Prof. Dr. M. Reineke
Dr. M. Boos **WiSe 2014/15**

Übungen zur Vorlesung „Kommutative Algebra“

8. Selbsttest

Keine Abgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen je wahr oder falsch sind und kreuzen Sie Ihre Wahl an (wahr / falsch).

Es seien A ein Ring, K ein Körper, $B := K[X_1, ..., X_n]$, M, N A-Moduln, S ein multiplikatives System, $\mathfrak{p}$ ein Primideal, $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal und $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in A.

- Von Ringen und Idealen

◯◯ a) $\mathbb{Z}$ ist ein lokaler, noetherscher Ring.

◯◯ b) Maximale Ideale sind primär und ihre Radikale sind prim.

◯◯ c) In artinschen Ringen gibt es immer Primärzerlegungen.

◯◯ d) Ideale sind die Untermoduln von Ringen (als Moduln über sich selbst).

◯◯ e) Hauptidealringe sind immer noethersch, aber nicht immer lokal.

◯◯ f) Die Lokalisierung eines noetherschen Rings an einem Primideal ist noethersch.

◯◯ g) Es gibt unendlich aufsteigende Idealketten, sobald A nicht noethersch ist.

◯◯ h) $A/\mathfrak{m}$ ist artinsch.

◯◯ i) Die Menge der nilpotenten Elemente bildet ein Ideal in A.

◯◯ j) Jeder Ring besitzt ein echtes Ideal $\neq \{0\}$.

◯◯ k) Lokale Ringe haben nur endlich viele Ideale.

◯◯ l) Es gibt Nullteiler, die nicht nilpotent sind.

- Von Moduln und Algebren

◯◯ a) Tensorieren mit flachen Moduln ist rechtsexakt.

◯◯ b) Freie Moduln über noetherschen Ringen sind noethersch.

◯◯ c) Ist ein treuer A-Modul noethersch, dann ist A auch noethersch.

◯◯ d) Lokalisieren ist links- aber nicht rechtsexakt.

◯◯ e) Algebren vom endlichen Typ sind endlich.

◯◯ f) Das Ringerzeugnis von x_1, x_2 ist $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$.

◯◯ g) $\mathbb{R}[X] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[X]$.

◯◯ h) Algebraische Elemente sind ganz.

◯◯ i) $3/4$ ist ganz über $\mathbb{Z}$.

◯◯ j) Es gibt freie $A[x]$-Moduln.

◯◯ k) Ist M noethersch, dann besitzt M eine Kompositionsreihe.

◯◯ l) Jeder K-Vektorraum hat eine Kompositionsreihe und ist dementsprechend artinsch und noethersch.

- Von Nullstellen und Fundamentalkorrespondenz

◯◯ a) $\mathrm{Spec}B = \mathbb{A}^n$

◯◯ b) Nullstellenmengen von Polynomen in B sind abgeschlossen bzgl. der Zariskitopologie.

◯◯ c) Per Fundamentalkorrespondenz korrespondieren Radikalideale zu algebraischen Teilmengen.

◯◯ d) $K[X, Y]/(X - Y) \cong K[T]$

◯◯ e) Prime Ideale korrespondieren zu irreduziblen algebraischen Mengen.

◯◯ f) Ein Primideal ist immer auch Radikalideal.

◯◯ g) In B ist $(X_1 - a_1, .., X_n - a_n)$, $a_i \in K$ prim.

◯◯ h) Die Nullstellenmenge von $(X - a) \subseteq K[X]$ ist $\{a\}$.

◯◯ i) $V(f \cdot g) = V(f) \cup V(g)$, $f, g \in B$

◯◯ j) Bei Nullstellenmengenbildung kehren sich Inklusionen um.

◯◯ k) $B/\mathfrak{b}$ ist noethersch ($\mathfrak{b}$ Ideal in B).

◯◯ l) Alle Ideale in B sind endlich erzeugt.