**.

Definition 6.16: Wahrheitswert A(F) einer aussagenlogischen Formel F bei einer Belegung s: V'→W

:= ein Wahrheitswert aus der Menge **W**, welcher für jede Formel F$\in$**Fml'** mit **Fml'** = {F|F enthält nur Aussagenvariablen aus **V'**}, wie folgt **rekursiv** berechnet wird:

(MW1) für F = A_i mit $A_i\in$**V'** gilt **A**(F) := **A**(A_i) := **s**(A_i).

(MW2) für F = $\neg$G mit G$\in$**Fml'** gilt **A**(F) := **A**($\neg$G) := f_1(**A**(G)).

(MW3) für F = (GoH) mit F,G$\in$**Fml'** und o$\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$ gilt

$$\mathbf{A}(F) = \mathbf{A}((G\wedge H)) := f_2(\mathbf{A}(G),\mathbf{A}(H)),$$
$$\mathbf{A}(F) = \mathbf{A}((G\vee H)) := f_3(\mathbf{A}(G),\mathbf{A}(H)),$$
$$\mathbf{A}(F) = \mathbf{A}((G\rightarrow H)) := f_4(\mathbf{A}(G),\mathbf{A}(H)),$$
$$\mathbf{A}(F) = \mathbf{A}((G\leftrightarrow H)) := f_5(\mathbf{A}(G),\mathbf{A}(H)).$$

Definition 6.17: Zu einer Formel F passende Belegung A

:= eine Belegung **A**, die für alle in F vorkommenden (aber evtl. auch noch für weitere) Aussagenvariablen definiert ist.

Definition 6.18: Gültigkeit einer Formel F unter einer (zu F passenden) Belegung A

:= eine Formel F ist unter einer (zu F passenden) Belegung **A** gültig gdw **A**(F)∈**T** (bzw. nicht gültig gdw **A**(F)∉**T**).

Andere Bezeichnungen:

A ist ein **Modell** für F gdw **A**(F)∈**T**. In Zeichen: $\models_{\mathbf{A}}$ F.

A ist kein Modell für F gdw **A**(F)∉**T**. In Zeichen: $\not\models_{\mathbf{A}}$ F.

Bemerkungen:

a) Die Menge **T** (wie true) der ausgezeichneten Wahrheitswerte übernimmt bezüglich der Gültigkeit von Formeln die Rolle der 1 in zweiwertigen Logik-Systemen.

b) Auch bei mehrwertigen Logik-Systemen wird i. Allg. davon ausgegangen, dass jede Formel unter jeder passenden Belegung genau einen festen Wahrheitswert besitzt.

c) Die Funktion f_1 für die Negation wird zu gegebener passender Belegung **A** i. Allg. entweder (nach Lukasiewicz, s. u.) symmetrisch gewählt, d. h. so dass gilt **A**(¬F) = f_1(**A**(F)) := max(**W**) - **A**(F) oder (nach Post, s. u.) zyklisch, d. h. mit **A**(¬F) := **A**(F) mod |**W**| + 1.

d) Als Funktion f_2 bzw. f_3 für die Konjunktion bzw. Disjunktion werden i. Allg. die Minimum- bzw. Maximumfunktion gewählt.

e) Für jede Wahl einer Logischen Matrix ist zu zeigen, ob sie bzgl. der Menge **W funktional vollständig** ist, d. h. ob sich jeder beliebige n-stellige Funktionsverlauf über Aussagenvariablen $A_1, \dots, A_n$ mit Hilfe der Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 erzeugen lässt.

Definition 6.19: Allgemeingültigkeit einer Formel F

:= eine (aussagenlogische) Formel F ist allgemeingültig, falls jede zu F passende Belegung **A** ein Modell für F ist.

Bezeichnung: $\models$ F, falls F allgemeingültig ist,
$\not\models$ F, falls F nicht allgemeingültig ist.

Bemerkungen:

a) In mehrwertigen Logik-Systemen sollten einige Formeln nicht mehr allgemeingültig sein wie z. B. (F∨¬F), ¬(F∧¬F) und (F↔¬¬F).

b) Andererseits sollten einige Formeln allgemeingültig bleiben wie z. B. $(F \rightarrow F)$ und $((F \wedge G) \rightarrow (F \vee G))$.

c) Die wichtigsten **Anwendungsgebiete** für mehrwertige Logiken liegen in der Mathematik, in der Physik (Unschärferelation, fluktuierendes Vakuum) und in der Informatik (KI, Expertensysteme).

d) Der **Beweisbarkeitsbegriff** sollte bei mehrwertigen aussagenlogischen Logik-Systemen so definiert werden, dass die Sätze von der Korrektheit und von der Vollständigkeit gelten.

B Dreiwertige Logik nach Lukasiewicz

Zum Logik-System:

Um 1920 definierte Lukasiewicz eine dreiwertige Logik mit den Wahrheitswerten **W** = {0, 1/2, 1}, den ausgezeichneten Wahrheitswerten **T** = {1} und der Junktormenge **J** = {$\neg$, $\rightarrow$}.

Zur Semantik:

Zu passenden Belegungen **A** sind die Junktoren $\neg$ und $\rightarrow$ bzgl. beliebiger Formeln F, G durch die Wahrheitsfunktionen f_1 und f_2 wie folgt definiert $\mathbf{A}(\neg F) = f_1(\mathbf{A}(F)) \coloneqq 1 - \mathbf{A}(F)$ und

$$\mathbf{A}((F \rightarrow G)) = f_2(\mathbf{A}(F), \mathbf{A}(G)) \coloneqq \min(1, 1+(\mathbf{A}(G)-\mathbf{A}(F)))$$

mit den **Wahrheitswerteverläufen**:

A(A)	**A**(B)	f_1(**A**(A))	**A**(B) - **A**(A)	f_2(**A**(A), **A**(B))
0	0	1	0	1
0	1/2		1/2	1
0	1		1	1
1/2	0	1/2	-1/2	1/2
1/2	1/2		0	1
1/2	1		1/2	1
1	0	0	-1	0
1	1/2		-1/2	1/2
1	1		0	1

Bemerkung:

Diese dreiwertige Logik ist **funktional unvollständig**. So ist nach Slupeki z. B. der Werteverlauf (1/2,1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2) mit den Funktionen f_1 und f_2 nicht herstellbar.

Zur Syntax:

Der Kalkül besitzt (nach Tarski und Wajsberg) die **Axiomenformen**

(A1) $(F \to (G \to F))$

(A2) $((F \to G) \to ((G \to H) \to (F \to H)))$

(A3) $(((F \to \neg F) \to F) \to F)$

(A4) $((\neg G \to \neg F) \to (F \to G))$

sowie als korrekte Regeln die **Abtrennungsregel** mit der Wirkung wie im Hilbert-Kalkül und die **Substitutionsregel** mit der Wirkung: auf Grund einer Formel-Substitution $F[A_i/G]$ wird die Aussagenvariable A_i überall, wo sie in der Formel F vorkommt, durch die Formel G ersetzt.

C n-wertige Logik-Systeme von Post

Zum Logik-System:

Um 1921 entwickelte Post mehrwertige Logik-Systeme mit Wahrheitswertemengen der Form $\mathbf{W} = \{1, 2, \ldots, n\}$ und ausgezeichneten Mengen der Form $\mathbf{T} = \{1, 2, \ldots, s\}$ für endliches $n \geq 3$ und $1 \leq s < n$ sowie mit der Junktorbasis $\mathbf{J} = \{\neg, \vee\}$.

Zur Semantik:

Zu passenden Belegungen **A** sind $\neg$ und $\vee$ bzgl. beliebiger Formeln F, G durch die Wahrheitsfunktionen f_1, f_2 wie folgt definiert

$$\mathbf{A}(\neg F) = f_1(\mathbf{A}(F)) \coloneqq (\mathbf{A}(F) \bmod n) + 1 \qquad \text{und}$$

$$\mathbf{A}((F \vee G)) = f_2(\mathbf{A}(F), \mathbf{A}(G)) \coloneqq \min(\mathbf{A}(F), \mathbf{A}(G)).$$

Bemerkung:

Abweichend vom üblichen Gebrauch nimmt bei Post'schen Logik-Systemen der Wahrheitsgehalt mit abnehmendem Wahrheitswert zu.

Wahrheitswerteverläufe:

A(A)	**A**(B)	f_1(**A**(A))	f_2(**A**(A), **A**(B))
1	1	2	1
⋮	⋮		⋮
1	n		1
2	1	3	1
2	2		2
⋮	⋮		⋮
2	n		2
⋮	⋮		⋮
n-1	1	n	1
n-1	2		2
⋮	⋮		⋮
n-1	n-1		n-1
n-1	n		n-1
n	1	1	1
⋮	⋮		⋮
n	n		n

Bemerkungen:

a) Die n-wertige Logik nach Post ist **funktional vollständig**.

b) Die Syntax und der Beweisbarkeitsbegriff sind ähnlich konstruiert wie beim Logik-System von Lukasiewicz.

D Unendlich-wertige Aussagenlogik:

Zum Logik-System:

Vor 1935 schufen Lukasiewicz und Tarski ein Logik-System zur Junktormenge **J** = $\{\neg, \rightarrow\}$ mit der Menge **W** = $\{x|x\in[0,1]\}$ von unendlich vielen Wahrheitswerten und mit der ausgezeichneten Menge **T** = {1}, wobei jeder Wahrheitswert die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der ein (z. B. durch eine Formel beschriebener) Tatbestand zutrifft.

Zur Semantik:

Für die Allgemeingültigkeit von Formeln gilt wie üblich:

$\models F$ gdw **A**(F)$\in$**T** für jede zu F passende Belegung **A**
gdw **A**(F)=1 für jede zu F passende Belegung **A**.

Bemerkung:

Zu unendlich vielen Wahrheitswerten gibt es unendlich viele Wahrheitswerteverläufe, die nicht mehr alphabetisch sortierbar sind, so dass der Begriff der funktionalen Vollständigkeit seinen Sinn verliert.

Zur Syntax:

Dem unendlichwertigen Kalkül liegen die Axiomenformen (A1), (A2) und (A4) aus der obigen dreiwertigen Logik zugrunde ergänzt um

(A3') $(((F \rightarrow G) \rightarrow G) \rightarrow ((G \rightarrow F) \rightarrow F)))$

sowie als korrekte Regeln die **Abtrennungsregel** und die **Substitutionsregel** mit derselben Wirkung wie oben beschrieben.

Beispiel 6.7: (Unendlichwertige Logik)

In einem Expertensystem zur Diagnose von Ohrenkrankheiten wurden am Aachener Klinikum Aussagen über die klinisch erfassbaren Symptome etwa wie folgt mit Aussagenvariablen identifiziert

A_1 := "Patient hat hohes Fieber";

A_2 := "das rechte Ohr ist angeschwollen";

A_3 := "das linke Ohr ist zeitweilig gehörlos";

…

Die Beschreibung der für den Zustand eines Patienten maßgeblichen **Krankheitsmerkmale** entspricht dabei einer Formel, in der eine Teilmenge der Aussagenvariablen vorkommt.

Der augenblickliche **Zustand** eines Patienten wird durch eine zur gegebenen Formel passende Belegung **A** beschrieben, und der Wahrheitswert der Formel gibt die Wahrscheinlichkeit an,mit der die in der Formel ausgedrückte Diagnose zutrifft.