

Jetzt soll der Begriff der „Kongruenz“ bzw. Euklids vage Vorstellung vom „Zur Deckung bringen“ präzisiert werden.

Ich stelle zunächst Hilberts Version vor, wähle aber anschließend einen anderen, etwas anschaulicheren Weg.

Hilberts 3. Axiomengruppe: Die Axiome der Kongruenz

PRIMITIVER TERM: Es gibt eine Beziehung zwischen Strecken, die man „kongruent“ (in Zeichen: „ \cong “) nennt. Jede Strecke \overline{AB} ist zu sich selbst kongruent.

III.1: Liegen die Punkte A, B auf der Geraden g und A' auf der Geraden g' , so gibt es auf einem gegebenen (durch A' definierten) Halbstrahl von g' einen Punkt B' mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

III.2: Ist $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ und $\overline{A''B''} \cong \overline{AB}$, so ist auch $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B''}$.

III.3: Ist $A - B - C$ und $A' - B' - C'$, sowie $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, so ist auch $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

Auch zwischen Winkeln wird eine Beziehung gefordert, die man „kongruent“ nennt (neuer PRIMITIVER TERM).

III.4: Ist ein Winkel $\angle BAC$ gegeben, sowie eine Gerade g' , eine durch g' bestimmte Halbebene, ein Punkt A' auf g' und ein durch A' bestimmter Halbstrahl $A'B'$ auf g' , so gibt es genau einen ebenfalls von A' ausgehenden Halbstrahl $A'C'$, so dass $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ ist und die inneren Punkte dieses Winkels in der gegebenen Halbebene liegen.

Außerdem ist jeder Winkel $\angle BAC$ zu sich selbst kongruent.

III.5: (SWS) Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ gelten, so ist auch $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Anstatt dieser recht abstrakten und nicht besonders gut motivierten Axiome werden wir hier den Begriff der „Bewegung“ benutzen und dabei wieder Schreibweisen aus der Mengenlehre benutzen. Wir denken dabei an Verschiebungen (Translationen), Drehungen (Rotationen) und Spiegelungen (Reflektionen).

Primitiver Term „Bewegung“:

Wir fordern die Existenz gewisser Abbildungen von \mathcal{E} auf sich, die wir *Bewegungen* nennen.

Bewegungs-Axiome:

B-1) Die Menge \mathcal{B} aller Bewegungen bildet eine Gruppe.

Insbesondere ist die identische Abbildung eine Bewegung, jede Bewegung ist bijektiv und ihre Umkehrabbildung ist wieder eine Bewegung.

B-2) Gilt $A - B - C$ und ist $\varphi \in \mathcal{B}$, so gilt auch $\varphi(A) - \varphi(B) - \varphi(C)$.

Bewegungen bilden also Geraden auf Geraden ab, und sie erhalten die Anordnung auf den Geraden. Insbesondere werden auch Strecken auf Strecken und Strahlen auf Strahlen abgebildet, denn all diese Mengen werden mit Hilfe der „zwischen“-Beziehung definiert.

B-3) Es seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und O, P, Q drei ebenfalls nicht-kollineare Punkte. Dann gibt es genau eine Bewegung φ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varphi(A) = O$.
2. $\varphi(B) \in \vec{OP}$.
3. $\varphi(C) \in H(OP, Q)$.

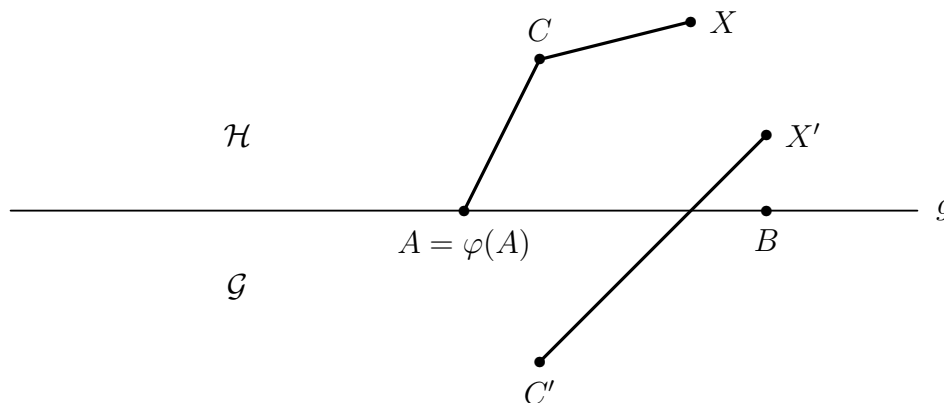
Dieses Axiom wird von der (anschaulich klaren) Existenz von Translationen, Rotationen und Reflektionen motiviert.

Axiom B-3 ist sehr weitreichend!

Sei etwa $g = AB$ eine feste Gerade und \mathcal{H} und \mathcal{G} die beiden durch g bestimmten Halbebenen. Ist C ein beliebiger Punkt in \mathcal{H} , so gibt es genau eine Bewegung φ , die A auf A , B auf einen Punkt $B' \in \vec{AB}$ und C nach \mathcal{G} abbildet.

3.18 Satz. *Unter den gerade beschriebenen Bedingungen gilt:*

1. Für alle $X \in \mathcal{E} \setminus g$ liegen X und $\varphi(X)$ auf verschiedenen Seiten von g .
2. Es ist $\varphi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{E}}$.
3. Für alle $X \in g$ ist $\varphi(X) = X$.



BEWEIS: φ bildet offensichtlich die Gerade g auf sich ab, und das gilt dann auch für φ^{-1} .

1) Sei $X \in \mathcal{H}$, $X \neq C$. Dann ist $\overline{CX} \cap g = \emptyset$.

Annahme: $X' := \varphi(X) \in \mathcal{H}$. Für $C' := \varphi(C)$ gilt dann: $\overline{C'X'} \cap g \neq \emptyset$. Also gibt es ein $Y' \in g$ mit $C' - Y' - X'$. Weil $\varphi(\overline{CX}) = \overline{C'X'}$ ist, muss es ein $Y \in \overline{CX}$ mit $\varphi(Y) = Y'$ geben. Da auch φ^{-1} die Gerade g auf sich abbildet, muss Y auf g liegen, obwohl $Y \subset \overline{CX} \subset \mathcal{E} \setminus g$ ist. Das ist ein Widerspruch!

Jedes $X \in \mathcal{H}$ wird also nach \mathcal{G} abgebildet. Analog folgt, dass jedes $Y \in \mathcal{G}$ nach \mathcal{H} abgebildet wird.

2) $\psi := \varphi \circ \varphi$ ist eine Bewegung, die A fest lässt, B nach \overrightarrow{AB} und \mathcal{H} nach \mathcal{H} abbildet. Das tut auch die Identität. Aber es gibt nach Axiom B-3 nur eine Bewegung mit dieser Eigenschaft. Also ist $\varphi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{E}}$.

3) **Annahme:** Es gibt ein $X \in g$, so dass $X' := \varphi(X) \neq X$ ist. Dann ist $\varphi(X') = X$, und es gibt drei Möglichkeiten:

a) Ist $A - X - X'$, so ergibt nochmalige Anwendung von φ : $A - X' - X$. Beides zugleich kann aber nicht gelten.

b) Ist $A - X' - X$, so führt das auf die gleiche Weise zu einem Widerspruch.

c) $X' - A - X$ kann aber auch nicht gelten, weil φ den Strahl \overrightarrow{AB} auf \overrightarrow{AB} abbildet. Also war die Annahme falsch. ■

Definition.

Eine Bewegung, die eine Gerade g punktweise festlässt und die durch g bestimmten Halbebenen miteinander vertauscht, heißt *Spiegelung* an der Geraden g .

3.19 Satz. Zu jeder Geraden gibt es genau eine Spiegelung.

BEWEIS: Die Existenz haben wir oben gezeigt, die Eindeutigkeit folgt direkt aus Axiom B-3. ■

Unter einer *geometrischen Figur* verstehen wir eine beliebige Teilmenge von \mathcal{E} . Ist \mathcal{F} eine geometrische Figur und φ eine Spiegelung, so nennt man $\varphi(\mathcal{F})$ das *Spiegelbild* von \mathcal{F} .

Definition. Zwei geometrische Figuren \mathcal{F} und \mathcal{F}' heißen *kongruent* (in Zeichen: $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$), falls es eine Bewegung $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ mit $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ gibt.

Aus den Gruppeneigenschaften von \mathcal{B} folgt trivial:

Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation.

3.20 Folgerung.

Ist $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^*$ und $\mathcal{F}' \cong \mathcal{F}^*$, so ist auch $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$.

Das ist Axiom 1 von Euklid: *Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.*

3.21 Satz.

1. Zwei Strecken \overline{AB} und \overline{CD} sind genau dann kongruent, wenn es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$ oder eine Bewegung ψ mit $\psi(A) = D$ und $\psi(B) = C$ gibt.
2. Sind die Strahlen \vec{AB} und \vec{CD} kongruent vermöge einer Bewegung φ , so ist auf jeden Fall $\varphi(A) = C$.

BEWEIS: 1) Da jede Bewegung bijektiv ist und die „zwischen“-Beziehung respektiert, ist die erste Aussage klar.

2) Wir nehmen an, es wäre $\varphi(A) \neq C$. Dann muss es ein $Y \in \vec{AB}$ mit $Y \neq A$ und $\varphi(Y) = C$ geben. Für jedes X mit $X - A - Y$ ist dann

$$\varphi(X) - \varphi(A) - \varphi(Y) = C,$$

wobei $\varphi(A) \in \vec{CD}$ und $\varphi(X)$ nicht auf dem Strahl \vec{CD} liegt. Das kann aber nicht sein! ■

Wir können nicht beweisen, dass es – wenn $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ist – eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$ gibt. Die Anschauung sagt uns jedoch, dass das der Fall sein müsste (und bei Hilbert ist ja auch $\overline{AB} = \overline{BA}$).

Es ist daher Zeit für ein weiteres Bewegungs-Axiom:

B-4) Zu je zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(B) = A$.

Jetzt ist klar:

Ist $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, so gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$.

Man kann in diesem Fall sogar noch mehr sagen: Die Werte von φ auf \overline{AB} sind durch die Zuordnung $A \mapsto C$ und $B \mapsto D$ schon eindeutig festgelegt. Das ergibt sich aus dem nächsten Satz.

3.22 Satz über das Abtragen von Strecken. *Es sei eine Strecke \overline{AB} und ein Strahl \vec{OP} gegeben. Dann gibt es genau einen Punkt $Q \in \vec{OP}$ mit $\overline{AB} \cong \overline{OQ}$.*

BEWEIS: 1) Existenz:

Nach Axiom B-3 existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = O$ und $\varphi(B) \in \vec{OP}$. Setzt man $Q := \varphi(B)$, so ist $\overline{AB} \cong \overline{OQ}$.

2) Eindeutigkeit:

Es gebe zwei Bewegungen φ und ψ mit $\varphi(A) = \psi(A) = O$ und $B'_1 := \varphi(B) \in \vec{OP}$ und $B'_2 := \psi(B) \in \vec{OP}$. Dann ist auch $\varrho := \psi \circ \varphi^{-1}$ eine Bewegung, und es gilt:

$$\varrho(O) = O \quad \text{und} \quad \varrho(B'_1) = B'_2.$$

Damit bildet ϱ die Gerade OP auf sich ab, und es gibt nur noch zwei Möglichkeiten:

1. Bildet ϱ einen Punkt $R \in \mathcal{E} \setminus OP$ auf einen Punkt der gleichen Halbebene ab, so muss $\varrho = \text{id}_{\mathcal{E}}$, also $\varphi = \psi$ sein. Dann ist natürlich $B'_1 = B'_2$.
2. Bildet ϱ alle Punkte der einen Halbebene in die andere Halbebene ab, so ist ϱ die Spiegelung an der Geraden OP . Dann lässt ϱ die Gerade OP punktweise fest, und auch in diesem Falle ist $B'_1 = B'_2$.

Also bilden alle Bewegungen, die A auf O und B auf einen Punkt von \vec{OP} abbilden, B auf den gleichen Punkt ab. ■

Dieser Satz ist recht wichtig!

Zunächst wollen wir jedoch die Konsequenzen für die Strecken-Kongruenz untersuchen:

Sei $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Dann können wir eine Abbildung $f : \overline{AB} \rightarrow \overline{CD}$ wie folgt definieren. Es sei $f(A) := C$, und für $X \in \overline{AB}$ mit $X \neq A$ sei $f(X) \in \overline{CD}$ derjenige eindeutig bestimmte Punkt, der die Beziehung $\overline{AX} \cong \overline{Cf(X)}$ erfüllt. Insbesondere ist dann $f(B) = D$. Wie wir außerdem gesehen haben, gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$. Dann gilt für $A - X - B$:

$$C - \varphi(X) - D \quad \text{und} \quad \overline{AX} \cong \overline{C\varphi(X)}.$$

Also muss $f(X) = \varphi(X) \in \overline{CD}$ sein.

Auch der Vergleich von Strecken ist jetzt möglich: Sind zwei Strecken \overline{AB} und \overline{CD} gegeben, so gibt es genau einen Punkt $Q \in \overline{CD}$ mit $\overline{AB} \cong \overline{CQ}$. Dann muss genau eine der drei folgenden Aussagen zutreffen:

1. $Q = D$. Dann ist $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
2. Es ist $C - Q - D$. Dann sagt man: $\overline{AB} < \overline{CD}$.
3. Es ist $C - D - Q$. Dann sagt man: $\overline{AB} > \overline{CD}$.

Das entspricht genau Euklids Vorstellung vom Vergleich zweier Strecken.

Eine andere Anwendung des neuen Axioms ist die Addition und Subtraktion von Strecken:

3.23 Satz (über die Addition und Subtraktion von Strecken). Sei $A - B - C$ und $A' - B' - C'$. Ist $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, so ist auch $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

Das entspricht Euklids Axiom 2: Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.

BEWEIS: 1) Nach Voraussetzung existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(B) = B'$. Dann gilt aber:

$$A' - B' - \varphi(C) \quad \text{und} \quad A' - B' - C'.$$

Die Gerade $g' = A'B'$ wird durch B' in zwei Halbgeraden aufgeteilt. Dabei liegen $\varphi(C)$ und C' auf der gleichen Halbgeraden. Mit anderen Worten:

$$\text{Es ist} \quad \varphi(C) \in \overrightarrow{B'C'}.$$

Da $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ ist, muss $\varphi(C) = C'$ sein. Also ist auch $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

2) Ist $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, so wird das durch eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(C) = C'$ bewerkstelligt. Da die Werte von φ auf allen Zwischenpunkten eindeutig festgelegt sind, muß auch $\varphi(B) = B'$ sein. Daraus folgt die Behauptung.

■

Man könnte das salopp auch so formulieren:

Sind s, t und s', t' Strecken mit $s \cong s'$ und $t \cong t'$, so ist $s + t \cong s' + t'$. Ist umgekehrt $s + t \cong s' + t'$ und $t \cong t'$, so ist auch $s \cong s'$.

Definition. Seien ein Punkt $O \in \mathcal{E}$ und eine Strecke \overline{AB} gegeben. Die Menge

$$\mathcal{K} := \{P \in \mathcal{E} \mid \overline{OP} \cong \overline{AB}\}$$

heißt der *Kreis um O mit Radius \overline{AB}* .

Ein Punkt $Q \in \mathcal{E}$ liegt *im Inneren* des Kreises, wenn $Q = O$ oder $\overline{OQ} < \overline{AB}$ ist.

Der Punkt Q liegt *im Äußeren* des Kreises, wenn $\overline{OQ} > \overline{AB}$ ist.

Ein *Durchmesser* des Kreises ist eine Strecke \overline{XY} mit $X, Y \in \mathcal{K}$ und $X - O - Y$.

Unsere Definition des Kreises entspricht recht gut derjenigen von Euklid. Aber was besagt dann das Postulat III? Die Existenz eines Kreises bei gegebenem Mittelpunkt und Radius ist trivial. Anscheinend müssen wir Euklid doch noch etwas anders interpretieren.

Die Schwierigkeit liegt in dem Begriff „Linie“. Ich könnte mir vorstellen, dass Euklid in seiner Definition 15 eigentlich folgendes sagen wollte:

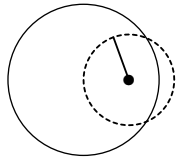
Revidierte Version von Euklids Definition 15.

Ein *Kreis mit Mittelpunkt* O ist eine Teilmenge $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Auf jedem von O ausgehenden Strahl liegt genau ein Punkt von \mathcal{K} .
2. Für je zwei Punkte $A, B \in \mathcal{K}$ ist $\overline{OA} \cong \overline{OB}$.

Bei dieser Formulierung ist die Existenz des Kreises nicht mehr selbstverständlich, aber es sind die typischen Eigenschaften einbezogen. Auch Euklids Definition 17 (des „Durchmessers“) bekommt nun einen Sinn: Jede durch O gehende Gerade besteht aus zwei verschiedenen von O ausgehenden Strahlen. Und wenn ein Kreis \mathcal{K} um O gegeben ist, dann müssen die beiden Strahlen den Kreis in Punkten A und B treffen, für die gilt: $A - O - B$. Die Strecke \overline{AB} nennt man dann einen *Durchmesser* von \mathcal{K} .

Im Modell \mathcal{M}_8 (bei dem das Innere des Einheitskreises als Ebene benutzt wird) existiert nicht jeder Kreis:



Das hängt damit zusammen, dass in diesem Modell die Bewegungsaxiome nicht erfüllt sind.

Euklid kann nun mit Hilfe seines Postulats III unseren Satz 3.22 beweisen. Bei uns folgt mit dem Satz über das Abtragen von Strecken die Existenz des Kreises und damit das Postulat.

Ist g eine Gerade durch O , so teilt sie den Rest der Ebene in zwei Halbebenen \mathcal{H}_- und \mathcal{H}_+ . Die beiden Figuren $\mathcal{K}_- := \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_-$ und $\mathcal{K}_+ := \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_+$ nennt man die durch g bestimmten *Halbkreise*. Ist φ die Spiegelung an g und $P \in \mathcal{K}_+$, so liegt $\varphi(P)$ in der Halbebene \mathcal{H}_- , und es ist $O\varphi(P) = \overline{\varphi(O)\varphi(P)} \cong \overline{OP}$. Also bildet φ die Halbkreise aufeinander ab, sie sind zueinander kongruent.

Wir wollen nun die Kongruenz von Winkeln näher untersuchen!

3.24 Satz. *Zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle EDF$ sind genau dann kongruent, wenn es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{DE}$ und $\varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$ oder eine Bewegung ψ mit $\psi(A) = D$, $\psi(B) \in \overrightarrow{DF}$ und $\psi(C) \in \overrightarrow{DE}$ gibt.*

BEWEIS: Die eine Richtung ist trivial, wir zeigen nur „ \implies “.

Sei $\alpha \cong \beta$, vermöge einer Bewegung φ . Wir nehmen an, es sei $\varphi(A) \neq D$. Dann gibt es (o.B.d.A.) ein $X \in \overrightarrow{AB}$ mit $X \neq A$ und $\varphi(X) = D$. (Der Fall $X \in \overrightarrow{AC}$ wird analog behandelt)

Wir wählen ein Q mit $A - X - Q$. Dann gehört auch Q zu \vec{AB} , und es ist

$$\varphi(A) - \varphi(X) (= D) - \varphi(Q).$$

Also liegen $\varphi(A)$ und $\varphi(Q)$ weder beide in \vec{DE} noch beide in \vec{DF} . Aber sie liegen beide auf einer Geraden durch D . Das ist nicht möglich!

Wir wissen somit, dass $\varphi(A) = D$ sein muss. Liegt $\varphi(B)$ in \vec{DE} , so muss $\varphi(C)$ in \vec{DF} liegen, und umgekehrt. ■

Die Situation ist so ähnlich wie bei der Kongruenz von Strecken. Um zeigen zu können, dass es ein φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \vec{DE}$ und $\varphi(C) \in \vec{DF}$ gibt, brauchen wir noch ein weiteres Bewegungsaxiom:

B-5) Zu jedem Winkel $\alpha = \angle BAC$ gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(\vec{AB}) = \vec{AC}$ und $\varphi(\vec{AC}) = \vec{AB}$.

Damit ist die Liste der Bewegungsaxiome vollständig!

3.25 Folgerung. *Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sich ihre Ecken so mit A, B, C bzw. A', B', C' bezeichnen lassen, dass es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$ gibt.*

Einander entsprechende Seiten und Winkel sind dann automatisch zueinander kongruent.

BEWEIS: Auch hier ist nur eine Richtung zu zeigen.

Sind die Dreiecke kongruent, so folgt wie im obigen Beweis, dass es (nach geeigneter Bezeichnung) eine Bewegung φ gibt, die A auf A' , B auf B' und C auf C' abbildet. Der Rest ist dann klar. ■

3.26 Satz (SWS). *Es seien zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ gegeben, mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.*

Dann sind die beiden Dreiecke kongruent.

BEWEIS: Weil $\alpha = \angle BAC$ und $\alpha' = \angle B'A'C'$ kongruent sind, gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(\vec{AB}) = \vec{A'B'}$ und $\varphi(\vec{AC}) = \vec{A'C'}$. Weil $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{AB} \cong A'\varphi(B)$ ist, folgt mit Satz 4.18, dass $\varphi(B) = B'$ ist. Und analog folgt, dass $\varphi(C) = C'$ ist. ■

Damit haben wir zugleich Euklids Proposition 4 bewiesen.

Definition. Ein Dreieck $\triangle ABC$ heißt *gleichschenkelig*, wenn $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ ist. Die Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle ABC$ nennt man die *Basiswinkel* des Dreiecks.

3.27 Folgerung (Euklids Proposition 5, „pons asinorum“). *In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent.*

Der BEWEIS kann nun nach Pappus geführt werden.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Vergleich von Winkeln:

Es seien zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle EDF$ gegeben. Dann gibt es eine (eindeutig bestimmte) Bewegung φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{DE}$ und $\varphi(C) \in H(DE, F)$. Drei Fälle sind möglich:

1. Ist $\varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$, so ist $\alpha \hat{=} \beta$.
2. Liegt $\varphi(C)$ in $H(DF, E)$, also in $I(\beta)$, so sagen wir: $\alpha < \beta$.
3. Liegen $\varphi(C)$ und E auf verschiedenen Seiten von DF , so liegt $\varphi(C)$ in $A(\beta)$, und wir sagen: $\alpha > \beta$.

Es ist klar, dass sich die drei Möglichkeiten gegenseitig ausschließen.

3.28 Satz.

1. $\alpha < \beta \iff \beta > \alpha$.
2. $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma \implies \alpha < \gamma$.

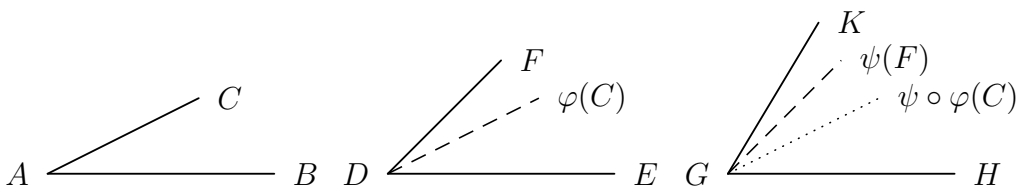
BEWEIS: 1) folgt aus 2):

Ist $\alpha < \beta$, so kann nicht $\beta \hat{=} \alpha$ sein. Wäre $\beta < \alpha$, so wäre $\alpha < \alpha$ (nach (2)), und das kann nicht sein, denn es ist ja $\alpha \hat{=} \alpha$. Also muss $\beta > \alpha$ sein.

2) Sei $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$.

Ist $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle EDF$ und $\gamma = \angle HGK$, so gibt es Bewegungen φ und ψ mit

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{DE} \text{ und } \varphi(C) \in I(\beta), \quad \text{sowie } \psi(\overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{GH} \text{ und } \psi(F) \in I(\gamma).$$



Es ist nur zu zeigen, dass es ein $C' \in \overrightarrow{AC}$ mit $\psi \circ \varphi(C') \in I(\gamma)$ gibt.

Dazu betrachten wir den (eindeutig bestimmten) Punkt $X \in G\overrightarrow{\psi(F)} \cap \overline{HK}$. Sei $X' := \psi^{-1}(X) \in \overrightarrow{DF}$ und $H' := \psi^{-1}(H) \in \overrightarrow{DE}$. Es gibt dann genau einen Punkt

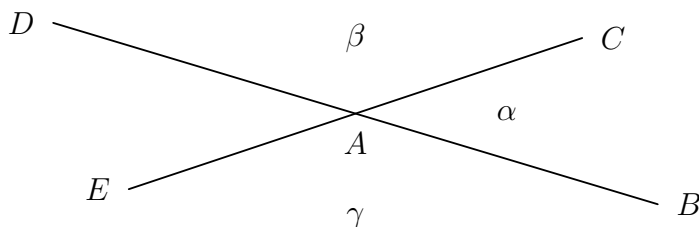
$Y' \in D\vec{\varphi}(C) \cap \overline{H'X'}$. Aus $H' - Y' - X'$ folgt: $H - \psi(Y') - X$. Mit $H - X - K$ ergibt sich daraus:

$$H - \psi(Y') - K.$$

Sei $C' := \varphi^{-1}(Y') \in \overrightarrow{AC}$. Dann ist $\psi \circ \varphi(C') = \psi(Y') \in I(\gamma)$. ■

Definition. Zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle CAD$ mit der Eigenschaft $D - A - B$ heißen *Nebenwinkel*.

Ist ein Winkel $\alpha = \angle BAC$ gegeben, so existiert nach Axiom A-4 ein Punkt D mit $B - A - D$, und $\beta := \angle CAD$ ist automatisch Nebenwinkel zu α . Wählt man noch einen Punkt E mit $E - A - C$, so ist auch $\gamma := \angle BAE$ ein Nebenwinkel zu α .



3.29 Satz. *Kongruente Winkel haben kongruente Nebenwinkel.*

BEWEIS: Wir betrachten zwei Paare von Nebenwinkeln:

$$\begin{aligned} \alpha = \angle BAC \quad \text{und} \quad \beta = \angle CAD \quad (\text{mit } D - A - B) \\ \text{und} \quad \alpha' = \angle B'A'C' \quad \text{und} \quad \beta' = \angle C'A'D' \quad (\text{mit } D' - A' - B'). \end{aligned}$$

Es sei $\alpha \cong \alpha'$. Dann gibt es (genau) eine Bewegung φ mit $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ und $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$, und es ist $\varphi(A) = A'$.

Wegen $D - A - B$ folgt: Ist $X \in \overrightarrow{AD}$, so gilt auch $X - A - B$, und daher $\varphi(X) - A' - \varphi(B)$ mit $\varphi(B) \in \overrightarrow{A'B'}$. Also ist $\varphi(X) - A' - B'$, und daher $\varphi(X) \in \overrightarrow{A'D'}$. Das heißt, φ bildet auch β auf β' ab. ■

Definition. Sei $D - A - B$ und $E - A - C$. Sind die Geraden DB und EC voneinander verschieden, so nennt man die Winkel $\angle BAC$ und $\angle DAE$ *Scheitelwinkel*.

3.30 Folgerung (Euklids Proposition 15). *Scheitelwinkel sind kongruent.*

BEWEIS: Wir benutzen die Bezeichnungen aus der Definition. Dann ist $\angle CAD$ Nebenwinkel zu $\angle BAC$ und auch zu $\angle DAE$. Also ist $\angle BAC \cong \angle DAE$. ■

Definition. Ein *rechter Winkel* ist ein Winkel, der zu einem seiner Nebenwinkel kongruent ist.

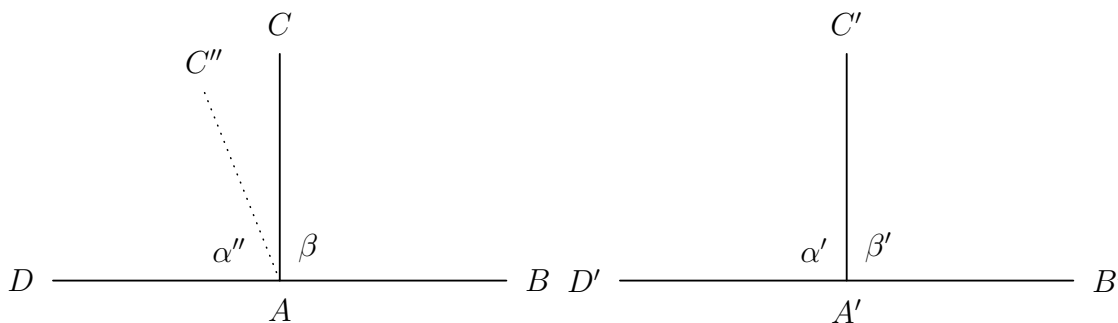
Wir können leicht rechte Winkel erzeugen:

3.31 Satz. Sei g eine Gerade, φ die Spiegelung an g und $X \in \mathcal{E} \setminus g$. Weiter sei A der (eindeutig bestimmte) Punkt in $\overline{X\varphi(X)} \cap g$. Sind $B, D \in g$ mit $D - A - B$, so ist $\angle BAX$ ein rechter Winkel.

BEWEIS: Übungsaufgabe! ■

3.32 Satz. Je zwei rechte Winkel sind kongruent.

BEWEIS: Wir betrachten zwei Paare von Nebenwinkeln (α, β) und (α', β') , mit $\alpha \cong \beta$ und $\alpha' \cong \beta'$.



Wir nehmen an, α sei nicht kongruent zu α' . O.B.d.A. sei $\alpha' < \alpha$. Dann gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A') = A$, $\varphi(\overrightarrow{A'D'}) = \overrightarrow{AD}$ und $\varphi(C') \in I(\alpha)$. Sei $\alpha'' = \angle DAC'' = \varphi(\angle D'A'C')$ und $\varepsilon := \angle C''AB$ der Nebenwinkel zu α'' .

Es ist $\beta < \varepsilon$ (da $C \in I(\varepsilon)$) und $\beta \cong \alpha$, also auch $\alpha < \varepsilon$. Mit $\alpha' < \alpha$ und $\alpha'' \cong \alpha'$ ist andererseits $\alpha'' < \alpha$. Zusammen ergibt das die Beziehung $\alpha'' < \varepsilon$.

Weil $\alpha' \cong \alpha''$ und β' Nebenwinkel zu α' ist, folgt: $\beta' \cong \varepsilon$. Es ist aber auch $\beta' \cong \alpha'$, und damit $\alpha'' \cong \alpha' \cong \varepsilon$. Das steht im Widerspruch zur obigen Aussage. ■

Euklids Postulat IV kann also als Satz bewiesen werden. Der Beweis geht auf Hilbert zurück. Nun sind wir auch in der Lage, den rechten Winkel als universelles Winkelmaß zu benutzen.

Definition. Ein *spitzer Winkel* ist ein Winkel, der kleiner als ein Rechter ist. Ein *stumpfer Winkel* ist einer, der größer als ein Rechter ist.

Im Gegensatz zur Situation bei den Strecken ist die Addition von Winkeln problematisch. Aus zwei nebeneinander liegenden Winkeln $\angle BAC$ und $\angle CAD$ möchte man gerne einen großen Winkel $\angle BAD$ machen. Das ist aber nur dann sinnvoll, wenn anschließend C im Innern des Winkels $\angle BAD$ liegt, und das ist nur möglich, wenn C und D auf der gleichen Seite von AB liegen. Außerdem soll natürlich D

nicht im Innern von $\angle BAC$ liegen, also müssen wir fordern, daß B und C auf der gleichen Seite von AD liegen. Andernfalls ist die Winkeladdition nicht durchführbar.

Da es keine gestreckten Winkel gibt, kann man auch nicht zwei Winkel zu einem gestreckten Winkel addieren. Euklid spricht statt von einem gestreckten Winkel immer von zwei Rechten. Wir können dieses Konzept präzisieren:

Definition. Zwei Winkel $\angle BAC$ und $\angle CAD$ mit einem Strahl \vec{AC} als gemeinsamem Schenkel *liegen nebeneinander*, wenn D und B auf verschiedenen Seiten von AC liegen. Zwei solche nebeneinander liegenden Winkel sind *zusammen gleich zwei Rechten* (bzw. *zusammen kleiner als zwei Rechte*), wenn sie Nebenwinkel sind (bzw. wenn C und D auf der gleichen Seite von AB liegen).

Zwei beliebige Winkel $\angle BAC$ und $\angle FEG$ sind zusammen gleich zwei Rechten (bzw. kleiner als zwei Rechte), wenn $\angle FEG$ kongruent zu einem neben $\angle BAC$ gelegenen Winkel $\angle CAD$ ist, so dass $\angle BAC$ und $\angle CAD$ zusammen gleich zwei Rechten (bzw. kleiner als zwei Rechte) sind.