Prof. Dr. S. Orlik **SoSe 2012**
MSc. Mark Kuschkowitz

Seminar: Konstruktion mit Zirkel und Lineal

(Vorläufiges) Programm

Sofern nicht anders angegeben, beziehen sich alle Nummerierungen auf das Buch [Ku] von E. Kunz.

17.04.: Das Konstruktionsproblem und die klassischen Beispiele.
(Literatur: [Ku, S. 1-7]) Judith Klein-Wiele

Man gebe die grundsätzliche Problemstellung, definiere die Menge $\hat{M}$ der konstruierbaren Punkte und zeige, dass $\hat{M} \subset \mathbb{C}$ ein Teilkörper ist. Anschließend stelle man die klassischen Konstruktionsprobleme vor.

24.04.: Zur Algebraisierung des Konstruktionsproblems, Teil I.
(Literatur: [Ku, S. 8-11]) Daria Mingels

Man definiere algebraisch abgeschlossene Teilkörper von $\mathbb{C}$ und zeige, dass es sich bei $\hat{M}$ um einen solchen handelt.
Man definiere durch eine Teilmenge erzeugte Teilkörper, durch Adjunktion erzeugte Teilkörper und Primkörper. Anschließend klassifiziere man alle möglichen Primkörper und beweise, dass der durch Adjunktion gewonnene Teilkörper $\mathbb{Q}(M \cup \bar{M})$ konstruierbar ist. Schließlich beweise man die Lemmata 1.9-1.12.

08.05.: Zur Algebraisierung des Konstruktionsproblems, Teil II.
(Literatur: [Ku, S. 11-14]) Carolin Grauer

Man definiere die sukzessive Adjunktion von Quadratwurzeln an einen Körper und gebe das Konstruktionskriterium 1.14. Anschließend gebe man die Charakterisierung 1.15 für $\hat{M}$ und eine kurze Zusammenfassung der bisherigen Diskussion. Schließlich wende man die bisherigen Ergebnisse auf die klassischen Konstruktionsprobleme an.

15.05.: Radikalerweiterungen und algebraische Zahlen.
(Literatur: [Ku, S. 16-27]) Luisa Kobeloer

Man definiere den Begriff der Radikalerweiterung eines Körpers und erkläre in diesem Zusammenhang, wann ein Polynom durch Radikale auflösbar ist (Definitionen 2.1, 2.2).
Desweiteren definiere man Körpererweiterungen und den zugehörigen Erweiterungsgrad sowie die Begriffe der Algebraizität bzw. Transzendenz (Definitionen 3.1, 3.4, 3.6) und gebe jeweils die einfachsten Beispiele an.
Man zeige die Abzählbarkeit der Menge der algebraischen Zahlen (Satz 3.2 und das zugehörige Corollar) und gebe das notwendige Kriterium (Bemerkung 3.7) für die Algebraizität eines Elementes an.
Man definiere den Begriff einer einfachen Körpererweiterung und beweise Satz 3.8 über den Grad einer solchen. Anschließend erarbeite man das Beispiel 3.10 (als Spezialfall von Corollar 3.9), welches einen Überblick über Erweiterungen vom Grad 1 und 2 gibt.

22.05., 16 - 18 Uhr: Zwischenkörper und der algebraische Abschluss.
(Literatur: [Ku, S. 27-30]) Bianca Brissing

Man definiere den Begriff eines Zwischenkörpers und beweise die Gradformel für Zwischenkörper (Satz 3.11) mit dem zugehörigen Corollar 3.12.
Man definiere endliche Körpererweiterungen und beweise die zur Endlichkeit einer Erweiterung äquivalenten Aussagen (Satz 3.14).
Anschließend definiere man den algebraischen Abschluss $\bar{K}$ eines Körpers K in einem Erweiterungskörper L, zeige, dass $\bar{K}$ ein Zwischenkörper von L/K ist und betrachte diese Konstruktion im Fall $K = \mathbb{Q}, L = \mathbb{C}$.
Abschließend wende man die bisherigen Ergebnisse auf das Konstruktionsproblem an: Man gebe das notwendige Kriterium 3.17 für die Konstruierbarkeit einer komplexen Zahl und wende dieses auf die vier klassischen Beispiele an.

22.05., 18 - 20 Uhr: Teilbarkeit in Ringen I.
(Literatur: [Ku, Kapitel 4]) Sofia Naoumi

Man gebe einen Überblick über die Theorie der Teilbarkeit in Ringen: Insbesondere sollen die Begriffe "Nullteiler", "Integritätsring", "Einheit", "Einheitengruppe" geklärt und das Beispiel 4.5 besprochen werden. Weiterhin definiere man "Teilbarkeit" "Irreduzibilität", "Primelement" und erkläre, wann ein Ring faktoriell ist. Schließlich definiere man "ggT" und "kgV", "Teilerfremndheit" und erinnere an den euklidischen Algorithmus.
Uns interessiert für das weitere Seminar immer besonders das Beispiel des Polynomrings (über einem Körper).

05.06., 16 - 18 Uhr: Teilbarkeit in Ringen II.
(Literatur: [Ku, Kapitel 4]) Sarah Fechtner

In diesem zweiten Teil betrachte man zunächst Polynomringe über faktoriellen Ringen (4.IV): Primelemente eines Ringes bleiben prim unter kanonischer Einbettung des Ringes in den Polynomring in einer Variablen (Satz 4.30) und Polynomringe über faktoriellen Ringen sind wieder faktoriell (Theorem 4.31). Zwei wichtige Beispiele sind in Corollar 4.32 zusammengefasst. Anschließend sollen Quotientenringe eingeführt werden: hierzu definiere man zunächst multiplikativ abgeschlossene Teilmengen und stelle anschließend die Konstruktion des Quotientenringes zu einer solchen vor. Insbesondere soll der Begriff des Quotientenkörpers eines Polynomringes erarbeitet werden.

05.06., 18 - 20 Uhr: Das Eisensteinkriterium und der Satz von Gauß.
(Literatur: [Ku, S. 56-59]) Marc Lorenz

Man gebe die Definition des Eisensteinpolynoms und beweise anschließend das Eisensteinkriterium (Satz 5.1) ("Eisensteinpolynome sind irreduzibel"). Anschließend diskutiere man die Anwendung von Ringhomomorphismen (5.II) und beweise den Satz von Gauß über irreduzible Polynome (5.III).

12.06.: Anwendungen auf Konstruktionsprobleme.
(Literatur: [Ku, S. 59-61], [Kr]) Melanie Gretzke

Man wende die Irreduzibilitätskriterien von Eisenstein (Satz 5.1) bzw. Gauß (5.III) auf die Konstruktion mit Zirkel und Lineal an (5.IV). Insbesondere gebe man also die Winkel an, deren Dreiteilung sicher nicht möglich ist (Satz 5.7), sowie die Primzahlen p, für die die Konstruktion des regulären p-Ecks sicher nicht möglich ist (Satz 5.8).
Für spätere Zwecke beweise man den Satz 11.25 über Zyklizität der Untergruppen der multiplikativen Gruppe eines Körpers.
Bei noch vorhandener Zeit könnte auf der Grundlage der Arbeit [Kr] unter Verwendung der bereitgestellten Methoden an einigen Beispielen die Unmöglichkeit gewisser Dreieckskonstruktionen nachgewiesen werden.

Selbststudium zum 19.06.: Galoistheorie I.
(Literatur: [Ku, Kapitel 8-10])

In diesem ersten Teil soll zunächst die Definition einer Galois-Erweiterung herausgearbeitet werden:

Hierzu definiere man zunächst die (In-)Separabilität von Polynomen und übertrage dies auf die Elemente einer Körpererweiterung (Definitionen 8.5,

8.7). Anschließend gehe man auf das Verhalten der Separabilität bezüglich Zwischenkörpererweiterungen ein (Satz 8.8 und Corollar 8.13, je nach Zeit sollte der kurze Beweis für 8.8 gebracht werden).
Es sollte dann Satz 8.10 erwähnt werden, welcher einerseits Auskunft über die Anzahl der Einbettungen eines endlichen Erweiterungskörpers in den algebraischen Abschluss des Grundkörpers gibt und andererseits ein Separabilitätskriterium für eine solche Erweiterung bereitstellt (hier muss der Beweis wahrscheinlich entfallen).
Die bisherigen Betrachtungen führen zum Begriff der Vollkommenheit eines Körpers: wir wissen nach Definition, dass algebraisch abgeschlossene Körper vollkommen sind und die (leicht zu zeigende) Implikation $a) \Rightarrow b)$ aus 8.6 zeigt die Vollkommenheit aller Körper der Charakteristik 0. Man betrachte das an 8.18 anschließende Beispiel im Fall $K_0 = \mathbb{F}_p$ für ein recht einfaches Gegenbeispiel.

Man betrachte nun die Gruppe $G(L/K)$ der K-Automorphismen einer Körpererweiterung L/K und gebe die Aussagen über die Ordnung dieser Gruppe in Spezialfällen an (Bem. 9.1, 9.2). Anschließend definiere man den Begriff der Normalität einer algebraischen Körpererweiterung und gebe die Teilaussage "a)$\Leftrightarrow$ c)" des Kriteriums (9.5) an. Die bisherigen Betrachtungen führen nun zum Begriff der Galoiserweiterung (mit zugehöriger Galoisgruppe). Wiederum gebe man die Teilaussage "a)$\Leftrightarrow$ c)" des Kriteriums (9.11) an.

Die ganze Theorie könnte z.B. anhand des Beispiels (9.3) und der Übungsaufgabe 5 zu Kapitel 9 beleuchtet werden.

19.06.: Galoistheorie II.
(Literatur: [Ku, Kapitel 8-10]) Esra Aksu

Das Ziel in diesem zweiten Teil ist der Hauptsatz der Galoistheorie (evtl. mit Beweis einiger Teile), durch den eine bijektive Korrespondenz zwischen der menge der Zwischenkörper einer endlichen Galoisgruppe und der Menge der Untergruppen der zugehörigen Galoisgruppe gegeben wird.
Man gebe hierzu zunächst das Theorem 10.3 von E. Artin an (evtl. mit einer Beweisskizze, man darf die lineare Unabhängigkeit der Charaktere einer Gruppe voraussetzen). Dieser Satz erlaubt die Definition des Fixkörpers einer Untergruppe. Man definiere zudem die Isotropiegruppe eines Zwischenkörpers einer Galoiserweiterung und gebe dann den Hauptsatz der Galoistheorie (10.4) an, evtl. mit Beweis. Vermöge des Haupsatzes ist es nun legitim, Galoiserweiterungen mit eigentlich gruppentheoretischen Begriffen wie "abelsch", "zyklisch" etc. zu belegen. Man gebe hierzu Teil b) des Korollars 10.5 an.

26.06.: Die Transzendenz von π.
(Literatur: [Ku, S. 125-126]) Nadine Schröer

Man beweise durch Lösen der Übungsaufgabe 10 in Kapitel 10 (S.125-126) die Transzendenz von π nach A. Baker. Hier werden der Hauptsatz über symmetrische Funktionen (Satz 10.7b) und einige Resultate aus der Analysis/Funktionentheorie zur Differentiation bzw. Integration komplexwertiger Funktionen in einer Variablen vorausgesetzt, die bereitgestellt, jedoch nicht bewiesen werden müssen.
Für weitere Literatur sei z.B. auf das Buch von Lorenz [Lo, Kapitel 17], das Buch von Hardy-Wright [HW, Kapitel 11], sowie das Buch [Ba, Kapitel 1] von Baker verwiesen. Das Schlüsselresultat läuft häufig unter dem Namen "Satz von Lindemann-Weierstraß" (engl. "Lindemann-Weierstraß theorem").

03.07.: Zyklizität, Metazyklizität und Charakterisierungen von Konstruierbarkeit.
(Literatur: [Ku, S. 166-176]) Diana Saternus

Man definiere Zyklizität und Metazyklizität von Körpererweiterungen und gehe auf die zugehörigen Bemerkungen (12.3 bzw. 12.8 nachfolgend) ein. Anschließend beweise man die Aussagen 12.9-12.11 und folgere hieraus das Kriterium Satz 12.12 zur Konstruierbarkeit.
Als Anwendung erarbeite man das Beispiel 12.12 über die Konstruierbarkeit eines regelmäßigen p-Ecks, wobei $p \in \mathbb{N}$ prim.

10.07.: Kreisteilungskörper und der Satz von Gauß über die Konstruierbarkeit des regelmäßigen n-Ecks.
(Literatur: [Ku, S. 179-182]) Elda Alici

Man definiere die Begriffe "Kreisteilungskörper" (auch: "Einheitswurzelkörper"), "Einheitswurzel", "Kreisteilungspolynom" und erarbeite die wesentlichen Eigenschaften, sodass der Satz 13.7 über den Grad von $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/n))/\mathbb{Q}$ bewiesen werden kann.
Anschließend beweise man den Satz von Gauß über die Konstruierbarkeit des regelmäßigen n-Ecks für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Literatur

[Ba] A. Baker. *Transcendental number theory.* Cambridge mathematical library.
[HW] G.H. Hardy, E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* Clarendon Press.
[Kr] O. Krötenheerdt. *Zur Theorie der Dreieckskonstruktionen.*
[Ku] E. Kunz. *Algebra.* Vieweg.
[Lo] F. Lorenz. *Algebra, Volume I: Fields and Galois theory.* Springer.