Maß- und Integrationstheorie

Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt dient der Wiederholung. Die Abgabe ist nicht verpflichtend.

Aufgabe 1 *(Mengensysteme)*
Zeigen oder wiederlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge Ω und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$.

  (i) Dann ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

  (ii) Dann ist $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

(b) Seien $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $A \subset \Omega$. Dann ist $\sigma(\{A\}) = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$.

(c) Seien $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \,:\, A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}$.

  (i) Dann ist $\mathcal{A}$ ein Ring

  (ii) Dann ist $\mathcal{A}$ eine Algebra

  (iii) Dann ist $\mathcal{A}$ genau dann eine σ-Algebra, wenn Ω endlich ist.

(d) Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Seien μ und ν zwei endliche Maße auf $\mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann ist auch $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Aufgabe 2 *(Borel-messbarkeit)*
Zeigen oder wiederlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.

  (i) Jede positive Funktion ist messbar.

  (ii) Jede überabzählbare Menge ist enthalten in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

  (iii) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält alle Intervalle.

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei Funktionen.

  (i) Sei $\mathcal{A} := \{\emptyset, \Omega\}$. Dann sind die $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen genau die konstanten Funktionen.

  (ii) Ist $f + g$ definiert und messbar, dann sind auch f und g messbar.

(iii) Sind f und g messbar, dann ist $\{\omega \in \Omega \,:\, f^2(\omega) \leqslant g(\omega)\} \in \mathcal{A}$.

(iv) Ist f^2 messbar, dann ist auch f messbar.

(v) Ist f^3 messbar, dann ist auch f messbar.

(vi) Ist f messbar, dann ist $\{f(B) \,:\, B \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf $\bar{\mathbb{R}}$.

(vii) Sind f und g messbar, dann ist auch $f\mathbb{1}_{\{g>c\}}$, wobei $c > 0$ konstant ist, messbar.

(viii) Ist $f\mathbb{1}_{\{|f|\leqslant n\}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ messbar, dann ist auch f messbar.

(iv) Ist f_α für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, dann ist auch $\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} f_\alpha$ messbar.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Dann ist f Borel-messbar.

(d) Jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

(e) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist abzählbar.

(f) $\{x \in \mathbb{R} \,:\, e^x \leqslant z\}$ ist eine Borel-Menge.

(g) Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht-leer. Dann ist $m(\mathcal{O}) > 0$, wobei m das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Aufgabe 3 *(Integrale)*
Zeigen oder wiederlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $\mathcal{B}([1,\infty)) := \{A \cap [1,\infty) \,:\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ und definiere

$$\mu(A) := \int_A \frac{1}{x} \mathrm{d}m(x), \quad A \in \mathcal{B}([1,\infty)),$$

wobei m das Lebesgue-Maß auf $[1,\infty)$ bezeichnet.

(i) μ ist ein Maß auf $\mathcal{B}([1,\infty))$.

(ii) Der Maßraum ist endlich.

(iii) Der Maßraum ist σ-endlich.

(b) Sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(n) = 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\int_{\mathbb{N}} f \mathrm{d}\mu = 1$.

(c) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Dann ist f integrierbar.