Übungsaufgaben zur Risikotheorie, Blatt 2

1. Sei $a_i < b_i \quad \forall i = 1, \ldots, d$. Es seien
   - $\mathcal{S}_d = \{]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_d, b_d]\} \cup \{\emptyset\}$
   - $\hat{\mathcal{S}}_d = \{[a_1, b_1[\times \cdots \times [a_d, b_d[\} \cup \{\emptyset\}$
   - $\bar{\mathcal{S}}_d = \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]\} \cup \{\emptyset\}$
   - $\grave{\mathcal{S}}_d = \{]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_d, b_d[\} \cup \{\emptyset\}$

   Beweisen Sie $\sigma\{\mathcal{S}_d\} = \sigma\{\hat{\mathcal{S}}_d\} = \sigma\{\bar{\mathcal{S}}_d\} = \sigma\{\grave{\mathcal{S}}_d\}$.

2. Beweisen Sie, dass
   a)$\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad x \in \mathbb{R}$
   b) $\{(x, y) = y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$
   gilt.

3. Es sei $\mathcal{S} := \{\underset{k \in \mathbb{N}}{\times} A_k : A_k \in \mathcal{F}\}$ und $\mathcal{C}$ bezeichne die Menge der "Zylinder" bzgl. des Produktraums $(\underset{k \in \mathbb{N}}{\times} \Omega_k)$ (siehe Def. in der Vorlesung).
   Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{S})$ gilt.

4. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\underset{k \in \mathbb{N}}{\times} \Omega_k, \bigotimes_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_k)$ und sei

   $$\begin{aligned} \Pi_k : \mathcal{F}_k &\to [0, 1] \\ A &\longmapsto \Pi_k(A) := P(C_A^k), \end{aligned}$$

   wobei C_A^k ein Zylinder ist.
   Zeigen Sie, dass Π_k (das sog. Projektionswahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$) ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ ist.

5. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und sei $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) > 0$.
   Zeigen Sie, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\cdot|A)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist.

6. Sei $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ und $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$ sowie $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum.
   Finden Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$, welches kein Produktmaß ist und beweisen Sie dies.

7. Gegeben sei die Funktion $F(x) = \begin{cases} 0 & für \quad x < 0,5 \\ \frac{1}{4} & für \quad 0,5 \leq x < 2 \\ \frac{1}{3} & für \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & für \quad x \leq 3 \end{cases}$. Finden Sie die zu F gehörende Verteilung μ.

Punktzahl: Alle Aufgaben ergeben bei vollständiger und korrekter Lösung jeweils 4 Punkte.