

Standortprobleme mit k-max Zielfunktion

Master Thesis

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften



vorgelegt von

Teresa Schnepfer

Betreuerin: Prof. Dr. Katrin Klamroth
Arbeitsgruppe für Optimierung und Approximation

Wuppertal, 5. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen der Optimierung	4
2.1	Multikriterielle Optimierung	4
2.1.1	Ordnungen und Kegel	5
2.1.2	Effizienz	7
2.2	k-max Optimierung	10
3	Standortprobleme mit geordneter Medianfunktion	12
3.1	Eigenschaften der geordneten Medianfunktion	14
3.2	Das kontinuierliche geordnete Medianproblem	18
3.2.1	Gauges	19
3.2.2	Geordnete Regionen	23
3.2.3	Bisektoren	24
3.2.4	Geordnete elementarkonvexe Mengen	26
4	Standortprobleme mit k-max Zielfunktion	31
4.1	Zusammenhang mit geordneten Medianproblemen	31
4.2	Ein geometrisches Lösungsverfahren	32
4.2.1	Geometrische Lage der Optimallösungen des GMP	32
4.2.2	Reduktion der Kandidatenmenge	34
4.2.3	Berechnung der Bisektoren zur l_1 -Norm	37
4.2.4	Algorithmus und Komplexität	42
4.3	Lösung durch Rückführung auf Centerprobleme	45
4.3.1	Algorithmus und Korrektheitsbeweise	45
4.3.2	Ein Lösungsverfahren für Centerprobleme	52
4.3.3	Komplexitätsanalyse und Beispiele	56
4.4	Transformation von Standortproblemen mit l_∞ -Norm	61
5	Ausblick	65
5.1	Lösung über k -Nächster-Punkt Voronoi-Diagramme	65
5.2	Multikriterielle Standortprobleme mit k-max Zielfunktion	67
6	Fazit	72

Abbildungsverzeichnis

2.1	Spezielle Kegel	7
2.2	Effiziente, schwach effiziente und dominierte Punkte	9
3.1	Kunden und mögliche Standorte	13
3.2	Änderung der Sortierung an verschiedenen Punkten	14
3.3	Gauge und Fußpunkt	20
3.4	Extrempunkte, Fundamentalrichtungen und -kegel	21
3.5	Einheitskreise von l_1 und l_∞ -Norm	21
3.6	Einheitskreis, Polare und Normalenkegel	23
3.7	Geordnete Regionen zur l_2 -Norm	24
3.8	Geordnete Regionen zur l_1 -Norm	24
3.9	Bisektor mit flächigen Elementen zur l_∞ -Norm	25
3.10	Bisektor mit flächigen Elementen	25
3.11	Nicht-abgrenzender Bisektor	26
3.12	Bisektoren und geordnete Regionen zu 4 existierenden Standorten	26
3.13	Elementarkonvexe Menge $EK(p_{(1,2)})$	27
3.14	Geordnete elementarkonvexe Menge zu $\mathcal{I} = \{(1, 2)\}$	28
3.15	Geordnete elementarkonvexe Menge zu $\mathcal{I} = \{(2, 1)\}$	28
3.16	Geordnete elementarkonvexe Menge zu $\mathcal{I} = \{(1, 2), (2, 1)\}$	29
3.17	Alle geordneten elementarkonvexen Mengen für $a_1 = (0, 0), a_2 = (2, 1)$	29
4.1	Reduzierung der Kandidatenmenge	36
4.2	Konstruktion eines Bisektorpunktes	37
4.3	Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 1	38
4.4	Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 2	38
4.5	Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 3	38
4.6	Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 4	39
4.7	Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 5	39
4.8	Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 6	39
4.9	Bisektor zu $a = (2, 8)$ und $b = (6, -2)$	41
4.10	Bisektor zu $a = (2, 1)$ und $b = (14, 1)$	41
4.11	Geometrisches Verfahren: Optimale Eckpunkte für verschiedene k	43
4.12	Dicht zusammenliegende Punkte	46
4.13	Verlauf von $A_k^+(z)$ und $A_k^-(z)$	54

4.14	Bisektoren und Fundamentalrichtungen von drei Standorten	58
4.15	Optimale Eckpunkte für $k = 1, 2, 3$	58
4.16	Bisektoren und Fundamentalrichtungen von vier Standorten	60
4.17	Optimale Eckpunkte für $k = 1, 2, 3, 4$	60
4.18	Ausgangsproblem mit l_∞ -Norm	63
4.19	Transformiertes Problem mit l_1 -Norm	63
5.1	Voronoi-Diagramm zur euklidischen Norm	66
5.2	Erfülltes Effizienzkriterium	69
5.3	Nicht erfülltes Effizienzkriterium	69
5.4	Nicht-zusammenhängende effiziente Menge	70

Abkürzungs- und Variablenverzeichnis

α_R	Distanz der am weitesten entfernten Punkte einer Menge A_R
$A = \{a_1, \dots, a_M\}$	Menge der existierenden Standorte
A_R	Teilmenge der existierenden Standorte mit $R \in \mathcal{R}$
$b(x)$	Allgemeine Bottleneck Funktion
B	Verallgemeinerter Einheitskreis zur Gauge γ_B
B°	Polare Menge zu B
$Bisec(a_i, a_j)$	Bisektor zu den Standorten a_i und a_j
C	Zelle der Unterteilung der Ebene
\mathcal{C}	Menge aller Zellen C
d	Distanzvektor der ex. Standorte zu einem Punkt x
d_{\geq}	Der Größe nach sortierter Distanzvektor
r_1, \dots, r_G	Fundamentalrichtungen eines Standortes
$d(a, x)$	Distanz von a nach x
D	Distanzmatrix der existierenden Standorte
$EK(p_\sigma)$	Elementarkonvexe Menge zu p_σ
$Ext(B) = \{e_1, \dots, e_G\}$	Menge der Extrempunkte von B
$f_\lambda(x)$	Geordnete Medianfunktion
$g(x)$	k-max Funktion
G	Anzahl der Extrempunkte einer Gauge
$GEK_{\mathcal{I}}$	Geordnete elementarkonvexe Menge zur Teilmenge \mathcal{I}
GMF	Geordnete Medianfunktion
GMP	Geordnetes Medianproblem
GSM	Geordnete Schnittpunktmenge
γ_B	Gauge zum Einheitskreis B

γ_{B°	Dualgauge zu γ_B
Γ_g	Fundamentalkegel zu Fundamentalrichtungen r_g und r_{g+1}
\mathcal{I}	Teilmenge der Permutationen auf $(1\dots M)$
\mathcal{K}	Kandidatenmenge für mögliche Optimallösungen von SPk, $\mathcal{K} \subset GSM$
λ	Gewichtungsvektor der geordneten Medianfunktion
Λ_M^{\leq}	Kegel $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_M) : 0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_M\}$
M	Anzahl der existierenden Standorte
$M(f_\lambda)$	Menge der Optimallösungen von GMP
$M(f_k)$	Menge der Optimallösungen von SPk
MOP	Multikriterielles Optimierungsproblem
$N(x)$	Normalenkegel in x
O_σ	Geordnete Region zur Permutation σ
p_σ	Eckpunkt der polaren Menge B°
$\mathcal{P}(1\dots M)$	Menge aller Permutationen der ersten M natürlichen Zahlen
\mathcal{R}	Menge aller r -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, M\}$
R^*, \tilde{R}	Indexmengen von Mengen von Standorten
R_{\geq}^p	Kegel $\{y \in \mathbb{R}^p : y \geq 0\}$
R_{\geq}^p	Kegel $\{y \in \mathbb{R}^p : y \geq 0\}$
$R_{>}^p$	Kegel $\{y \in \mathbb{R}^p : y > 0\}$
σ	Permutation
SPk	Standortproblem mit k-max Zielfunktion
S_M^{\leq}	Simplex $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_M) : 0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_M, \sum_{i=1}^M \lambda_i\}$
$sort_M$	Funktion, die die Einträge des Arguments der Größe nach sortiert
$T(x)$	Transformation zwischen l_1 - und l_∞ -Distanzen
$V(p_i)$	Klassische Voronoi-Regionen
$V^{[k]}(p_i)$	Voronoi-Region zum k -Nächster-Punkt Voronoi-Diagramm
\mathcal{V}	Klassisches Voronoi-Diagramm
$\mathcal{V}^{[k]}$	k -Nächster-Punkt Voronoi-Diagramm
w_i	Gewicht des Standorts a_i
x_B	Fußpunkt zum Einheitskreis B
$x_{(i)}$	i -te Komponente des der Größe nach sortierten Vektors x
\bar{x}	Centerpunkt der dichtest zusammenliegenden Standorte
X_E	Menge aller effizienten Lösungen
X_{E^*}	Minimales Repräsentantensystem
X_{sE}	Menge aller strikt effizienten Lösungen

X_{wE}	Menge aller schwach effizienten Lösungen
\mathcal{X}	Zulässiger Bereich eines Optimierungsproblems
\mathcal{X}_R	Menge der Centerpunkte zu A_R
Y	Bildraum eines Optimierungsproblems
Y_E	Menge aller nicht-dominierten Punkte
Y_{sE}	Menge aller strikt nicht-dominierten Punkte
Y_{wE}	Menge aller schwach nicht-dominierten Punkte

Kapitel 1

Einleitung

Die Standorttheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das gerade in der Praxis immer mehr an Bedeutung gewinnt. Charakteristisch für Standortprobleme ist die Suche nach einem oder mehreren neuen Standorten, so dass eine Zielfunktion, die typischerweise von den Abständen zu einer Menge von bereits existierenden Standorten abhängt, minimiert wird.

Standortprobleme haben zahlreiche Anwendungen, sowohl im industriellen, als auch im sozialen und wirtschaftlichen Bereich. Beispiele hierfür sind die Planung neuer Fabrikgebäude oder Lagerhallen, von öffentlichen Einrichtungen wie Krankenhäusern oder Feuerwehrrstationen bis hin zur Platzierung von technischen Bauteilen in elektrischen Schaltungen. Auch die optimale Positionierung von Ventilen in Gasnetzwerken, die Planung von Telekommunikationsmasten und sogar die Roboternavigation sind Teilbereiche dieses Forschungsgebietes. In der Wirtschaft findet die Standortoptimierung Anwendung in Fragen der Logistik oder des Supply Chain Management. Gerade in diesem Sektor gewinnt die Standortoptimierung immer weiter an Bedeutung, da Standortentscheidungen aufgrund ihrer langfristigen Auswirkungen von großer Wichtigkeit für den wirtschaftlichen Erfolg eines Unternehmens sind.

Was genau unter einem optimalen Standort zu verstehen ist, hängt stark von der gegebenen Situation ab. Häufig befasst sich die Standorttheorie mit realitätsnahen Problemen und versucht diese zu lösen, indem zunächst ein mathematisches Modell aufgestellt und für dieses im Anschluss Lösungswege und Algorithmen entwickelt werden. Die Anforderungen der Praxis werden dabei immer höher, eine immer stärker steigende Modellierungsgenauigkeit wird für die Probleme verlangt, um so zum Beispiel Kosten für unnötig lange Transportwege zu sparen. Doch wächst mit diesem Versuch nicht nur die Genauigkeit der Ergebnisse, sondern auch die Komplexität der zu lösenden Probleme stark an.

Neben der klassischen Minimierung einer Distanz- oder Kostenfunktion gibt es deshalb häufig noch viele weitere Restriktionen, die den Modellen zugrunde gelegt werden. Solche Problemerkweiterungen ergeben sich durch verbotene Gebiete (siehe [Katz und Cooper]) wie Naturschutzparks, die nicht bebaut werden dürfen, oder durch Barrieren wie zum Beispiel Seen, Flüsse oder auch große Maschinen und Fließbänder in industriellen Anlagen, die die Nutzung der direkten Verbindung zwischen zwei Punkten unmöglich machen (siehe z.B. [Klamroth]). Durch die Berücksichtigung dieser Faktoren können die entstehenden Transportkosten deutlich besser eingeschätzt werden. Auch die Aufnahme von mehreren, oft widersprüchlichen Zielfunktionen ist möglich ([Wendell et al.]).

Bei Standortproblemen werden drei große Teilgebiete unterschieden: Kontinuierliche, diskrete und Netzwerkprobleme.

Bei kontinuierlichen planaren Standortproblemen können die neuen Standorte beliebig (bzw. unter Berücksichtigung vorgegebener Restriktionen) in der Ebene \mathbb{R}^2 platziert werden (vgl. [Hamacher]). In der Regel ist die Anzahl der zu setzenden neuen Standorte vorgegeben.

Bei diskreten Standortproblemen müssen die neuen Standorte aus einer endlichen Kandidatenmenge ausgewählt werden ([Velten]). Man unterscheidet zwischen unkapazitierten Standortproblemen, bei denen die Anzahl der neuen Standorte Teil der Optimierung ist (jeder neue Standort wird mit „Konstruktionskosten“ belegt), und p -Standort Problemen, bei denen die Anzahl der neuen Standorte mit $p > 1$ vorgegeben ist.

Für Netzwerkprobleme wird ein zu Grunde liegendes Netzwerk aus Knoten und Kanten verwendet, auf dem die gesuchte Optimallösung liegen muss (siehe [Kariv und Hakimi]). Durch diese Konstruktion lässt sich zum Beispiel der Verlauf von Straßen innerhalb einer Stadt gut darstellen. Einführende Literatur in das große Feld der Standorttheorie liefern [Francis et al.], [Hamacher] und [Love et al.].

Auf diskrete und Netzwerkprobleme wird in dieser Arbeit nicht näher eingegangen, der Fokus liegt auf dem zuerst genannten Gebiet der kontinuierlichen Standortprobleme.

Ziel dieser Arbeit ist die Herleitung von Lösungsverfahren für Standortprobleme mit k -max Zielfunktionen. Dieser Typ von 1-Standortproblemen stellt eine Verallgemeinerung der bekannten Centerprobleme dar, bei denen die maximale Distanz des neuen Standortes zu den bereits existierenden minimiert werden soll. Der Spezialfall für $k = 1$ entspricht gerade der Centerfunktion, $k > 1$ stellt die Minimierung der k -größten Distanz dar. Als Abstandsmaß werden die Manhattan- und die Maximumsnorm betrachtet, da diese durch ihre besondere geometrische Struktur zu interessanten Lösungsansätzen führen.

Anwendung finden diese k -max Standortaufgaben zum Beispiel in der Standortoptimierung mit Outliern (siehe [Charikar et al.]). Outlier sind gerade diejenigen existierenden Punkte, die sehr weit von den übrigen Standorten entfernt liegen. Diese können einen starken Einfluss auf die gesuchte Optimallösung haben, wodurch die Kosten dieser Lösung überproportional ansteigen, ohne aber einen entscheidenden Vorteil für die Mehrheit der Kunden zu generieren. Das Handling dieser Outlier kann mit Hilfe der k -max Optimierung für Standortprobleme modelliert und analysiert werden.

Zunächst erfolgt eine kurze Einführung in die wichtigsten benötigten Grundlagen der Optimierung. Dazu gehören sowohl Begriffe der multikriteriellen Optimierung als auch eine Darstellung der k -max Problemstellung.

Als Ansatz der Überlegungen zu den Standortproblemen mit k -max Zielfunktion dienen die geordneten Medianprobleme, die eine Verallgemeinerung der bekannten Standorttypen darstellen. Sie liefern eine allgemeine Theorie, die die verschiedensten Probleme zu lösen vermag. Diese grundlegenden Beobachtungen zu allgemeinen Abstandsmaßen, Linearitätsregionen und Bisektoren werden im dritten Kapitel ausführlich vorgestellt.

Im vierten Kapitel folgt dann die Herleitung von zwei Verfahren für Standortprobleme mit k -max Zielfunktion und zugrunde liegender l_1 -Norm. Zunächst wird dafür ein Zusammenhang zwischen geordneten Medianproblemen und k -max Standortproblemen hergestellt. Das geo-

metrische Verfahren baut auf der Analyse der geordneten Medianprobleme auf und nutzt die gewonnenen Diskretisierungsergebnisse, um sie speziell auf k -max Funktionen anzuwenden. Das zweite Verfahren, die Rückführung auf Centerprobleme, löst sich von den geordneten Medianproblemen und nutzt stattdessen die Lage der optimalen Standorte im Bezug auf die l_1 -Norm aus, so dass das eigentliche Problem zu einer Reihe von Centerproblemen vereinfacht werden kann. Beiden Verfahren folgen Korrektheitsbeweise, Komplexitätsanalysen und ein ausführliches Beispiel.

Die Übertragbarkeit aller Ergebnisse zur l_1 -Norm auf das Distanzmaß der l_∞ -Norm wird im Anschluss an die beiden Verfahren bewiesen. Es wird eine Transformationsformel angegeben, mit der auch Standortprobleme mit Maximumsnorm gelöst werden können.

Das folgende fünfte Kapitel soll Ideen für weitere Forschungen auf dem Gebiet der k -max Standortprobleme liefern. Dabei werden multikriterielle Aufgabenstellungen eingeführt, ein Verfahren für konvexe Zielfunktionen vorgestellt und begründet, wo die Probleme der Übertragung auf allgemeine k -max Funktionen liegen. Ein anderer Ansatz nutzt k -Nächster-Punkt Voronoi-Diagramme, welche eine Unterteilung der Ebene erzeugen, die das Auffinden einer optimalen Lösung erheblich zu erleichtern vermag. Das Problem dabei ist die aufwändige Berechnung dieses Diagramms.

Zum Schluss folgt eine Zusammenstellung und Bewertung der gewonnenen Ergebnisse.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz besonders bei Frau Prof. Katrin Klamroth bedanken, die jederzeit ein offenes Ohr für die auftretenden Probleme hatte und mir während der Erstellung dieser Arbeit durch ihre freundliche Betreuung zur Seite stand. Außerdem möchte ich Herrn Dipl. Math. Markus Kaiser für die geduldige Beantwortung vieler Fragen und die abschließende Fehersuche danken.

Grundlagen der Optimierung

Inhalt dieses Kapitels ist eine kurze Einführung in die in dieser Arbeit benötigten Gebiete der Optimierung. Ziel ist es, wesentliche Begriffe und Zusammenhänge, die im Folgenden benutzt werden, in allgemeiner Form einzuführen, um sie in späteren Kapiteln auf die gegebene Problemstellung anwenden zu können.

Nach der kurzen Vorstellung eines allgemeinen einkriteriellen Optimierungsproblems wird im ersten Abschnitt die Theorie der multikriteriellen Optimierung betrachtet. Da dies ein sehr umfangreiches Gebiet ist, kann im Rahmen dieser Arbeit lediglich auf die wichtigsten Grundbegriffe eingegangen werden. Für tiefergehende Informationen zu diesem Thema sei auf [Ehrgott] verwiesen.

Im zweiten Abschnitt folgt eine Einführung in ein aktuelles Forschungsgebiet, die sogenannte k -max-Optimierung.

Zunächst sei ein allgemeines einkriterielles Optimierungsproblem betrachtet. Dieses ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

wobei \mathcal{X} den zulässigen Bereich und $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Zielfunktion darstellt.

Gesucht wird nach einer (im Allgemeinen nicht eindeutigen) Optimallösung $x^* \in \mathcal{X}$ mit der Eigenschaft $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$, also nach einem Element, das den kleinstmöglichen Zielfunktionswert annimmt. Falls eine solche Optimallösung existiert, ist $f(x^*)$ der zugehörige optimale Zielfunktionswert, welcher stets eindeutig ist.

Jedes Maximierungsproblem kann zu einer Minimierungsaufgabe umformuliert werden, denn es gilt

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) = - \max_{x \in \mathcal{X}} -f(x).$$

Aus diesem Grund wird vorerst nur auf Minimierungsprobleme eingegangen.

2.1 Multikriterielle Optimierung

In der heutigen Zeit haben viele Anwendungsprobleme nicht mehr nur eine Zielsetzung, die es zu erreichen gilt. Es müssen viele verschiedene Ziele, externe Faktoren und Meinungen berücksicht-

sichtigt werden, die Einfluss auf die Lösung des Problems haben. Auf eine „optimale“ Lösung in dem Sinne, dass alle Zielsetzungen perfekt erfüllt werden, muss oft verzichtet werden, da sich die verschiedenen Anforderungen nicht gleichzeitig erfüllen lassen. Hier bedeutet Optimierung also, eine Lösung zu finden, die alle Ziele möglichst gut und für den Entscheidungsträger zufriedenstellend miteinander kombiniert.

Die multikriterielle bzw. Vektoroptimierung beschäftigt sich also mit der Optimierung von Problemen unter Berücksichtigung mehrerer Zielfunktionen, die sich oft untereinander widersprechen.

Sofern nichts anderes erwähnt, stammen alle Definitionen, Sätze und Lemmata dieses Abschnittes aus den Kapiteln 1 und 2 von [Ehrgott].

Ein klassisches Anwendungsgebiet der multikriteriellen Optimierung ist zum Beispiel das Portfoliomanagement.

Der Wunsch eines jeden Investors ist es, maximalen Gewinn bei minimalem Risiko zu realisieren. Diese beiden Ziele stehen natürlich im Widerspruch zueinander, da die risikobehaftetsten Anlagen in der Praxis die größten Renditen bringen, während andererseits für die Übernahme eines geringen Risikos nur eine kleine Rendite gezahlt wird. Wenn der Anleger sich also nicht entscheiden kann, sich nur auf eine dieser beiden Zielsetzungen zu konzentrieren, muss ein Weg gefunden werden, beide Kriterien so gut wie möglich miteinander zu kombinieren. Als multikriterielle Lösung wird deshalb in eine Aktie oder ein ganzes Portfolio von Aktien mit bestimmten Rendite-Risiko-Verhältnissen investiert.

Obige Erklärungen werden in der folgenden Definition des Problems formalisiert.

Definition 2.1

Ein **multikriterielles Optimierungsproblem**, kurz MOP, besitzt die Form

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

wobei \mathcal{X} der zulässige Bereich des **Entscheidungsraumes** \mathbb{R}^n und $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p > 1$ eine vektorwertige Funktion in den **Bildraum** \mathbb{R}^p ist. Das Bild des zulässigen Bereichs \mathcal{X} unter der Funktion f heißt $Y := f(\mathcal{X})$.

Das bedeutet, dass dem Problem hier nicht nur eine Zielfunktion zu Grunde gelegt wird, sondern p Funktionen; $x \in \mathbb{R}^n$ ist der Lösungsvektor.

Anders als reelle Zahlen, die sich auf natürliche Weise anordnen lassen und dadurch stets untereinander vergleichbar sind, lassen sich Vektoren aus dem \mathbb{R}^p nicht kanonisch anordnen. Während es bei zwei reellen Zahlen also immer möglich ist zu entscheiden, welche die Größere von beiden ist, ist dies bei Vektoren nicht so leicht. Damit besteht die Notwendigkeit, den Begriff der „optimalen Lösung“ für ein MOP neu zu definieren. Dieses Vorhaben führt im Kapitel 2.1.2 zum Begriff der Effizienz. Zuvor werden einige wichtige Grundlagen für den neuen Optimalitätsbegriff vorgestellt.

2.1.1 Ordnungen und Kegel

In diesem Abschnitt werden Halb- und Totalordnungen eingeführt und Beispiele für oft verwendete binäre Relationen gegeben. Anschließend werden Kegel definiert, die im nächsten Abschnitt

eine anschauliche Interpretation des Effizienzkonzepts ermöglichen.

Es sei S eine nichtleere Menge, eine binäre Relation \preceq auf S ist dann eine Teilmenge R von $S \times S$. Statt $(x, y) \in R$ schreibt man kurz $x \preceq y$ und $x \not\preceq y$ für $(x, y) \notin R$.

Definition 2.2

Eine binäre Relation R auf S heißt **Halbordnung**, falls sie die drei folgenden Eigenschaften besitzt:

- R ist **reflexiv**, d.h. $x \preceq x \quad \forall x \in S$,
- R ist **transitiv**, d.h. für $x, y, z \in S$ gilt: $x \preceq y, y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$,
- R ist **antisymmetrisch**, d.h. für $x, y \in S$ gilt: $x \preceq y, y \preceq x \Rightarrow x = y$.

Eine binäre Relation R auf S heißt **Totalordnung**, falls für sie gilt:

- R ist eine Halbordnung,
- R ist **zusammenhängend**, d.h. für $x, y \in S$ gilt: $x \neq y \Rightarrow x \preceq y$ oder $y \preceq x$.

Mit Hilfe von Definition 2.2 können nun binäre Relationen eingeführt werden, die zum einen als Beispiel für Halb- und Totalordnungen dienen und zum anderen auch im Weiteren eine wichtige Rolle spielen werden.

Definition 2.3

Es seien $x = (x_1, \dots, x_p)$ und $y = (y_1, \dots, y_p)$ aus dem \mathbb{R}^p . Dann können folgende binäre Relationen auf $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ definiert werden:

- Halbordnungen:
 - **Schwach komponentenweise Ordnung** \leq : $x \leq y$, falls $x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, p$;
 - **Komponentenweise Ordnung** \leq : $x \leq y$, falls $x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, p$ und $x \neq y$;
 - **Strikt komponentweise Ordnung** $<$: $x < y$, falls $x_i < y_i \quad \forall i = 1, \dots, p$;
- Totalordnung:
 - **Lexikographische Ordnung** \leq_{lex} : $x \leq_{lex} y$, falls $x = y$ oder $x_k < y_k$, wobei $k = \min\{i : x_i \neq y_i\}$.

Wird der Bildraum des MOP nun mit einer der in Definition 2.3 eingeführten Ordnungen versehen, so ist ein Vergleich der Elemente des \mathbb{R}^p (der Funktionswerte) möglich, das Ergebnis des Vergleichs hängt aber von der jeweils verwendeten Ordnung ab.

Die folgende Definition ([Scholz]) erweist sich im nächsten Abschnitt als nützlich, da Kegel ein Hilfsmittel zur geometrischen Visualisierung der effizienten Punkte liefern.

Definition 2.4

Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt **Kegel**, falls $\alpha d \in C$ für alle $d \in C$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Die drei Beispiele in Abbildung 2.1 stellen wichtige Spezialfälle von Kegeln dar, jeweils bezogen auf die zugehörige Ordnung. Mathematisch beschrieben werden sie durch die folgenden Mengen:

- $\mathbb{R}_{\geq}^p = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y \geq 0\}$ (Abb. 2.1, links),
- $\mathbb{R}_{\geq}^p = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y \geq 0\}$ (Abb. 2.1, Mitte),
- $\mathbb{R}_{>}^p = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y > 0\}$ (Abb. 2.1, rechts).

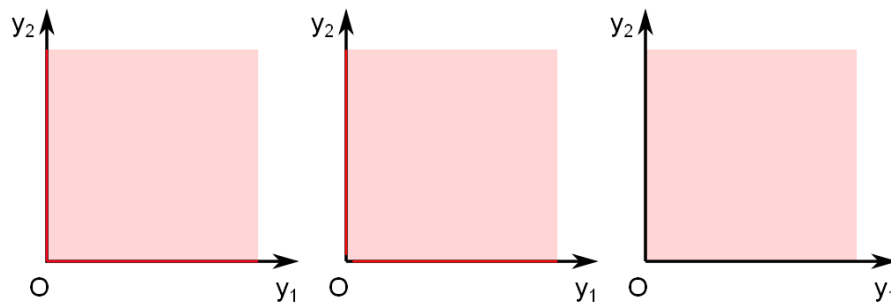


Abb. 2.1: Spezielle Kegel

Entscheidend bei den verschiedenen Definitionen ist, ob die Achsen und der Ursprung O mit zur Menge gehören oder nicht.

2.1.2 Effizienz

Nachdem im vorherigen Abschnitt mögliche Ordnungen auf dem \mathbb{R}^p vorgestellt wurden, werden hier nun verschiedene Effizienzkonzepte betrachtet, die definieren, was man unter einer „optimalen Lösung“ eines MOP verstehen kann. Eine geometrische Interpretation der verschiedenen Konzepte wird im Anschluss daran gegeben.

Definition 2.5

Eine zulässige Lösung $x^* \in X$ heißt **optimale Lösung** eines MOP, falls es kein $x \in X$, $x \neq x^*$ gibt, so dass

$$f(x) \preceq f(x^*).$$

Ist x^* eine optimale Lösung, so nennt man $f(x^*)$ einen **optimalen Wert** des MOP.

Aus dieser Definition geht ein wichtiger Unterschied zwischen ein- und multikriteriellen Optimierungsproblemen hervor: Während der optimale Wert eines einkriteriellen Problems stets eindeutig bestimmt ist, kann ein multikriterielles Problem (unendlich) viele verschiedene optimale Werte $f(x^*)$ besitzen. Diese hängen zudem von der verwendeten Ordnung \preceq ab.

Es gibt daher unterschiedliche Typen von Optimalität, je nachdem welche Ordnung zugrunde gelegt wird. Drei Typen treten dabei in der Literatur am häufigsten auf, induziert von den Ordnungen \leq , $<$ und \leq . Letztere führt zum Konzept der Effizienz, auch Pareto-Optimalität genannt: Lösungen, die sich bezüglich keines Kriteriums verbessern lassen, ohne sich dabei in mindestens einem anderen Kriterium zu verschlechtern.

Definition 2.6

Eine zulässige Lösung $x^* \in X$ eines MOP heißt **effizient**, falls es kein $x \in X$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x^*)$. Wenn x^* effizient ist, heißt $f(x^*)$ **nicht-dominiert**.
Die Menge aller effizienten Lösungen ist $X_E := \{x^* \in X : x^* \text{ ist effizient}\}$,
die Menge aller nicht-dominierten Punkte heißt $Y_E := \{f(x^*) : x^* \in X_E\}$.

Werden zwei Lösungen nun miteinander verglichen, so spricht man von „Dominanz“.

Definition 2.7

Seien $x, y \in X$. Gilt $f(x) \leq f(y)$, so wird y von x **dominiert** und $f(x)$ dominiert $f(y)$.

Oft sind nicht nur die effizienten Punkte eines MOP interessant, sondern auch die so genannten schwach effizienten Lösungen der Problemstellung. Diese erhält man, wenn man den Zielraum \mathbb{R}^p mit der strikt komponentenweisen Ordnung versieht.

Definition 2.8

Eine zulässige Lösung $x^* \in X$ eines MOP heißt **schwach effizient**, falls es kein $x \in X$ gibt, so dass $f(x) < f(x^*)$. Wenn x^* schwach effizient ist, heißt $f(x^*)$ **schwach nicht-dominiert**.
Die Menge aller schwach effizienten Lösungen ist $X_{wE} := \{x^* \in X : x^* \text{ ist schwach effizient}\}$,
die Menge aller schwach nicht-dominierten Punkte heißt $Y_{wE} := \{f(x^*) : x^* \in X_{wE}\}$.

Der letzte Effizientyp, der hier betrachtet werden soll, ist die strikte Effizienz. Diese folgt aus der schwach komponentenweisen Ordnung.

Definition 2.9

Eine zulässige Lösung $x^* \in X$ eines MOP heißt **strikt effizient**, falls es kein $x \in X$, $x \neq x^*$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x^*)$. Wenn x^* schwach effizient ist, heißt $f(x^*)$ **strikt nicht-dominiert**.
Die Menge aller strikt effizienten Lösungen ist $X_{sE} := \{x^* \in X : x^* \text{ ist strikt effizient}\}$,
die Menge aller strikt nicht-dominierten Punkte heißt $Y_{sE} := \{f(x^*) : x^* \in X_{sE}\}$.

Aus den obigen Definitionen der Ordnungen folgen sofort die Inklusionen

$$X_{sE} \subseteq X_E \subseteq X_{wE} \subseteq X \quad \text{und} \quad Y_{sE} \subseteq Y_E \subseteq Y_{wE} \subseteq Y.$$

Definition 2.10

Eine Menge $X_E^* \subseteq X$ heißt **minimales Repräsentantensystem** der nicht-dominierten Menge, wenn jedes $x \in X_E$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

- $x \in X_E^* \Rightarrow \nexists x' \in X_E^*, x \neq x', \text{ so dass } f(x) = f(x')$
- $x \notin X_E^* \Rightarrow \exists! x' \in X_E^*, \text{ so dass } f(x) = f(x')$

Effizienz und schwache Effizienz lassen sich auch mit Hilfe der im vorherigen Abschnitt definierten Kegel beschreiben und geometrisch veranschaulichen. Dies zeigen Lemma 2.1 und Abbildung 2.2.

Lemma 2.1

Gegeben sei $x^* \in X$ eines MOP. Dann gelten folgende Aussagen:

- $x^* \in X$ ist effizient $\Leftrightarrow f(X) \cap (f(x^*) - \mathbb{R}_{\leq}^p) = \{f(x^*)\}$
- $x^* \in X$ ist schwach effizient $\Leftrightarrow f(X) \cap (f(x^*) - \mathbb{R}_{>}^p) = \emptyset$

Beweis: Siehe [Ehrgott], Kapitel 2.

Strikte Effizienz ist das multikriterielle Analogon zur eindeutig optimalen Lösung im einkriteriellen Fall, d.h. dass ein $y \in Y_{sE}$ stets ein eindeutiges Urbild besitzt. Für die beiden Fälle der Effizienz und der schwachen Effizienz sind Beispielpunkte in Abbildung 2.2 gegeben. Ist ein Punkt nicht strikt effizient, so bedeutet dies anschaulich, dass an der Stelle zwei Punkte aufeinander liegen.

Um zu testen, ob ein Punkt x mit $y = f(x) \in f(X)$ effizient ist, wird überprüft, ob sich in dem Kegel $y - \mathbb{R}_{\leq}^p$, also „links unterhalb“ von y , noch weitere Funktionswerte zulässiger Punkte befinden. Ist dies der Fall, so ist x nicht effizient und y damit ein dominierter Punkt. Beispiele dafür sind alle schwarzen Punkte in der Abbildung.

Befinden sich dagegen keine zulässigen Punkte außer y selbst im Kegel $y - \mathbb{R}_{\leq}^p$, so ist x effizient und y nicht-dominiert. Diese Situation ist in allen roten Punkten der Abbildung gegeben. Für sie gibt es keine anderen Punkte, die in einer der Komponenten echt besser sind.

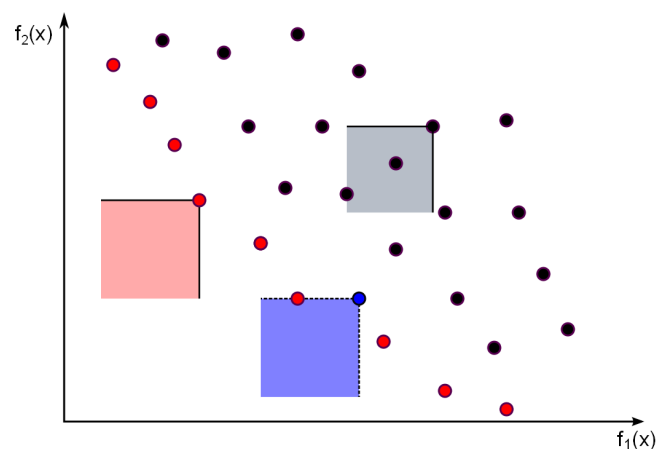


Abb. 2.2: Effiziente (rot), schwach effiziente (blau) und dominierte (schwarz) Punkte

Ein schwach nicht-dominiertes y wird durch den blauen Punkt dargestellt. Für eine schwach effiziente Lösung betrachtet man die Menge $f(x^*) - \mathbb{R}_{>}^p$. Auf den „Rändern“ des Kegels an y dürfen also nun Funktionswerte zulässiger Punkte liegen. Dies bedeutet, dass es keine andere Lösung mit echt besserem Zielfunktionswert in allen Komponenten gibt. Da, wie oben festgestellt, $Y_{sE} \subseteq Y_E$ gilt, sind auch alle roten Punkte schwach effizient.

2.2 k-max Optimierung

Dieser Abschnitt befasst sich mit einem relativ neuen Gebiet der Optimierung, der so genannten k-max Optimierung. Problemstellungen dieses Typs ergeben sich als eine direkte Verallgemeinerung des bekannten Bottleneck Problems. Dieses wird zunächst kurz angesprochen, danach folgt der Übergang zu den k-max Zielfunktionen und der sich daraus ergebenden Problemdefinition.

Aufgrund der Aktualität des Themas sind nicht viele Quellen für dieses Gebiet vorhanden. Eine Arbeit, die sich unter anderem mit der k-max Optimierung befasst, ist [Punnen und Nadir]. Weiterhin sei auf [Gorski und Ruzika] sowie die darin enthaltenen Referenzen verwiesen. Diese Quellen behandeln lediglich Verfahren zur Lösung von kombinatorischen Problemen, Lösungsansätze für allgemeine k-max Probleme sind bis jetzt nicht bekannt. Zunächst soll sowohl die k-max Funktion als auch das zugehörige Optimierungsproblem formal als Verallgemeinerung von Bottleneck Problemen formuliert werden.

Es sei nun $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^M$, $M \in \mathbb{N}$ der zulässige Bereich eines Optimierungsproblems.

Definition 2.11

Eine **Bottleneck Zielfunktion**, die das maximale Element einer zulässigen Lösung $x \in \mathcal{X}$ liefert, ist definiert als

$$b(x) = \max_{1 \leq i \leq M} \{x_i\}.$$

Diese Zielfunktion kann in beliebige Aufgabenstellungen integriert werden. Ein Optimierungsproblem mit Bottleneck Zielfunktion besitzt dann die Form

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{1 \leq i \leq M} \{x_i\}.$$

Aufgrund der Struktur, das maximale Element zu minimieren, werden diese Problemtypen auch MinMax-Probleme genannt.

Ein mögliches Anwendungsgebiet ist die Routenplanung, bei der die maximale Fahrtzeit aller möglichen Strecken von einem Start- zu einem Zielort minimiert werden soll. Auch in der Standortoptimierung ist diese Zielfunktion von großer Bedeutung und tritt dort häufig als „Centerzielfunktion“ auf. Hier soll ein neuer Standort so platziert werden, dass die maximale Entfernung der Kunden zu diesem neuen Standort minimal wird.

Der Übergang zur k-max Zielfunktion folgt nun einfach, indem nicht das maximale Element des Vektors x , sondern seine k -größte Komponente minimiert wird. Damit bleibt dem Entscheidungsträger also immer die Wahl, das entscheidende Element für das aktuelle Problem zu identifizieren und dieses dann zu minimieren.

Definition 2.12

Eine **k-max Zielfunktion**, die das k -größte Element einer zulässigen Lösung $x \in \mathcal{X}$ bestimmt, ist folgendermaßen definiert:

$$g(x) = \underset{1 \leq i \leq M}{\text{k-max}} \{x_i\}.$$

Wird diese Funktion nun über alle x des zulässigen Bereichs minimiert, so entsteht das k-max Problem

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \underset{1 \leq i \leq M}{\text{k-max}} \{x_i\}.$$

Der Spezialfall $k = 1$ führt wieder zum Bottleneck Problem. Sind die Einträge des Argumentvektors x der Größe nach aufsteigend sortiert, so dass $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_M$ gilt, so entspricht der Zielfunktionswert gerade der $(M - k + 1)$ -ten Komponente in x :

$$\underset{1 \leq i \leq M}{\text{k-max}} \{x_i\} = x_{(M-k+1)}.$$

Die Elemente werden hier nicht der Größe nach absteigend angeordnet, obwohl dies im Bezug auf die Notation der Indizes zunächst sinnvoller erscheint. Der Grund dafür liegt in der in Kapitel 4 betrachteten Rückführung der k-max Funktion auf Geordnete Medianfunktionen, welche die angegebene Reihenfolge benötigen. Es ist zu beachten, dass mehrfach auftretende Einträge in x als verschiedene Elemente angesehen werden. Wird zum Beispiel das 3-max des Vektors $x = (6, 9, 2, 6)$ gesucht, so ergibt sich $3\text{-max}\{x\} = 3\text{-max}\{(6, 9, 2, 6)\} = x_{(2)} = 6$.

Nach [Gorski und Ruzika] erlaubt die k-max Zielfunktion die Modellierung vieler in der Praxis auftretender Probleme, die bisher nicht so einfach dargestellt werden konnten. So sind große Datensätze meist mit Fehlern behaftet und weisen Ausreißer (z.B. nach oben) auf, die nicht zur Struktur der übrigen Daten passen. Um diesen Ausreißern während eines Lösungsverfahrens nicht zu viel Gewicht zuzusprechen und damit die Lösung zu verfälschen, hat man mit der k-max Funktion die Möglichkeit, die $k - 1$ Datenpunkte der Ausreißer zu vernachlässigen und statt des größten das k -größte Element zu minimieren. Auf diese Weise werden nur die tatsächlich relevanten Daten in die Berechnungen mit einbezogen.

Dieser Funktionstyp wird den Standortproblemen ab Kapitel 4 zugrunde gelegt, sowohl im ein- als auch im multikriteriellen Fall. Zunächst wird aber eine Theorie für einen allgemeineren Zielfunktionstyp entwickelt, die auch wichtige Grundlagen für den Spezialfall der k-max Funktionen liefert.

Kapitel 3

Standortprobleme mit geordneter Medianfunktion

Standortfragen sind gerade in der Wirtschaft häufig anzutreffende Probleme, die oft ganz spezielle, auf die genaue Sachlage zugeschnittene Anforderungen aufweisen. Eine der schwierigsten Entscheidungen bei der mathematischen Modellierung von Standortproblemen ist die Wahl der korrekten Zielfunktion. Eben deshalb wurden solche Aufgaben bisher meist sehr problemorientiert angegangen, das heißt es wurden viele Verfahren entwickelt, die aber jeweils nur auf einzelne Aufgaben eines ganz bestimmten Typs anwendbar sind.

Das Gebiet der Standortprobleme mit geordneten Medianfunktionen ist nun ein erster Ansatz, eine im Hinblick auf die Zielfunktionstypen möglichst allgemeine Theorie zu gewinnen, mit der die verschiedensten Probleme behandelt werden können. Geordnete Medianfunktionen erlauben es, die in der Praxis relevantesten Zielsetzungen durch eine allgemeine Funktion auszudrücken und so die für die Lösung wichtigen Eigenschaften und Gemeinsamkeiten zu einem einzigen Lösungsansatz zu verallgemeinern. Der Nachteil solcher mehrere Probleme umfassenden Verfahren ist natürlich, dass Effizienzverluste gegenüber den speziell auf ein Problem zugeschnittenen Verfahren entstehen. Dagegen führt die allgemeine Problemformulierung aber auch auf einfache Weise die Bildung von bisher nicht untersuchten Zielfunktionen herbei. Für diese Spezialfälle können erste Lösungsansätze aus der Theorie der geordneten Medianprobleme abgeleitet und weiterentwickelt werden.

Dieses Kapitel behandelt die Theorie der geordneten Medianprobleme. Dafür werden im ersten Abschnitt die geordneten Medianfunktion und das zugehörige Standortproblem definiert, außerdem werden die wichtigsten Eigenschaften dieses Zielfunktionstypen vorgestellt. Danach werden die für die Lösung der Standortprobleme wichtigen Konzepte der geordneten Regionen, der Bisektoren und der geordneten elementarkonvexen Mengen betrachtet. Mit den gewonnenen Grundlagen werden im Anschluss Lösungsverfahren für konvexe einkriterielle Probleme hergeleitet, um Ansätze für den in Kapitel 4 beschriebenen Spezialfall einer geordneten Medianfunktion zu gewinnen. Inhaltlich stützt sich dieses Kapitel auf die Ausführungen in [Nickel und Puerto], Kapitel 1 bis 5.

Begonnen wird aber zunächst mit einem motivierenden Beispiel, das in die Thematik einführen und die Idee der Verallgemeinerung veranschaulichen soll.

Eine große Supermarktkette möchte eine neue Filiale eröffnen. Es konnte bereits festgestellt werden, dass die Hauptkunden in vier verschiedenen Wohngebieten (A_1, \dots, A_4) der Stadt leben. Die Manager der Kette haben Angebote für drei mögliche Grundstücke X_1, \dots, X_3 , wo sie ihren neuen Markt errichten könnten. Die Baukosten unterscheiden sich in den einzelnen Orten nur so geringfügig, dass dieses Kriterium vernachlässigt werden kann und die von den Kunden zurückzulegende Strecke entscheidend ist. Die Entfernungen der verschiedenen Kundengebiete zu den möglichen neuen Standorten sind in Tabelle 3.1 aufgestellt, die Lagesituation der Orte wird in Abbildung 3.1. dargestellt.

	X_1	X_2	X_3
A_1	19	18	35
A_2	5	8	22
A_3	26	12	15
A_4	11	24	7

Tab. 3.1: Entfernungen

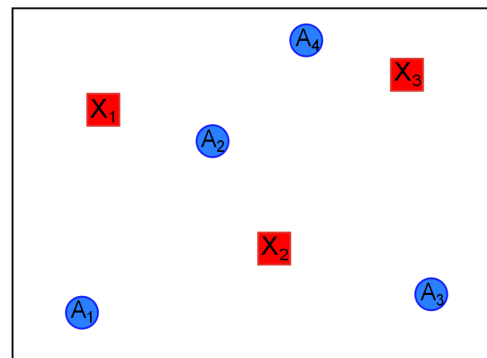


Abb. 3.1: Kunden und mögliche Standorte

Die Entscheidungsträger müssen nun abwägen, welcher der drei Standorte für die neue Filiale gekauft werden soll. Die Frage ist aber, nach welchem Kriterium entschieden, also welche Zielfunktion dem Problem zugrunde gelegt werden soll.

Eine Möglichkeit wäre es, den neuen Standort so zu wählen, dass die Summe aller Entfernungen zu den Kunden möglichst gering ist. Mit diesem Ziel entsteht ein Medianproblem. In dem Falle wäre X_1 mit einer Gesamtentfernung von 61 die beste Wahl.

Letzteres könnte für einzelne, sehr weit entfernt lebende Kunden jedoch bedeuten, dass sie eine verhältnismäßig lange Strecke zum Markt zurücklegen müssen. Für diese Kunden wäre es günstiger, die maximale Entfernung eines Kunden zum Supermarkt zu minimieren. Mit dieser Zielsetzung, der Centerfunktion, wäre X_2 der optimale Standort mit einer maximalen Entfernung von 24.

Auch ganz andere Vorgehensweisen sind denkbar. Eine Kombination von Center- und Medianzielfunktion, genannt α -Centdian Funktion, würde beide oben erwähnte Möglichkeiten miteinander kombinieren. Doch egal welcher Standort gewählt wird, eine Kundengruppe ist immer relativ weit entfernt. Diese weiteste Entfernung könnte deshalb als „Ausreißer“ angesehen und stattdessen die Strecke zum zweitweitest entfernten Kunden minimiert werden. Dies führt zu einer 2-max-Zielfunktion. Die Liste von verschiedenen Möglichkeiten kann beliebig lang fortgesetzt werden.

Für jede genannte Zielfunktion müssten die Manager nun ein anderes Verfahren anwenden, um ihren optimalen Standort zu ermitteln. Wünschenswert wäre es daher, all diese Möglichkeiten auf eine Zielfunktion zu verallgemeinern, ein Verfahren für dieses Problem zu entwickeln und dann die verschiedenen Optionen am Ende nur noch als Spezialfälle austesten zu müssen.

Mit der Herleitung einer solchen Verallgemeinerung und möglicher Lösungsverfahren beschäftigen sich die nächsten Abschnitte und Kapitel.

3.1 Eigenschaften der geordneten Medianfunktion

Nun wird die Familie der geordneten Medianfunktionen vorgestellt, die die im obigen Beispiel beschriebenen, wünschenswerten Eigenschaften besitzt.

Eine geordnete Medianfunktion GMF ist die gewichtete Summe von geordneten Elementen eines Vektors x . Zunächst müssen die Elemente des Arguments also in eine bestimmte Reihenfolge gebracht werden.

Für jedes $x \in \mathbb{R}^M$ sei $x_{\leq} = (x_{(1)}, \dots, x_{(M)})$ der Vektor, in dem die Einträge des zugehörigen Vektors x der Größe nach aufsteigend sortiert wurden, so dass $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(M)}$ gilt. Die Sortierung ergibt sich dann mit der Funktion

$$\begin{aligned} \text{sort}_M : \mathbb{R}^M &\rightarrow \mathbb{R}^M \\ x &\mapsto x_{\leq}. \end{aligned}$$

Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^M . [Nickel und Puerto] definieren die geordnete Medianfunktion wie folgt.

Definition 3.1

Die Funktion $f_{\lambda} : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **geordnete Medianfunktion**, kurz GMF, falls $f_{\lambda}(x) = \langle \lambda, \text{sort}_M(x) \rangle$ für ein $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M) \in \mathbb{R}^M$.

Die geordnete Medianfunktion ist also nichtlinear; diese Nichtlinearität wird durch die nötige Sortierung verursacht. Es kann allerdings eine punktweise definierte Linearität erreicht werden, das heißt, dass Regionen existieren, innerhalb derer die Funktion linear ist, da sich die Sortierung des Vektors x dort nicht ändert. Auf diese Weise erfolgt eine Zerlegung des zulässigen Bereichs in verschiedene Teilbereiche, die so genannten Elementarregionen, auf denen dann jeweils ein Standortproblem mit linearer Zielfunktion gelöst werden kann. Diese Aufteilung hängt stark von dem zugrunde liegenden λ ab und wird in den Abschnitten 3.2.2 bis 3.2.4 genauer untersucht.

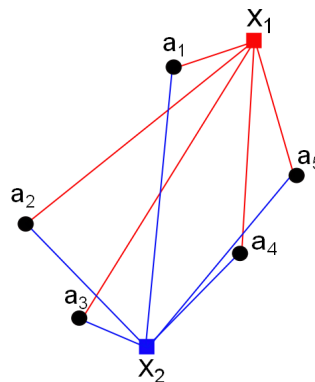


Abb. 3.2: Änderung der Sortierung an verschiedenen Punkten

Abbildung 3.2 zeigt die Auswirkung auf die Sortierung an verschiedenen Punkten der Zielfunktion. Es seien x_1, x_2 mögliche neue Standorte und a_1, \dots, a_5 bereits existierende Kunden. Sortiert man die Kunden in aufsteigender Reihenfolge danach, wie weit sie (bezüglich eines

bestimmten Abstandsmaßes) von den neuen Standorten entfernt sind, so folgt für x_1 die Sortierung $(a_1, a_5, a_4, a_2, a_3)$. Allerdings bleibt diese Sortierung nicht für den gesamten zulässigen Bereich gleich, denn schon für den Standort x_2 ändert sich die Reihenfolge der Kunden zu $(a_3, a_4, a_2, a_5, a_1)$.

Aus dieser Änderung der Sortierung resultiert die Nichtlinearität der geordneten Medianfunktionen.

Tabelle 3.1 zeigt einige Spezialfälle der GMF, die durch verschiedene Wahlen der λ entstehen.

λ	$f_\lambda(x)$	Funktion
$(\frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M})$	$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i$	Medianfunktion
$(0, \dots, 0, 1)$	$\max_{1 \leq i \leq M} x_i$	Centerfunktion
$(\alpha, \dots, \alpha, 1)$	$\alpha \sum_{i=1}^M x_i + (1 - \alpha) \max_{1 \leq i \leq M} x_i$	α -Centdian Funktion
$(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$	$\sum_{i=M-k+1}^M x_{(i)}$	k -Centerfunktion
$(\overset{M-k+1.Pos.}{0}, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$	$\text{k-max}_{1 \leq i \leq M} x_{(i)}$	k-max Funktion

Tab. 3.2: Spezialfälle von geordneten Medianfunktionen (vgl. [Nickel und Puerto])

Als nächstes werden ein paar wichtige Eigenschaften von geordneten Medianfunktionen angegeben.

Satz 3.1

Sei $f_\lambda(x) \in GMF(M)$. Dann gelten die Aussagen:

1. $f_\lambda(x)$ ist stetig.
2. $f_\lambda(x)$ ist symmetrisch, d.h. $f_\lambda(x) = f_\lambda(\text{sort}_M(x)) \forall x \in \mathbb{R}^M$.
3. $f_\lambda(x)$ ist konvex $\Leftrightarrow 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M$.

[Nickel und Puerto] beweisen den Satz nicht, deshalb hier ein paar eigene Überlegungen zur Korrektheit der Aussagen.

Beweis:

Zu 1.: Siehe [Rosenbaum], Theorem 1.2.1.

Zu 2.: Trivial, wegen Definition von f_λ .

Zu 3.:

„ \Leftarrow “

Zunächst wird gezeigt, dass die geordnete Medianfunktion sublinear ist, das heißt, dass sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) (Positive Homogenität) $f_\lambda(\gamma x) = \gamma f_\lambda(x) \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}_+$,

(b) (Subadditivität) $f_\lambda(x + y) \leq f_\lambda(x) + f_\lambda(y) \quad \forall x, y.$

Eigenschaft (a) ist erfüllt, da:

$$f_\lambda(\gamma x) = \sum_{i=1}^M \lambda_i \text{sort}_M(\gamma x)_i = \sum_{i=1}^M \lambda_i \gamma \text{sort}_M(x)_i = \gamma \sum_{i=1}^M \lambda_i \text{sort}_M(x)_i = \gamma f_\lambda(x).$$

Außerdem ist die GMF subadditiv (Eigenschaft (b)):

Es seien σ, φ, τ die Permutationen der Vektoren $(x + y), x, y$, so dass

$(x + y)_{\sigma(1)} \leq \dots \leq (x + y)_{\sigma(M)}, x_{\varphi(1)} \leq \dots \leq x_{\varphi(M)}$ und $y_{\tau(1)} \leq \dots \leq y_{\tau(M)}$. Dann lässt sich Eigenschaft (b) wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \text{sort}_M(x + y) \rangle &\leq \langle \lambda, \text{sort}_M(x) \rangle + \langle \lambda, \text{sort}_M(y) \rangle \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^M \lambda_i (x + y)_{\sigma(i)} &\leq \sum_{i=1}^M \lambda_i x_{\varphi(i)} + \sum_{i=1}^M \lambda_i y_{\tau(i)} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^M \lambda_i x_{\sigma(i)} + \sum_{i=1}^M \lambda_i y_{\sigma(i)} &\leq \sum_{i=1}^M \lambda_i x_{\varphi(i)} + \sum_{i=1}^M \lambda_i y_{\tau(i)} \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung besteht aus zwei Skalarprodukten. Die beiden Vektoren im Skalarprodukt sind jeweils der Größe nach aufsteigend angeordnet, da $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M$ und auch x und y sortiert sind. Zu zeigen bleibt noch, dass das Skalarprodukt zweier sortierter Vektoren maximal ist und jede andere Permutation der Vektoren x und y zu einem kleineren Produkt führt.

Gezeigt werden soll diese Annahme für die erste Summe auf der rechten Seite der Ungleichung. Für die zweite Summe ist das Vorgehen analog.

Es sei nun das folgende Maximierungsproblems betrachtet, bei dem die optimale Permutation des Vektors x gesucht wird:

$$\max_{\bar{\varphi}} f_\lambda(x_{\bar{\varphi}}) = \sum_{i=1}^M \lambda_i x_{\bar{\varphi}(i)} \quad (*)$$

mit $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M$ und beliebiger Permutation $\bar{\varphi}$.

Ist φ die Optimallösung von (*), so ist die obige Ungleichung bewiesen.

Behauptung (**): Die Permutation φ mit $x_{\varphi(1)} \leq \dots \leq x_{\varphi(M)}$ bildet die Optimallösung von (*).

Es sei x_{\min} die kleinste Komponente in x , also $x_{\min} \leq x_i \quad \forall i = 2, \dots, M$. x_i kann also geschrieben werden als Summe aus x_{\min} und Konstanten $c_{\bar{\varphi}(i)}$ mit dem Wert $x_{\bar{\varphi}(i)} - x_{\min}$:

$$x = \begin{pmatrix} x_{\bar{\varphi}(1)} \\ \vdots \\ x_{\bar{\varphi}(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\min} + c_{\bar{\varphi}(1)} \\ \vdots \\ x_{\min} + c_{\bar{\varphi}(M)} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$g_\lambda(x_{\bar{\varphi}}) = \sum_{i=1}^M \lambda_i x_{\bar{\varphi}(i)} = \sum_{i=1}^M \lambda_i (x_{\min} + c_{\bar{\varphi}(i)}).$$

Annahme: $\bar{\varphi} \neq \varphi$ ist optimal.

$\Rightarrow \exists i, j$ mit $i < j$, so dass $c_{\bar{\varphi}(i)} > c_{\bar{\varphi}(j)}$, da die Komponenten von x nicht aufsteigend sortiert sind.

$\Rightarrow \exists \tilde{\varphi}$ mit $\tilde{\varphi}(i) = \bar{\varphi}(j)$ und $\tilde{\varphi}(j) = \bar{\varphi}(i)$, so dass $g_\lambda(\bar{\varphi}) < g_\lambda(\tilde{\varphi})$ da $\lambda_i < \lambda_j$, denn:

Damit $f_\lambda(\bar{\varphi}) < g_\lambda(\tilde{\varphi})$ gilt, muss die folgende Ungleichung gelten

$$\begin{aligned} \lambda_i x_{\bar{\varphi}(i)} + \lambda_j x_{\bar{\varphi}(j)} &\leq \lambda_i x_{\tilde{\varphi}(i)} + \lambda_j x_{\tilde{\varphi}(j)} \\ \Leftrightarrow \lambda_i x_{\bar{\varphi}(i)} + \lambda_j x_{\bar{\varphi}(j)} &\leq \lambda_i x_{\bar{\varphi}(j)} + \lambda_j x_{\bar{\varphi}(i)} \end{aligned}$$

Es werden $x_{\bar{\varphi}(j)}$ und λ_j aufgeteilt in zwei Summanden: $x_{\bar{\varphi}(j)} = x_{\bar{\varphi}(i)} + c_{ij}$, wobei $c_{ij} < 0$ konst., da i, j so gewählt waren, dass $x_{\bar{\varphi}(i)} > x_{\bar{\varphi}(j)}$ und $\lambda_j = \lambda_i + \bar{c}_{ij}$ mit $\bar{c}_{ij} > 0$, da λ aufsteigend sortiert. Dann gilt weiter:

$$\begin{aligned} \lambda_i x_{\bar{\varphi}(i)} + \lambda_j x_{\bar{\varphi}(j)} &\leq \lambda_i x_{\bar{\varphi}(j)} + \lambda_j x_{\bar{\varphi}(i)} \\ \Leftrightarrow \lambda_i x_{\bar{\varphi}(i)} + (\lambda_i + \bar{c}_{ij})(x_{\bar{\varphi}(i)} + c_{ij}) &\leq \lambda_i(x_{\bar{\varphi}(i)} + c_{ij}) + (\lambda_i + \bar{c}_{ij})x_{\bar{\varphi}(i)} \\ \Leftrightarrow \lambda_i x_{\bar{\varphi}(i)} + \lambda_i x_{\bar{\varphi}(i)} + \lambda_i c_{ij} + \bar{c}_{ij} x_{\bar{\varphi}(i)} + \bar{c}_{ij} c_{ij} &\leq \lambda_i x_{\bar{\varphi}(i)} + \lambda_i c_{ij} + \lambda_i x_{\bar{\varphi}(i)} + \bar{c}_{ij} x_{\bar{\varphi}(i)} \\ \Leftrightarrow \bar{c}_{ij} c_{ij} &\leq 0 \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich erfüllt, da $c_{ij} < 0$ und $\bar{c}_{ij} > 0$. Also ist $g_\lambda(\bar{\varphi}) < g_\lambda(\tilde{\varphi})$.

\Rightarrow Widerspruch zur Annahme und damit zur Optimalität von $\bar{\varphi}$.

Diese Vertauschungen können iterativ so lange fortgesetzt werden, bis x der Größte nach aufsteigend sortiert und $g_\lambda(\varphi)$ mit der Permutation φ optimal ist.

\Rightarrow (*) ist maximal für die oben definierten Permutationen φ und τ , Behauptung (***) folgt.

Die Ungleichung $\sum_{i=1}^M \lambda_i x_{\sigma(i)} + \sum_{i=1}^M \lambda_i y_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^M \lambda_i x_{\varphi(i)} + \sum_{i=1}^M \lambda_i y_{\tau(i)}$ ist nun also offensichtlich erfüllt. σ sortiert nur den Vektor $(x + y)$ der Größe nach, nicht aber x und y selbst, weshalb das Skalarprodukt bezüglich der nach σ geordneten Vektoren nicht maximal und deshalb kleiner als die rechte Seite ist.

\Rightarrow Die GMF ist subadditiv und damit insgesamt sublinear.

Jede sublineare Funktion ist konvex, denn es gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^M$ und $\beta \in (0, 1)$:

$$f(\beta x + (1 - \beta)y) \leq f(\beta x) + f((1 - \beta)y) = \beta f(x) + (1 - \beta)f(y)$$

\Rightarrow Die GMF $f_\lambda(x)$ ist konvex.

„ \Rightarrow “

Die Behauptung wird via Kontraposition gezeigt:

Sind die λ_i nicht der Größe nach aufsteigend sortiert, so ist $f_\lambda(x)$ nicht konvex.

Es sei also λ nicht der Größe nach sortiert, d.h. es gibt mindestens zwei Komponenten i, j für die $\lambda_i > \lambda_j$ mit $i < j$.

Annahme: $f_\lambda(x)$ ist konvex, d.h. es gilt $f_\lambda(\beta x + (1 - \beta)y) \leq \beta f_\lambda(x) + (1 - \beta)f_\lambda(y) \forall x, y \in \mathbb{R}^M, \forall \beta \in (0, 1)$.

Sei nun $\beta = \frac{3}{4}$, $i = M - 1$ und $j = M$, d.h. es gilt $\lambda_{M-1} > \lambda_M$. Außerdem seien x und y

der M -te bzw. $(M - 1)$ -te Einheitsvektor $x = e_M$ und $y = e_{M-1}$. Dann gilt aufgrund der Konvexitätsannahme:

$$\begin{aligned} f_\lambda\left(\frac{3}{4}x + \left(1 - \frac{3}{4}\right)y\right) &\leq \frac{3}{4}f_\lambda(x) + \left(1 - \frac{3}{4}\right)f_\lambda(y) \\ \Leftrightarrow \left\langle \lambda, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y \right\rangle &\leq \frac{3}{4}\langle \lambda, x \rangle + \frac{1}{4}\langle \lambda, y \rangle \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}\lambda_{M-1} + \frac{3}{4}\lambda_M &\leq \frac{3}{4}\lambda_M + \frac{1}{4}\lambda_M \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}\lambda_{M-1} + \frac{3}{4}\lambda_M &\leq \lambda_M \quad \not\Leftarrow \text{ da } \lambda_{M-1} > \lambda_M \end{aligned}$$

Daraus folgt also, dass f_λ nicht konvex ist und somit ist die Behauptung bewiesen.

q.e.d.

Bei der weiteren Analyse der Medianfunktion werden folgende zwei Notationen verwendet: Es ist S_M^{\leq} ein Simplex definiert als

$$S_M^{\leq} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_M) : 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M, \sum_{i=1}^M \lambda_i = 1\}$$

und der Kegel Λ_M^{\leq} ist gegeben durch

$$\Lambda_M^{\leq} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_M) : 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M\}.$$

Außerdem sei $\mathcal{P}(1\dots M) = \{\sigma : \sigma \text{ ist Permutation von } 1, \dots, M\}$ die Menge aller Permutationen der ersten M natürlichen Zahlen, wobei eine Permutation die Form $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(M))$ hat.

3.2 Das kontinuierliche geordnete Medianproblem

Nachdem die geordnete Medianfunktion mit einigen ihrer Eigenschaften vorgestellt wurde, soll diese nun als Zielfunktion eines Standortproblems betrachtet werden. Dafür wird als Erstes das kontinuierliche geordnete Medianproblem eingeführt. Gauges stellen allgemeine Abstandsmaße dar, die den Distanzen im Standortproblem zugrunde gelegt werden sollen. Sie werden im ersten Unterkapitel erläutert. Im Anschluss daran werden wichtige Hilfsmittel zur Analyse der geordneten Medianprobleme näher betrachtet, die für die Lösungsverfahren von großer Bedeutung sind. Soweit nichts anderes erwähnt wird, stammen alle Sätze, Definitionen und Lemmata von Kapitel 3 aus [Nickel und Puerto], bzw sind an diese angelehnt.

Im Folgenden sei $A = \{a_1, \dots, a_M\}$, $a_i \in \mathbb{R}^N$ die Menge der bereits existierenden Standorte bzw. der Kunden und $X = (x_1, \dots, x_P)$ die gesuchten neuen Standorte. In dieser Arbeit wird vor allem der Fall $X = \{x\}$ behandelt, es werden also nicht mehrere, sondern lediglich ein neuer Standort benötigt.

Die Qualität einer Lösung wird stets über das Verhältnis $d(A, X) = (d(a_1, X), \dots, d(a_M, X))$ von A zu X bewertet. Dieses kann zum Beispiel die Reisezeit, Entfernung oder die Kosten für das Fahren der Strecken ausdrücken. $d(A, X)$ ersetzt das allgemeine Argument x der oben definierten geordneten Medianfunktion und wird hier für die gewichtete Entfernung von A nach X stehen.

Jedem existierenden Standort a_i werden zudem Gewichte $w_i \in \mathbb{R}$ zugeordnet, die den verschiedenen Kunden unterschiedliche Wichtigkeit einräumen können.

Die Funktionen zur Messung der Entfernungen zwischen den einzelnen Standorten sollen so flexibel wie möglich gehalten werden, um eine große Anzahl an Problemen abdecken zu können. Zu diesem Zweck wird eine sehr allgemeine Klasse von Abstandsfunktionen, die so genannten Gauges, eingeführt.

Definition 3.2

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^N$ eine kompakte, konvexe Menge, die den Ursprung in ihrem Inneren enthält. Die **Gauge-Funktion** $\gamma : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann definiert durch

$$\gamma_B(x) := \min\{r > 0 : x \in rB\}.$$

Diese Definition geht auf das Minkowski-Funktional zurück, welches eine Verallgemeinerung des Normbegriffes darstellt (siehe [Minkowski]).

Die gewichtete Entfernung von a_i zu x kann also als $w_i\gamma_B(x - a_i)$ berechnet werden. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass jeder Punkt a_i eine eigene Distanzfunktion γ_{B_i} besitzt. In diesem Fall wird auch kurz γ_i geschrieben. B wird im Folgenden als Einheitskugel bzw. Einheitskreis der Gauge bezeichnet, wobei die Begriffe „Kugel“ und „Kegel“ nicht wörtlich zu nehmen sind.

Definition 3.3

Für ein gegebenes $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ ist das **geordnete Medianproblem**, kurz GMP, definiert als

$$\inf_{X \in \mathcal{X}} f_\lambda(d(A, X)) := \langle \lambda, \text{sort}_M(d(A, X)) \rangle,$$

wobei $d(A, X) = (d(a_1, X), \dots, d(a_M, X))$ und $d(a_i, X) = \min_{y \in \mathcal{X}} w_i \gamma_B(y - a_i)$.

Mit $M(f_\lambda)$ wird die Menge der optimalen Lösungen des GMP bezeichnet.

Wann immer es ohne Unklarheiten möglich ist, wird $f_\lambda(d(A, X))$ durch $f_\lambda(X)$ abgekürzt.

Beispiel 3.1 Es seien $a_1 = (2, 3)$, $a_2 = (4, 6)$ und $a_3 = (2, 2)$ mit den Gewichten $w = (1, 1, 1)$ und der Gauge γ für alle drei Punkte.

Mit der Wahl $\lambda = (1, 1, 1)$ erhält man das Medianproblem $\min_{x \in \mathcal{X}} f_\lambda(x) = \sum_{i=1}^3 \gamma(x - a_i)$.

Für $\lambda = (0, 1, 0)$ ergibt sich das 2-max-Problem $\min_{x \in \mathcal{X}} f_\lambda(x) = \max_{1 \leq i \leq 3} \gamma(x - a_i)$.

3.2.1 Gauges

In diesem Abschnitt sollen die für die Lösung des GMP wichtigen Eigenschaften von Gauges näher betrachtet werden, auch eine geometrische Interpretation wird angesprochen. Weiter werden die Begriffe der Extrempunkte und Fundamentalrichtungen eingeführt, die eine einfache Berechnung der Gauges ermöglichen.

Wie oben gesehen, ist eine Gauge ein Abstandsmaß, welches als verallgemeinerte Norm angesehen werden kann. Der einzige Unterschied ist, dass für Gauges keine Symmetrie gefordert wird.

Definition 3.4

Eine Gauge γ_B besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. Nichtnegativität: $\gamma_B(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
2. Definitheit: $\gamma_B(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. Positive Homogenität: $\gamma_B(\mu x) = \mu \gamma_B(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mu \geq 0$
4. Dreiecksungleichung: $\gamma_B(x + y) \leq \gamma_B(x) + \gamma_B(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Ist B zusätzlich symmetrisch, d.h. gilt $\gamma_B(x) = \gamma_B(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, so wird durch γ_B eine Norm mit zugehöriger Einheitskugel B definiert.

Lemma 3.1

$\gamma_B(x)$ ist konvex, d.h. es gilt

$$\gamma_B(\mu x + (1 - \mu)y) \leq \mu \gamma_B(x) + (1 - \mu)\gamma_B(y) \quad \forall 0 \leq \mu \leq 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\mu \in (0, 1)$. Dann folgt:

$$\gamma_B(\mu x + (1 - \mu)y) \stackrel{4.}{\leq} \gamma_B(\mu x) + \gamma_B((1 - \mu)y) \stackrel{3.}{\leq} \mu \gamma_B(x) + (1 - \mu)\gamma_B(y). \quad q.e.d.$$

Anschaulich gibt der Wert $\gamma_B(x)$ den Faktor an, um den die Einheitskugel B ausgedehnt bzw. zusammengezogen wird, bis sie den Punkt x berührt. Demnach hat ein a , das direkt auf der Einheitskugel B liegt einen Wert $\gamma_B(a) = 1$. Für $\gamma_B(b) > 1$ liegt der zugehörige Punkt b außerhalb der Kugel, während c sich für $\gamma_B(c) < 1$ innerhalb von B befindet (siehe Abbildung 3.3).

Definition 3.5

Der Fußpunkt x_B ist der Schnittpunkt des Randes von B mit dem Strahl vom Ursprung O durch x :

$$x_B = r_{Ox} \cap bd(B).$$

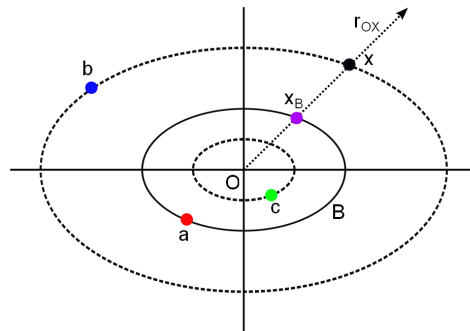


Abb. 3.3: Gauge γ_B mit Einheitskreis B und Fußpunkt x_B

Dieser Punkt ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Berechnung von allgemeinen Bisektoren (siehe Kapitel 4.2.3).

Definition 3.6

$Ext(B) = \{e_g : g = 1, \dots, G\}$ bezeichnet die Menge der **Extrempunkte** von B .
 Weiter seien r_1, \dots, r_G Halbgeraden, jeweils definiert durch O und einen der Extrempunkte e_1, \dots, e_G . Diese werden **Fundamentalrichtungen** genannt.
 Der Kegel Γ_g , aufgespannt durch r_g und r_{g+1} , heißt **Fundamentalkegel**. Es gilt $r_{G+1} = r_1$.

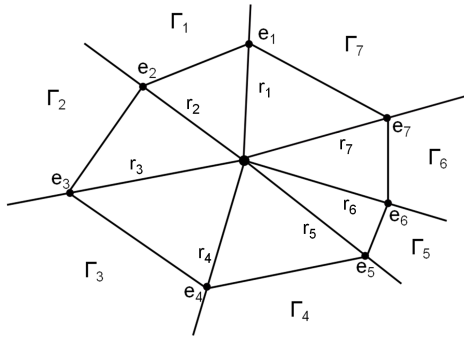


Abb. 3.4: Extrempunkte, Fundamentalrichtungen und -Kegel

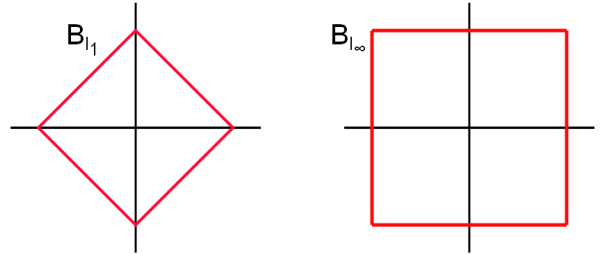


Abb. 3.5: Einheitskreise l_1 und l_∞ -Norm

Diese Arbeit beschränkt sich auf die Fälle, in denen die Menge B ein Polytop mit den Extrempunkten $Ext(B)$ ist. Die zugehörige Gauge wird **polyedrisch** genannt. Anschaulich bedeutet dies, dass der Rand der Einheitskugel aus lauter linearen Segmenten besteht. Beispiele für diese Gauges sind die bekannte Manhattan-Norm $d(a, b) = \sum_i |a_i - b_i|$ und die Maximumnorm $d(a, b) = \max_i \{a_i - b_i\}$ (siehe Abbildung 3.5).

In dem Fall einer polyedrischen Gauge gibt es eine einfache Möglichkeit $\gamma_B(x)$ im \mathbb{R}^2 zu berechnen.

Satz 3.2

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Polytop mit Extrempunkten $Ext(B) = \{e_g : g = 1, \dots, G\}$. Dann lässt sich der Wert von $\gamma_B(x)$ berechnen durch:

$$\gamma_B(x) = \min \left\{ \sum_{g=1}^G \mu_g : x = \sum_{g=1}^G \mu_g e_g, \mu_g \geq 0 \right\}.$$

Beweis: Für $x \in \mathcal{R}^2$ beliebig, aber fest, gilt:

$$\gamma_B(x) = \min \left\{ \mu > 0 : \frac{x}{\mu} \in B \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \min \left\{ \mu > 0 : \frac{x}{\mu} = \sum_{g=1}^G \beta_g e_g, \sum_{g=1}^G \beta_g = 1, \beta_g \geq 0 \quad \forall g \in \{1, \dots, G\} \right\} \\
&= \min \left\{ \mu > 0 : x = \sum_{g=1}^G (\mu \beta_g) e_g, \sum_{g=1}^G \beta_g = 1, \beta_g \geq 0 \quad \forall g \in \{1, \dots, G\} \right\} \\
&\stackrel{\mu_g = \mu \beta_g}{=} \min \left\{ \mu > 0 : x = \sum_{g=1}^G \mu_g e_g, \sum_{g=1}^G \mu_g = \mu, \mu_g \geq 0 \quad \forall g \in \{1, \dots, G\} \right\} \\
&= \min \left\{ \sum_{g=1}^G \mu_g : x = \sum_{g=1}^G \mu_g e_g, \mu_g \geq 0 \quad \forall g \in \{1, \dots, G\} \right\}
\end{aligned}$$

Der Beweis dieses Satzes ist angelehnt an die Darstellungen aus [Nickel und Puerto] und wurde zur besseren Verständlichkeit um ein paar Zwischenschritte ergänzt.

Da es nur endlich viele Möglichkeiten gibt, eine Linearkombination der Extrempunkte $Ext(B)$ zu bilden, um den Punkt x darzustellen, kann hier das Minimum statt dem Infimum verwendet werden.

q.e.d.

Anschaulich bedeutet dies, dass die Entfernung von einem Punkt y zu x die Länge des kürzesten Weges von y nach x ist, bei dem man sich nur in die Richtungen bewegt, die durch die Vektoren e_1, \dots, e_G definiert sind.

Ein anderes wichtiges Konzept in Bezug auf die Analyse von Gauges sind polare Mengen. Mit ihnen ergibt sich eine weitere Art der Darstellung von Gauges.

Satz 3.3

Die polare Menge, kurz **Polare**, von B ist definiert durch

$$B^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, p \rangle \leq 1 \quad \forall p \in B\}.$$

Die Polare B° induziert eine neue Gauge γ_{B° , genannt **Dualgauge**, mit Einheitskugel B° .

Ein Beispiel für eine Polare ist in Abbildung 3.6 gegeben. Weitere wichtige Fälle entstehen durch die häufig verwendeten Normen (siehe [Durier und Michelot]). Ist B zum Beispiel der euklidische Einheitskreis, so gilt $B = B^\circ$. Entspricht B dem Einheitskreis der l_1 -Norm, so ist B° der Einheitskreis der l_∞ -Norm und umgekehrt.

Lemma 3.2

Sei B eine abgeschlossene, konvexe Menge, die den Ursprung enthält. Dann ist γ_B die Stützfunktion der Polaren B° von B ,

$$\gamma_B(x) = \sup\{\langle x, y \rangle : y \in B^\circ\}.$$

Im Weiteren wird auch der Begriff des Normalenkegels benötigt.

Definition 3.7

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Ein $p \in \mathbb{R}^n$ heißt **Normalenvektor** zu C in $x \in C$, wenn $\langle p, y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$.
 Die Menge aller Normalenvektoren zu C in x heißt **Normalenkegel** in x und wird mit $N(x)$ bezeichnet.

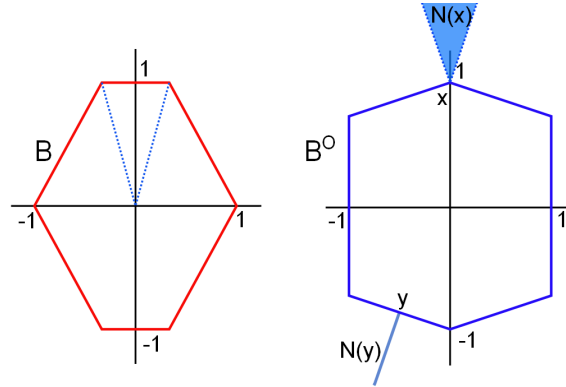


Abb. 3.6: Einheitskreis (rot) mit seiner Polaren (blau) und zwei Normalenkegeln (aus [Durier und Michelot])

Der Normalenkegel zu B° in x ist also $N_{B^\circ}(x) = \{p \in \mathbb{R}^n : \langle p, y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in B^\circ\}$. In Abbildung 3.6 sind zwei Normalenkegel dargestellt. Hier wird deutlich, dass der Normalenkegel in einem Punkt auf dem Rand, der kein Eckpunkt ist, nichts anderes ist als der zur Kante orthogonale Vektor, hier durch $N(y)$ repräsentiert. In einem Extrempunkt sind alle die Vektoren Normalenvektoren, die einen Winkel von mindestens 90° mit den beiden Kanten einschließen, die die Ecke definieren.

Mit den Definitionen von B und B° ist eine weitere Konstruktion des Normalenkegels $N(x)$ möglich (siehe [Durier und Michelot]): Ist x ein Punkt auf B° mit $\gamma_{B^\circ}(x) = 1$, so ist $N(x)$ der Kegel platziert im Ursprung, der durch ein $(n - 1)$ -dimensionales Randsegment $F(x) = \{p \in B : \langle x, p \rangle = 1\}$ von B generiert wird. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 3.6 durch gestrichelte Linien dargestellt.

Mit diesen Grundlagen lassen sich in den nächsten Kapiteln die Regionen beschreiben, auf denen die geordnete Medianfunktion linear ist.

3.2.2 Geordnete Regionen

Wie zu Beginn des Kapitels erwähnt, ist die geordnete Medianfunktion wegen der unterschiedlichen Sortierungen des Distanzvektors nichtlinear. Es können aber Gebiete bestimmt werden, auf denen sich die OMF linear verhält. Ein erster Schritt ist es, die Regionen zu bestimmen, auf denen sich die Reihenfolge der Elemente des Distanzvektors $d(A, X)_\leq$ nicht ändert.

Definition 3.8

Für eine Permutation $\sigma \in \mathcal{P}(1...M)$ wird die geordnete Region O_σ definiert durch die Menge

$$O_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^N : w_{\sigma(1)}\gamma_B(x - a_{\sigma(1)}) \leq \dots \leq w_{\sigma(M)}\gamma_B(x - a_{\sigma(M)})\}.$$

In einer geordneten Region ist die Permutation σ also konstant.

Die Region $O_{(\sigma(1), \dots, \sigma(M))}$ enthält genau die Punkte des Raumes, die am dichtesten an Standort $a_{\sigma(1)}$ liegen, am zweitdichtesten an $a_{\sigma(2)}$ usw, und von denen $a_{\sigma(M)}$ am weitesten entfernt ist. In Abbildung 3.7 sind die geordneten Regionen zweier Punkte bezüglich der euklidischen Norm dargestellt. Hier wird deutlich, dass die geordnete Region $O_{(1,2)}$ gerade die Punkte der Ebene enthält, die näher am existierenden Standort a_1 liegen als an a_2 . Für $O_{(2,1)}$ verhält es sich analog, alle Punkte der Menge besitzen eine kleinere Entfernung zu a_2 als zu a_1 .

Beispiel 3.2 Es seien $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (6, 10) \in A$ und $w_1 = w_2 = 1$. Beiden Standorten aus A wird die l_1 -Norm zugeordnet. Die geordnete Region zur Permutation $\sigma = (1, 2)$ ist dann die Menge aller $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit:

$$\begin{aligned} O_{(1,2)} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : l_1(x, a_1) \leq l_1(x, a_2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 \leq 8\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 6, x_2 \leq 2\} \\ &\quad \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 6, x_1 + x_2 \leq 8\} \end{aligned}$$

$O_{(1,2)}$ ist in Abbildung 3.8 blau hinterlegt. Für alle Punkte dieses Gebiets ist a_1 der nächstgelegene Standort, die Entfernung zu a_2 ist für $x \in O_{(1,2)}$ größer als zu a_1 . Auf der schwarzen Linie in der Mitte liegen gerade die Punkte, die von beiden existierenden Standorten gleich weit entfernt sind (siehe Kapitel 4.2.4). Ab dieser Linie ändert sich die Sortierung des Distanzvektors. Für ein $x \in O_{(2,1)}$ ist a_2 näher als a_1 .

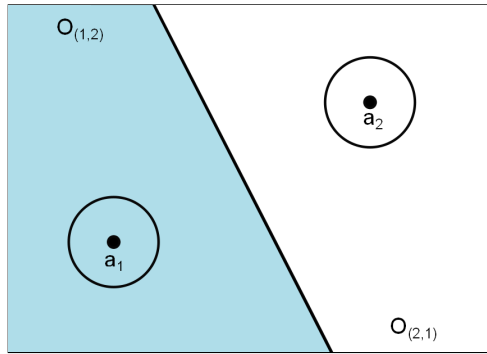


Abb. 3.7: Geordnete Regionen $O_{(1,2)}$ (blau) und $O_{(2,1)}$ zur l_2 -Norm

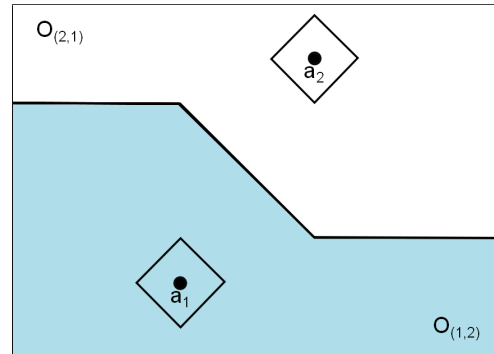


Abb. 3.8: Geordnete Regionen $O_{(1,2)}$ (blau) und $O_{(2,1)}$ zur l_1 -Norm

Die Region ist offensichtlich nicht konvex, dies ist im Allgemeinen der Fall. Eine Ausnahme bilden zum Beispiel die geordneten Regionen zur euklidischen Norm.

3.2.3 Bisektoren

In diesem Abschnitt sollen die so genannten Bisektoren näher betrachtet werden, da diese eine wichtige Komponente bei der Analyse der geordneten Medianprobleme darstellen.

Im letzten Unterkapitel wurde deutlich, dass die Sortierung des Distanzvektors innerhalb einer geordneten Region konstant bleibt. Das heißt, dass sich die Darstellung der geordneten Medianfunktion ändert, wenn für zwei verschiedene existierende Standorte $\gamma_B(x - a_i) - \gamma_B(x - a_j) = 0$

gilt, wenn also zum Beispiel von einer geordneten Region in eine Benachbarte übergegangen wird.

Definition 3.9

Die Punktmenge $Bisec(a_i, a_j) = \{x \in \mathbb{R}^N : w_i \gamma_B(x - a_i) = w_j \gamma_B(x - a_j), i \neq j\}$ heißt (gewichteter) **Bisektor** der Standorte a_i und a_j bezüglich der Gauge γ_B .

Die Elemente des Entfernungsvektors werden also immer dann neu geordnet, wenn sich ein potentieller neuer Standort x über einen Bisektor zwischen zwei existierenden Standorten bewegt. Zur besseren Anschauung beschränkt sich diese Arbeit auf den \mathbb{R}^2 , die verschiedenen Konzepte lassen sich aber auch auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Das einfachste Beispiel für einen Bisektor ergibt sich zu zwei Punkten aus dem \mathbb{R}^2 , beide versehen mit der euklidischen Norm. Dann ist der Bisektor eine Gerade, die senkrecht durch den Mittelpunkt der Verbindungslinie der beiden Punkte verläuft wie in Abbildung 3.7 dargestellt. Ein Beispiel für einen Bisektor zur l_1 -Norm findet sich in Abbildung 3.8.

Die Bisektoren zu allgemeinen Gauges können deutlich komplizierter aussehen. Oft wird intuitiv davon ausgegangen, dass ein Bisektor zusammenhängend ist oder, dass falls zweidimensionale Elemente existieren, diese unbeschränkt sein müssen.

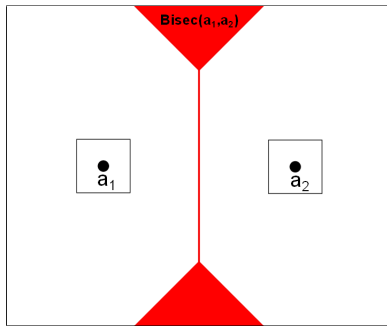


Abb. 3.9: Bisektor zur l_∞ -Norm

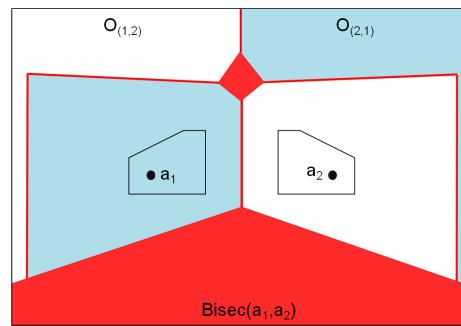


Abb. 3.10: Bisektor mit begrenzter und unbegrenzter Fläche

Allerdings gibt es Beispiele, in denen der Bisektor aus mehreren, nicht zusammenhängenden Komponenten besteht oder er sogar eine geschlossene Kurve bildet. Außerdem können flächige Elemente auftreten, die im Allgemeinen unbeschränkt sind (siehe Abb. 3.9), aber auch beschränkte zweidimensionale Gebiete sind möglich, wie in Abbildung 3.10 dargestellt. Diese zweidimensionalen Flächen entstehen immer dann, wenn die Verbindungslinie durch a_1 und a_2 parallel ist zu Kanten im Einheitskreis der Gauges.

Auch die Anschauung, dass Bisektoren immer die Grenze der geordneten Regionen darstellen, ist in manchen Fällen falsch. Es kann durchaus passieren, dass eine Bisektorkante nicht trennend ist, das heißt, dass sie in eine geordnete Region hineinragt, ohne diese von einer anderen Region abzugrenzen. Dieser Fall ist in Abbildung 3.11 dargestellt. Der Bisektor enthält hier eine Halbgerade, die durch die geordnete Region $O_{(2,1)}$ verläuft.

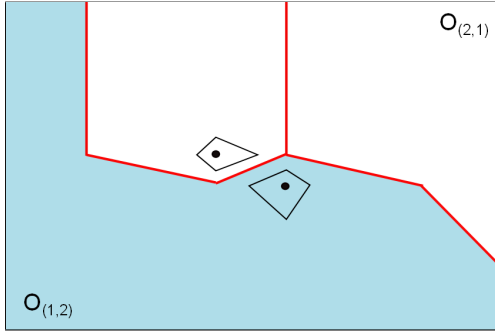


Abb. 3.11: Nicht teilender Bisektor (aus [Nickel und Puerto])

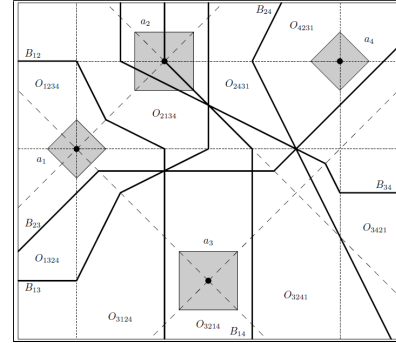


Abb. 3.12: Bisektoren und geordnete Regionen zu 4 Standorten (aus [Nickel et al.])

Werden mindestens zwei existierende Standorte betrachtet, so bildet jedes Paar dieser Standorte seinen eigenen Bisektor. Die Menge aller Bisektoren zu allen diesen Paaren liefert eine Unterteilung der Ebene in mehrere beschränkte oder unbeschränkte Zellen, in Abbildung 3.12 durch die schwarzen Bisektorlinien begrenzt. Diese Zellen, bzw. die Vereinigungen benachbarter Zellen (wenn Bisektor nicht teilend ist), entsprechen den geordneten Regionen aus Kapitel 3.2.2.

3.2.4 Geordnete elementarkonvexe Mengen

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, eine geometrische Beschreibung der optimalen Lösungsmenge eines GMP zu erhalten. Grundlage dafür sind die in Kapitel 3.1 angesprochenen Linearitätsregionen der geordneten Medianfunktion.

Neben der Permutation σ , die auf den im vorherigen Abschnitt definierten geordneten Regionen konstant ist, bestimmt ein weiterer wichtiger Bestandteil die Eigenschaften der geordneten Medianfunktion: Die verwendete Gauge. Um also die Gebiete zu erhalten, auf denen sich die GMF linear verhält, müssen zunächst die Linearitätsregionen der Gauge ermittelt werden. Die theoretischen Definitionen werden im Beispiel 3.3. anschaulich verdeutlicht.

Dazu sei $\mathcal{I} \neq \emptyset$ eine Teilmenge der Permutationen auf $(1, \dots, M)$ und $p = (p_1, \dots, p_M)$ die Menge von Punkten mit $p_j \in B^\circ \quad \forall j = 1, \dots, M$. Desweiteren sei $\forall \sigma \in \mathcal{I} \quad p_\sigma = (p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(M)})$ mit $p_{\sigma(j)} \in B^\circ \quad \forall j = 1, \dots, M$ die Permutation der Elemente von p gemäß σ .

Definition 3.10

Die Teilmengen des \mathbb{R}^N , auf denen sich γ_B linear verhält bzw. als Skalarprodukt schreiben lässt, werden **elementarkonvexe Mengen** $EK(p_\sigma)$ genannt. Es gilt:

$$EK(p_\sigma) = \bigcap_{i=1}^M (a_{\sigma(i)} + N(p_{\sigma(i)}))$$

Besitzen die existierenden Standorte unterschiedliche Gauges, so wird $N(p_{\sigma(i)})$ durch $N_{\sigma(i)}(p_{\sigma(i)})$ ersetzt, wobei $N_{\sigma(i)}$ von $B_{\sigma(i)}$ erzeugt wird.

Mit Hilfe der Beschreibung von Normalenkegeln im Kapitel 3.2.1 ergibt sich: Sind die Gauges polyedrisch, so sind die elementarkonvexen Mengen die Schnitte derjenigen Kegel, die von den Fundamentalrichtungen der Einheitskreise $B_{\sigma(i)}$, gelegen in dem jeweiligen Standort, generiert werden.

Als Schnitte von Kegeln sind die elementarkonvexen Mengen konvexe Polyeder, unabhängig von der verwendeten Gauge. Da es bei polyedrischen Gauges nur endlich viele Fundamentalrichtungen und damit endlich viele Kegel gibt, ist auch die Anzahl der elementarkonvexen Mengen endlich. Dies ist bei nichtpolyedrischen Distanzfunktionen nicht immer der Fall (siehe [Durier und Michelot]).

Beispiel 3.3 Betrachtet werden die beiden existierenden Standorte $a_1 = (0, 0)$ und $a_2 = (2, 1)$ ausgestattet mit der l_1 -Norm. Es sei $\mathcal{I} = \{(1, 2)\}$ und es wird $p = (p_1, p_2)$ mit $p_1 = (1, 1)$ und $p_2 = (-1, -1)$ gewählt. Abbildung 3.13 zeigt die zugehörige elementarkonvexe Menge.

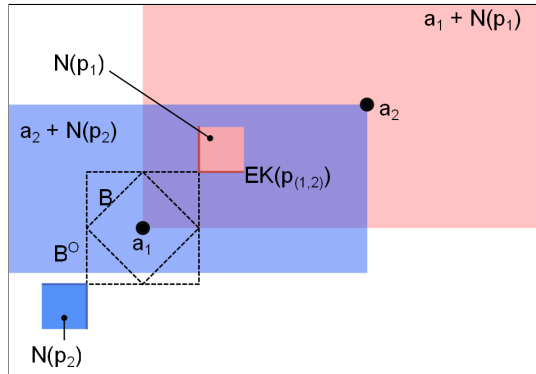


Abb. 3.13: Elementarkonvexe Menge EK zu $p_1 = (1, 1)$ und $p_2 = (-1, -1)$

In diesem Fall ist $p_\sigma = (p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}) = (p_1, p_2)$, also ist $EK(p_{(1,2)}) = a_1 + N(p_1) \cap a_2 + N(p_2)$. Dabei ist $a_1 + N(p_1)$ der Kegel in a_1 , der durch die Kante zwischen den Extrempunkten $(0, 1)$ und $(1, 0)$ aufgespannt wird, Kegel $a_2 + N(p_2)$ analog. Die Schnittmenge dieser beiden Kegel, dargestellt in rot bzw. blau, ergibt die elementarkonvexe Menge.

Wie sich in dem Beispiel gut erkennen lässt, wird bei einer polyedrischen Gauge sinnvollerweise $p \subseteq Ext(B^\circ)$ gewählt, also p_1, \dots, p_M als Extrempunkte von B° . Wenn auf diese Weise sämtliche Kombinationen von Extrempunkten der Gauges durchlaufen werden, dann werden alle möglichen Fundamentalkegel miteinander geschnitten und so entsteht eine Zerlegung des \mathbb{R}^N in die Linearitätsregionen von γ_B .

Werden nun die in diesem und den vorherigen Abschnitten erhaltenen Ergebnisse zusammengefügt, so entstehen die gesuchten Regionen, auf denen die geordnete Medianfunktion eine eindeutige lineare Darstellung besitzt. Aus den Definitionen 3.8 und 3.10 folgt sofort, dass ein solches Gebiet der Schnittmenge einer geordneten Region und einer elementarkonvexen Menge entspricht, denn dort bleibt die Permutation σ konstant und auch die Distanzfunktion verhält sich linear. Da diese Größen die Zielfunktion bestimmen, muss auch sie folglich linear sein. Definition 3.11 fasst dieses Ergebnis noch einmal formal zusammen.

Definition 3.11

Die Teilmengen des \mathbb{R}^N , auf denen die geordnete Medianfunktion GMF eine lineare Darstellung besitzt, heißen **geordnete elementarkonvexe Mengen** $GEK_{\mathcal{I}}(p)$. Sie sind definiert durch:

$$GEK_{\mathcal{I}}(p) = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{I}} \left(\bigcap_{i=1}^M (a_{\sigma(i)} + N(p_{\sigma(i)})) \cap O_{\sigma} \right).$$

Es gilt also offensichtlich $GEK_{\mathcal{I}}(p) \subseteq EK(p_{\sigma})$. Jede geordnete elementarkonvexe Menge als Schnitt von Halbebenen mit konvexen Mengen ist wieder konvex.

Da diese Regionen für das weitere Vorgehen von großer Bedeutung sind, folgt zunächst ein ausführliches Beispiel.

Beispiel 3.4 (Fortsetzung von Beispiel 3.3)

Ausgangspunkt sind wieder die existierenden Standorte aus Bsp. 3.3. Nun werden drei geordnete elementarkonvexe Mengen berechnet und am Bild anschaulich dargestellt.

Sei $\mathcal{I} = \{(1, 2)\}$ und die Extrempunkte $p_1 = (1, 1)$ und $p_2 = (-1, -1)$ gewählt. Die elementarkonvexe Menge $EK(p_{(1,2)})$ wurde in Bsp. 3.3 berechnet. Da die Menge \mathcal{I} aus nur einem Element besteht, fällt der Schnitt über die Permutationen weg. Es muss lediglich die Schnittmenge von $EK(p_{(1,2)})$ mit der zugehörigen geordneten Region $O_{\sigma} = O_{(1,2)}$ gebildet werden. Als geordnete elementarkonvexe Menge ergibt sich dann

$$GEK_{(1,2)}(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2} \right\},$$

in Abbildung 3.14 in lila dargestellt. In diesem Fall ist die Inklusion von $GEK_{(1,2)}$ in $EK(p_{(1,2)})$ also strikt.

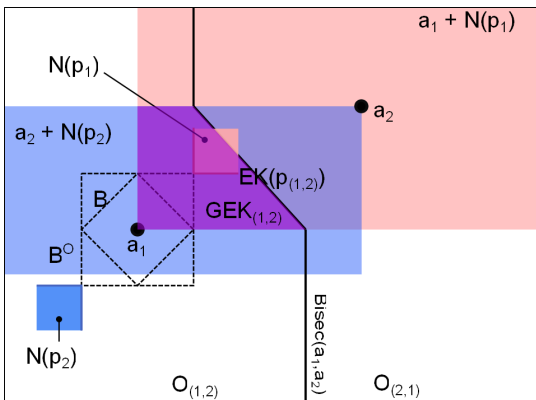


Abb. 3.14: Geordnete elementarkonvexe Menge $GEK(p)$ zu $\mathcal{I} = \{(1, 2)\}$

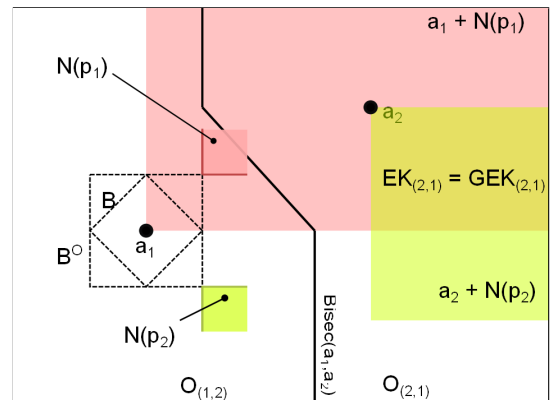


Abb. 3.15: Geordnete elementarkonvexe Menge $GEK(p)$ zu $\mathcal{I} = \{(2, 1)\}$

Sei nun $\mathcal{I} = \{(2, 1)\}$ und $p_1 = (1, 1), p_2 = (1, -1)$. Dann ist $p_\sigma = p_{(2,1)} = (p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}) = (p_2, p_1)$ und die elementarkonvexe Menge

$$\begin{aligned} EK(p_{(2,1)}) &= \{a_{\sigma(1)} + N(p_{\sigma(1)}) \cap a_{\sigma(2)} + N(p_{\sigma(2)})\} \\ &= \{a_2 + N(p_2) \cap a_1 + N(p_1)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 2, 0 \leq x_2 \leq 1.\} \end{aligned}$$

Diese Menge liegt komplett in $O_{(2,1)}$, die Schnittbildung für $GEK_{(2,1)}(p)$ führt keine weitere Änderung herbei. Damit gilt in diesem Falle $GEK_{(2,1)}(p) = EK(p_{(2,1)})$, wie in Abbildung 3.15 gezeigt.

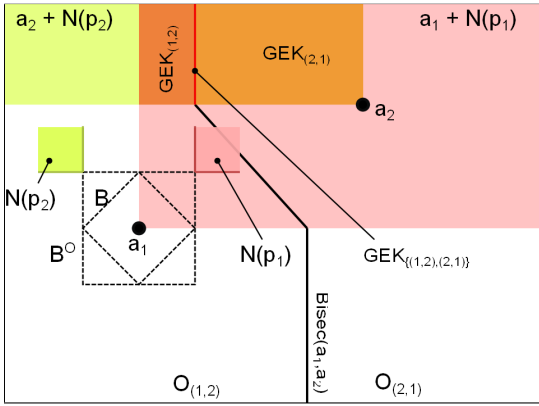


Abb. 3.16: Geordnete elementarkonvexe Menge $GEK(p)$ zu $\mathcal{I} = \{(1, 2), (2, 1)\}$

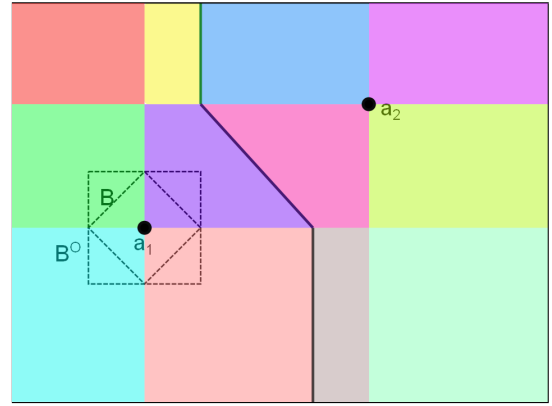


Abb. 3.17: Alle geordneten elementarkonvexen Mengen für $a_1 = (0, 0), a_2 = (2, 1)$

Jetzt sei ein Fall mit mehreren Permutationen betrachtet, $\mathcal{I} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ mit $p_1 = (1, -1), p_2 = (1, 1)$. Dann ist $p_{(1,2)} = (p_1, p_2)$ und $p_{(2,1)} = (p_2, p_1)$. Die beiden geordneten elementarkonvexen Mengen von je einer Permutation sind

$$\begin{aligned} GEK_{(1,2)} &= (a_1 + N(p_1) \cap a_2 + N(p_2)) \cap O_{(1,2)} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, x_2 \geq 1\} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} GEK_{(2,1)} &= (a_2 + N(p_2) \cap a_1 + N(p_1)) \cap O_{(2,1)} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 2, x_2 \geq 1\} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} GEK_{\{(1,2),(2,1)\}}(p) &= GEK_{(1,2)}(p) \cap GEK_{(2,1)}(p) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 2, 0 \leq x_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

Diese Region besteht also nur aus einer eindimensionalen Menge, dem oberen Abschnitt des Bisektors der beiden Punkte (siehe Abbildung 3.16).

Abbildung 3.17 zeigt abschließend die Aufteilung des ganzen Raumes in geordnete elementarkonvexe Mengen, die man durch das Durchlaufen aller Permutationen zu allen Kombinationen der Extrempunkte erhält.

Eine GEK zu zwei Permutationen ist nur dann nicht leer, wenn die zugehörige elementarkonvexe Menge den Bisektor der beiden Punkte enthält. Ist dies nicht der Fall, so gilt immer $GEK_{(2,1)}(p) = EK(p_{(2,1)})$.

Die Wichtigkeit dieses Konzeptes liegt darin, dass mit seiner Hilfe die Menge der optimalen Lösungen eines GMP beschrieben werden können.

So befindet sich unter den gesuchten Optimallösungen immer ein Eckpunkt der geordneten elementarkonvexen Mengen. Ist die Zielfunktion konvex, gilt also $\lambda \in S_M^<$, ist die Menge der Optimallösungen sogar eine zusammenhängende Kette von Punkten der geordneten elementarkonvexen Mengen. Auf diese Sachverhalte wird bei den entsprechenden Lösungsverfahren näher eingegangen.

Ein Ansatz für ein Lösungsverfahren wäre es also, die Zielfunktion an allen Eckpunkten der geordneten elementarkonvexen Mengen auszuwerten. Da dies aber zu aufwändig ist, werden weitere Eigenschaften genutzt, um effizientere Verfahren zu entwickeln.

Kapitel 4

Standortprobleme mit k-max Zielfunktion

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Herleitung von zwei verschiedenen Lösungsverfahren für einkriterielle Standortprobleme mit k-max Zielfunktion. Der erste Ansatz baut auf der geometrischen Anschauung des Problems auf und nutzt die Eigenschaften der geordneten elementarkonvexen Mengen, um Kandidatenpunkte für die Optimallösung herauszufiltern. Der zweite Algorithmus geht auf die besondere Lage der Optimallösung bei k-max Funktionen ein. Auf diese Weise kann die Lösung des k-max Problems auf die Lösung von Centerproblemen zurückgeführt werden, welche dann mit bekannten Algorithmen leicht zu lösen sind.

Die Verfahren werden für Standortprobleme mit l_1 -Norm als Distanzmaß hergeleitet, da diese besonders günstige Eigenschaften zur effizienten Lösung aufweist. Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels wird kurz eine Transformation für Probleme mit Maximumsnorm angesprochen.

4.1 Zusammenhang mit geordneten Medianproblemen

Wie bereits in Kapitel 3.1 erwähnt, stellt die geordnete Medianfunktion eine Verallgemeinerung der geläufigen Zielfunktionen für Standortprobleme dar. Das Ziel ist es, eine allgemeine Theorie für die verschiedensten Typen von Optimierungsproblemen dieser Art zu erhalten.

Auf der anderen Seite ermöglicht diese Theorie aber auch das Lösen von Standortproblemen mit ganz neuen, bisher unerforschten Zielfunktionen. Das Untersuchen solcher neuer Funktionen wird immer wichtiger, da in der Praxis die verschiedensten Gegebenheiten in die Berechnung mit einbezogen werden müssen, so dass die bekannten Zielsetzungen oft nicht ausreichen, um die realen Bedingungen abzubilden. Aus den Lösungsverfahren der geordneten Medianprobleme lassen sich dann Ansätze zur Lösung dieses neuen Problems als Spezialfall der allgemeinen Theorie herleiten.

Die k-max Zielfunktion ist ein solcher Spezialfall der geordneten Medianfunktion, was leicht anhand der Definitionen erkennbar ist:

$$\begin{aligned} \text{k-max}_{1 \leq i \leq M} \{x_i\} &= x_{(M-k+1)} \\ &= \sum_{i=1}^M \lambda_i \cdot x_{(i)} \quad \text{mit} \quad \lambda = (0, \dots, 0, \overset{M-k+1.Pos.}{1}, 0, \dots, 0) \\ &= \langle \lambda, \text{sort}_M(x) \rangle \quad \text{mit} \quad \lambda = (0, \dots, 0, \overset{M-k+1.Pos.}{1}, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck entspricht genau der Definition der GMF. Die k-max Funktion ist also eine geordnete Medianfunktion, bei der im Vektor λ nur der Eintrag λ_{M-k+1} gleich 1 ist, alle anderen Komponenten sind 0.

An dieser Stelle wird auch der Vorteil der zunächst umständlich erscheinenden Indexierung der k-max Funktion deutlich. Diese aufsteigende Reihenfolge, so dass $x_{(M)}$ das größte Element des Vektors ist, entspricht gerade der ansteigenden Sortierung des Argumentvektors der GMF.

Definition 4.1

Für ein gegebenes $k \in \{1, \dots, M\}$ ist ein **Standortproblem mit k-max Zielfunktion**, kurz SPk, definiert als

$$\inf_{X \in \mathcal{X}} f_k(d(A, X)) := \text{k-max}_{i=1, \dots, M} \{d(A, X)\},$$

wobei $d(A, X) = (d(a_1, X), \dots, d(a_M, X))$ und $d(a_i, X) = \min_{y \in \mathcal{X}} w_i \gamma_B(y - a_i)$.

Mit $M(f_k)$ wird die Menge der optimalen Lösungen von SPk bezeichnet.

Nach Satz 3.1. gilt:

$$f_\lambda(x) \text{ ist konvex} \Leftrightarrow 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M.$$

Da hier $\lambda = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ist, ist die aufsteigende Sortierung von λ nicht gegeben und somit ist die k-max Funktion, außer für $k = 1$, nicht konvex.

Bisher sind fast ausschließlich Verfahren für GMP mit konvexer Zielfunktion bekannt. Die Konvexität hat den Vorteil, dass die Optimallösungen des Problems eine konvexe Menge bilden (siehe Kapitel 4.2) und so das zu untersuchende Gebiet leichter eingeschränkt werden kann, ohne dabei zu einem lokalen statt globalen Minimum zu gelangen.

Im Folgenden werden Verfahren zur Lösung von Standortproblemen aufgestellt, die für alle $k = 1, \dots, M$, also gerade für die nicht konvexen Fälle, anwendbar sind.

4.2 Ein geometrisches Lösungsverfahren

In diesem Abschnitt soll ein Algorithmus zur Lösung von konvexen und nicht konvexen Standortproblemen mit k-max Zielfunktion hergeleitet werden, aufbauend auf den im Kapitel 3 beschriebenen strukturellen Eigenschaften der geordneten Medianfunktion. Für die Entwicklung des Algorithmus wird als Abstandsmaß die Manhattanorm (l_1) betrachtet, so dass das Problem SPk konkret folgende Form besitzt:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f_k(d(A, x)) = \text{k-max}_{i=1, \dots, M} \{w_i l_1(x - a_i)\} = \text{k-max}_{i=1, \dots, M} \{w_i [|x_1 - a_{i1}| + |x_2 - a_{i2}|]\}.$$

Zunächst werden einige Ergebnisse zur Lage der Optimallösungen dargestellt. Diese, sowie die Grundidee des Verfahrens für konvexe GMP, bauen auf den Beobachtungen in [Nickel und Puerto] auf. Daraus wird im Anschluss ein Verfahren speziell für Standortprobleme mit k-max Zielfunktion abgeleitet.

4.2.1 Geometrische Lage der Optimallösungen des GMP

Schon in Abschnitt 3.2.4 wurde die Verwendung der geordneten elementarkonvexen Mengen zur Beschreibung der optimalen Lösungsmenge kurz angesprochen: Unter den gesuchten Optimal-

lösungen befindet sich immer mindestens ein Eckpunkt der GEK. Diese Behauptung soll nun näher betrachtet und begründet werden.

Definition 4.2

Die Menge aller Extrempunkte bzw. Ecken aller geordneten elementarkonvexen Mengen eines GMP heißt **geordnete Schnittpunktmenge**, kurz *GSM*.

Durch Konstruktion der Strahlen der Fundamentalrichtungen sowie der Bisektoren entsteht eine Unterteilung der Ebene in die geordneten elementarkonvexen Mengen. Eine GEK wird im Weiteren auch als **Zelle** C der Zerlegung bezeichnet. Die Menge aller Zellen sei \mathcal{C} .

Zwei weitere wichtige Eigenschaften der geordneten Medianfunktion liefert das folgende Lemma aus [Nickel und Puerto].

Lemma 4.1

Die GMF besitzt die Eigenschaften:

1. f_λ ist affin linear in jeder Zelle $C \in \mathcal{C}$.
2. Wenn $\lambda \in S_M^\leq$ gilt, dann sind die Niveaulinien von f_λ konvexe Polygone in \mathbb{R}^2 , die in jeder Zelle $C \in \mathcal{C}$ affin linear sind.

Beweis:

1. Es sei $C \in \mathcal{C}$. Für diese Zelle existiert eine Permutation $\pi \in \mathcal{P}(1\dots M)$, so dass $C \subseteq O_\pi$ zu der entsprechenden geordneten Region gehört. Für $x \in C \subseteq O_\pi$ gilt also:

$$f_\lambda = \sum_{i=1}^M \lambda_i w_{\pi(i)} \gamma_{\pi(i)}(x - a_{\pi(i)}) = \sum_{i=1}^M \lambda_{\pi^{-1}(i)} w_i \gamma_i(x - a_i) = \sum_{i=1}^M \bar{w}_i \gamma_i(x - a_i),$$

wobei $\bar{w}_i := \lambda_{\pi^{-1}(i)} w_i$ ist und das zweite Gleichheitszeichen lediglich einer Umsortierung entspricht.

Jede Gauge $\gamma_i(x - a_i)$ ist in jedem Fundamentalkegel $a_i + \Gamma_i^j$, $j \in \{1, \dots, G_i\}$ affin linear.

$\Rightarrow \gamma_i(x - a_i)$ ist auch in $\bigcap_{i=1}^M (a_i + \Gamma_i^j)$ affin linear.

Da C als Schnitt der geordneten Region O_π mit zwei Fundamentalkegeln entsteht, muss C in obigem Schnitt enthalten sein. Damit ist f_λ also auch auf C affin linear.

2. Folgt direkt aus der Konvexität von f_λ und 1. q.e.d.

Wegen der Linearität der Zielfunktion in jeder GEK muss mindestens eine Optimallösung des GMP auf dem Rand einer Zelle, genauer gesagt in einem Eckpunkt, liegen. Mit dieser Erkenntnis kann die Lösung des GMP auf die Evaluation der Zielfunktion an allen Ecken jeder Zelle reduziert werden. Die Menge der geordneten Schnittpunkte (GSM) bildet somit eine zu untersuchende Kandidatenmenge, die mindestens eine optimale Lösung beinhaltet. Der folgende Satz von [Nickel und Puerto] gibt an, wie von den optimalen Eckpunkten auf die gesamte Menge der Optimallösungen geschlossen werden kann.

Satz 4.1

Es gibt mindestens eine Optimallösung des GMP mit polyedrischen Gauges in einem Extrempunkt einer Zelle, also in der Menge der geordneten Schnittpunkte GSM. Es gilt:

$$M(f_\lambda) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \text{conv}\{(\arg \min_{x \in \text{GSM}} f_\lambda(x)) \cap C\}.$$

Beweis:

Da die GMF nach Lemma 4.1 in jeder Zelle affin linear ist, gibt es mindestens eine Optimallösung unter den Ecken einer Zelle.

Falls mehrere optimale Lösungen unter den Ecken einer Zelle existieren, so ist aufgrund der Linearität von f_λ innerhalb der Zelle und der Konvexität der Zelle die gesamte konvexe Hülle dieser Ecken optimal.

q.e.d.

Die Menge der Optimallösungen kann also aus Zellenecken, -kanten oder kompletten Zellen bestehen. Außerdem ist sie im Allgemeinen nicht zusammenhängend, da hier die Konvexität von f_λ nicht gefordert ist. Wird diese als zusätzliche Voraussetzung aufgenommen, so lässt sich diese stärkere Aussage aus [Nickel und Puerto] über das Aussehen der Menge der optimalen Lösungen treffen.

Satz 4.2

Die Menge der Optimallösungen $M(f_\lambda)$ von GMP mit polyedrischen Gauges und $\lambda \in S_M^{\leq}$ ist entweder eine Ecke, eine beschränkte konvexe Vereinigung von Zellen oder Kanten der Unterteilung des \mathbb{R}^2 , entstehend durch Fundamentalrichtungen und Bisektoren.

Beweis:

Die Aussage folgt als direkte Konsequenz aus Lemma 4.1 und der Konvexität von f_λ .

Auch im konvexen Fall reicht es also, die Ecken der Zellen zu untersuchen; die Menge der Optimallösungen ist hierbei zusammenhängend.

Es gibt Überlegungen, die Kandidatenmenge im konvexen und nicht konvexen Fall weiter einzuschränken. Unter anderem beweisen [Nickel und Puerto], dass es ausreichend ist, nur die Ecken zu untersuchen, die innerhalb eines euklidischen Kreises, platziert im Ursprung, mit einem bestimmten Radius liegen. Da dieses Vorgehen aber bei Abstandsmaßen wie der hier untersuchten Manhattan- und Maximumsnorm keine deutliche Verbesserung aufweist, soll darauf nicht näher eingegangen werden.

Im nächsten Schritt erfolgt nun der Übergang zu den Standortproblemen mit k-max Zielfunktion und l_1 -Norm.

4.2.2 Reduktion der Kandidatenmenge

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Kandidatenmenge für optimale Lösungen so weit wie möglich zu minimieren, um die Zielfunktion nicht an allen Punkten $y \in \text{GSM}$ auswerten zu müssen.

Dabei kann die geometrische Struktur der k-max Zielfunktion sowie die Form der Bisektoren zur l_1 -Norm effizient ausgenutzt werden.

Der folgende Satz besagt, dass alle Eckpunkte der geordneten Schnittpunktmenge, die nur durch Fundamentalrichtungen und nicht durch Bisektoren gebildet werden, nicht in die weitere Untersuchung einbezogen werden müssen.

Satz 4.3

Es sei $k < M$ gegeben und das zu Grunde liegende Abstandsmaß die l_1 -Norm. Dann liegt die Optimallösung x^* von SPk mit k-max Zielfunktion immer auf mindestens einem Bisektor der existierenden Standorte a_1, \dots, a_M .

Beweis:

Es sei x^* der optimale Standort von GMP, gesucht sei das k-max der Distanzen mit $k < M$. Weiterhin sei d der Vektor der Distanzen bezüglich der l_1 -Norm von den existierenden Standorten zu einem Ort x , wobei allgemein $d = (d_1, \dots, d_M) = (d(a_1, x), \dots, d(a_M, x))$ mit $d(a_i, x) = w_i l_1(x, a_i)$ und $w_i > 0$. Bilde nun d_{\leq} , d.h. sortiere die Elemente von d der Größe nach absteigend, so dass gilt:

$$d_{(1)} \geq d_{(2)} \geq \dots \geq d_{(k)} \geq d_{(k+1)} \geq \dots \geq d_{(M)}.$$

Entsprechend sei $a_{(i)}$ der Standort, der die Distanz $d_{(i)}$ realisiert.

Annahme: x^* liegt auf keinem Bisektor der existierenden Standorte a_1, \dots, a_M . Dann gilt für den Distanzvektor bzgl. x^* :

$$d_{(1)} > d_{(2)} > \dots > d_{(k)} > d_{(k+1)} > \dots > d_{(M)}.$$

Eine Verschiebung von x^* in Richtung des Standortes $a_{(k)}$ führt zu einem neuen Abstand $\bar{d}_{(k)} < d_{(k)}$. Für eine ausreichend kleine Verschiebung von x^* bleibt die Sortierung der Elemente in \bar{d} gleich der in d , da x^* nicht am Rand einer geordneten Region liegen kann, da x^* nicht auf einem Bisektor liegt.

$$\Rightarrow \text{k-max}(\bar{d}) = \bar{d}_{(k)} < d_{(k)}. \quad \zeta$$

Es folgt ein Widerspruch zur Optimalität von x^* .

q.e.d.

Die Konsequenz dieser Feststellung ist, dass einige Ecken $y \in GSM$ aus der Kandidatenmenge für optimale Standorte mit $k < M$ ausgeschlossen werden können. Diese reduzierte Kandidatenmenge wird mit \mathcal{K} benannt. Die Zielfunktion muss nur an denjenigen Eckpunkten ausgewertet werden, die durch mindestens einen Bisektor gebildet werden. Heuristische Betrachtungen haben gezeigt, dass dieses Vorgehen bei sehr vielen existierenden Standorten keine sinnvolle Ersparnis bringt, da die Gesamtanzahl der Punkte in GSM insgesamt sehr groß ist. Wird allerdings ein relativ kleines Problem betrachtet, kann eine brauchbare Reduzierung der Kandidatenmenge erreicht werden. Wie gut die Verkleinerung der Kandidatenmenge ausfällt, hängt auch von der Lage der existierenden Standorte ab. Falls diese so liegen, dass die Bisektoren genau durch einige der Schnittpunkte der Fundamentalrichtungen verlaufen, kann nur wenig reduziert werden.

Abbildung 4.1 zeigt ein Beispiel für eine gelungene Reduzierung. Von den 21 zu untersuchenden Ecken aus der geordneten Schnittpunktmenge (alle Schnittpunkte von roten oder blauen Linien), können alle Schnitte von zwei Fundamentalrichtungen (zweier blauer Linien) als Optimallösung des GMP mit $k < M$ ausgeschlossen werden. Dadurch besteht die Kandidatenmenge \mathcal{K} nur noch aus 12 zu untersuchenden Eckpunkten.

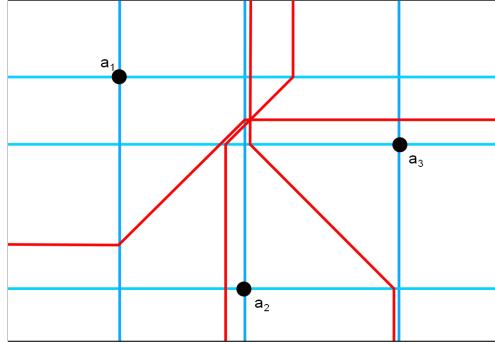


Abb. 4.1: Reduzierung der Kandidatenmenge: Bisektoren (rot), Fundamentalrichtungen (blau)

Die obige Aussage gilt nur für Standortprobleme mit $k < M$. Über die Lage der optimalen Standorte im Falle von $k = M$ gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 4.4

Es sei $k = M$ und die l_1 -Norm als Abstandsmaß gegeben. Dann liegen die Optimallösungen des SPk mit k-max Zielfunktion immer in den existierenden Standorten a_i , $i = 1, \dots, M$ und generieren einen optimalen Zielfunktionswert von 0.

Beweis:

Es seien a_i , $i = 1, \dots, M$ die existierenden Standorte und $k = M$ gegeben.

Zu zeigen:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \{M\text{-max}_{i=1, \dots, M} \{w_i l_1(a_i, x)\}\} = a_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}.$$

Betrachte das Optimierungsproblem SPk

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^2} \{M\text{-max}_{i=1, \dots, M} \{w_i l_1(a_i, x)\}\} \\ & \Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^2} \{ \min_{i=1, \dots, M} \{w_i l_1(a_i, x)\} \}. \end{aligned}$$

Wegen der Nichtnegativität von Normen gilt: $l_1(a_i, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$.

$$\Rightarrow \min_{i=1, \dots, M} \{l_1(a_i, x)\} \geq 0$$

$$\Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^2} \{ \min_{i=1, \dots, M} \{l_1(a_i, x)\} \} \geq 0.$$

Nach Definition der l_1 -Norm gilt: $l_1(a_i, x) = \sum_{j=1}^M |a_{ij} - x_j|$. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M |a_{ij} - x_j| = 0 \\ & \Leftrightarrow |a_{i1} - x_1| + |a_{i2} - x_2| = 0 \\ & \Leftrightarrow |a_{i1} - x_1| = 0 \wedge |a_{i2} - x_2| = 0 \\ & \Leftrightarrow a_{i1} = x_1 \wedge a_{i2} = x_2 \\ & \Leftrightarrow a_i = x \text{ für } i \in \{1, \dots, M\}. \end{aligned}$$

Der minimale Zielfunktionswert von 0 wird also in den existierenden Standorten angenommen und die Behauptung folgt.

q.e.d

Die Aussage von Satz 4.4 gilt auch für jede andere Distanzfunktion.

Liegt also der Fall $k = M$ vor, so können die optimalen Lösungen von SP k sofort und ohne Optimierungsverfahren angegeben werden. Auch anschaulich ist diese Feststellung klar, weil für $k = M$ das M -größte Element des Distanzvektors minimiert wird. Da der Vektor insgesamt nur M Komponenten besitzt, entspricht dies also der Minimierung des kleinsten Eintrages in d . Liegt der neue nun in einem existierenden Standort, ist die Distanz zwischen ihnen 0. Ein kleinerer Wert ist nicht möglich.

4.2.3 Berechnung der Bisektoren zur l_1 -Norm

Zur Betrachtung der Zielfunktionswerte an den Eckpunkten der verbleibenden Kandidatenmenge \mathcal{K} müssten zunächst die Fundamentalrichtungen und Bisektoren berechnet werden, um im nächsten Schritt deren Schnittpunkte bestimmen zu können.

Die Beschreibung der Fundamentalrichtungen ist aufgrund ihrer Definition nicht sehr kompliziert, es müssen nur die von dem jeweiligen Standort ausgehenden Strahlen durch alle seine zugehörigen Eckpunkte aufgestellt werden.

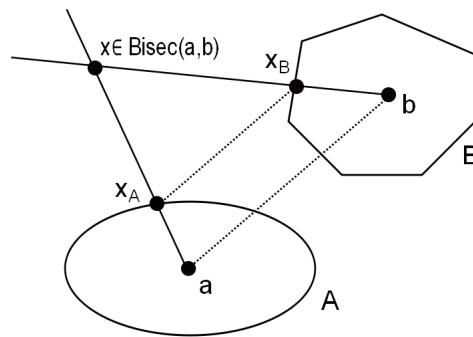


Abb. 4.2: Konstruktion eines Bisektorpunktes (siehe [Icking et al.])

Die Konstruktion der Bisektoren im Falle einer allgemeinen polyedrischen Gauge ist dagegen einer der aufwändigsten Teile des Verfahrens. Es existiert ein Verfahren zur Berechnung des Bisektors von zwei Punkten a und b mit Komplexität $\mathcal{O}(G + L)$, wobei G die Anzahl der Extrempunkte der Gauge zum Standort a und L die der zu Standort b darstellen. Der Algorithmus basiert auf einer Aufteilung des kompletten Bisektors in vier verschiedene Abschnitte, die zwar getrennt voneinander, aber nach einem ähnlichen Prinzip berechnet werden. Von der Beobachtung ausgehend, dass sich das lineare Verhalten des Bisektors nur an den Fundamentalrichtungen ändern kann, werden einzelne Bisektorstücke mit Hilfe der Fußpunkte (siehe Definition 3.4) innerhalb des Schnittes von je zwei Fundamentalkegeln berechnet. Dabei wird ausgenutzt, dass x genau dann zu $Bisec(a, b)$ gehört, wenn die Strecke \overline{ab} parallel ist zu der Geraden durch die beiden Fußpunkte x_A und x_B bzgl. x (siehe Abbildung 4.2). Die passenden Fußpunkte werden iterativ so konstruiert, dass die benötigte Parallelität der beiden Strecken vorliegt und nach

und nach die Punkte x des Bisektors entstehen. Um die Punkte x des Bisektors zu berechnen werden die Extrempunkte der Gauges in einer bestimmten Abfolge betrachtet; diese x werden schließlich in der Reihenfolge ihrer Berechnung verbunden, wodurch der komplette Bisektor entsteht. Der zugehörige Algorithmus wird in [Icking et al.] im Detail beschrieben.

Wird keine allgemeine polyedrische Gauge sondern die l_1 -Norm verwendet, so vereinfacht sich die Berechnung der Bisektoren, da diese lediglich aus drei linearen bzw. aus einem linearen und zwei unbegrenzten, quadratischen Segmenten bestehen.

Die Formel für die einzelnen Teile hängt davon ab, wie die beiden Orte $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$, deren Bisektor $Bisec(a_1, a_2)$ berechnet werden soll, zueinander liegen. Dafür werde derjenige der beiden existierenden Standorte, der die kleinere Abszisse besitzt, mit a bezeichnet, der andere mit b .

Es müssen die folgenden sechs Fälle berücksichtigt werden, um die drei Segmente des Bisektors korrekt zu bestimmen:

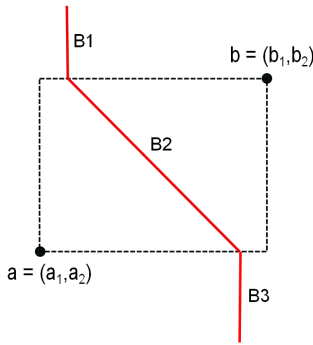


Abb. 4.3: Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 1

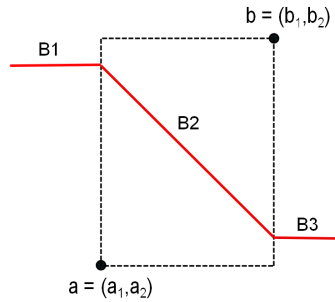


Abb. 4.4: Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 2

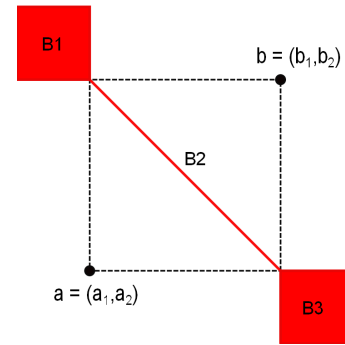


Abb. 4.5: Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 3

Fall 1: $b_1 - a_1 > b_2 - a_2 \rightarrow$ vertikale Ausrichtung des Bisektors (Abb. 4.3)

$$B1: \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = b_1 - \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + b_2 - a_2), x_2 \geq b_2\}$$

$$B2: \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - a_1 + x_2 - a_2 = b_1 - x_1 + b_2 - x_2, a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -x_2 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + b_1 + b_2), a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$$

$$B3: \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = a_1 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + b_2 - a_2), x_2 \leq a_2\}$$

Fall 2: $b_1 - a_1 < b_2 - a_2 \rightarrow$ horizontale Ausrichtung des Bisektors (Abb. 4.4)

$$B1: \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = a_2 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + b_2 - a_2), x_1 \leq a_1\}$$

$$B2: \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - a_1 + x_2 - a_2 = b_1 - x_1 + b_2 - x_2, a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -x_1 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + b_1 + b_2), a_1 \leq x_1 \leq b_1\}$$

$$B3: \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = b_2 - \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + b_2 - a_2), x_1 \geq b_1\}$$

Fall 3: $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 \rightarrow$ Bisektor mit zwei flächigen Elementen (Abb. 4.5)

$$B1 : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq a_1, x_2 \geq b_2\}$$

$$B2 : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -x_1 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + b_1 + b_2), a_1 \leq x_1 \leq b_1\}$$

$$B3 : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq b_1, x_2 \leq a_2\}$$

Die nächsten drei Fälle ergeben sich als Spiegelung der Vorangegangenen.

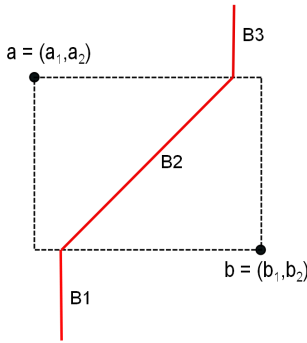


Abb. 4.6: Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 4

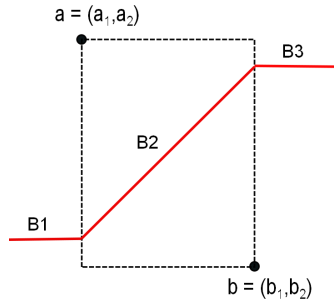


Abb. 4.7: Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 5

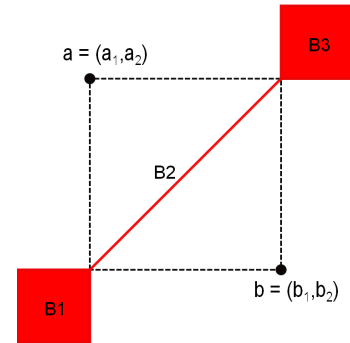


Abb. 4.8: Bisektor zur l_1 -Norm: Fall 6

Fall 4: $b_1 - a_1 > a_2 - b_2 \rightarrow$ vertikale Ausrichtung des Bisektors (Abb. 4.6)

$$B1 : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = b_1 - \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + a_2 - b_2), x_2 \leq b_2\}$$

$$B2 : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - a_1 + a_2 - x_2 = b_1 - x_1 + x_2 - b_2, a_1 \leq x_1 \leq b_1, b_2 \leq x_2 \leq a_2\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 + \frac{1}{2}(b_1 - b_2 + a_1 - a_2), b_2 \leq x_2 \leq a_2\}$$

$$B3 : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = a_1 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + a_2 - b_2), x_2 \geq a_2\}$$

Fall 5: $b_1 - a_1 < a_2 - b_2 \rightarrow$ horizontale Ausrichtung des Bisektors (Abb. 4.7)

$$B1 : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = a_2 - \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + a_2 - b_2), x_1 \leq a_1\}$$

$$B2 : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - a_1 + a_2 - x_2 = b_1 - x_1 + x_2 - b_2, a_1 \leq x_1 \leq b_1, b_2 \leq x_2 \leq a_2\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1 + \frac{1}{2}(a_2 + b_2 - b_1 - a_1), a_1 \leq x_1 \leq b_1\}$$

$$B3 : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = b_2 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + a_2 - b_2), x_1 \geq b_1\}$$

Fall 6: $b_1 - a_1 = a_2 - b_2 \rightarrow$ Bisektor mit zwei flächigen Elementen (Abb. 4.8)

$$B1: \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq a_1, x_2 \leq b_2\}$$

$$B2: \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1 + \frac{1}{2}(a_2 + b_2 - b_1 - a_1), a_1 \leq x_1 \leq b_1\}$$

$$B3: \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq b_1, x_2 \geq a_2\}$$

Damit kann der folgende Algorithmus zur Berechnung des Bisektors zweier Standorte $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit Manhattan-Distanzen aufgestellt werden.

Algorithmus 4.1 Berechnung $Bisec(a, b)$ zur l_1 -Norm

Input: Standorte $a, b \in A$ mit $a_1 \leq b_1$ (sonst umbenennen).

Output: Bisektor $Bisec(a, b)$ der beiden Punkte a und b .

if $b_1 - a_1 > b_2 - a_2$ **then**

$$\begin{aligned} Bisec(a, b) = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = b_1 - \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + b_2 - a_2), x_2 \geq b_2\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -x_2 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + b_1 + b_2), a_2 \leq x_2 \leq b_2\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = a_1 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + b_2 - a_2), x_2 \leq a_2\}. \end{aligned}$$

STOP

else if $b_1 - a_1 < b_2 - a_2$ **then**

$$\begin{aligned} Bisec(a, b) = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = a_2 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + b_2 - a_2), x_1 \leq a_1\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -x_1 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + b_1 + b_2), a_1 \leq x_1 \leq b_1\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = b_2 - \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + b_2 - a_2), x_1 \geq b_1\}. \end{aligned}$$

STOP

else if $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$ **then**

$$\begin{aligned} Bisec(a, b) = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq a_1, x_2 \geq b_2\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -x_1 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + b_1 + b_2), a_1 \leq x_1 \leq b_1\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq b_1, x_2 \leq a_2\}. \end{aligned}$$

STOP

else if $b_1 - a_1 > a_2 - b_2$ **then**

$$\begin{aligned} Bisec(a, b) = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = b_1 - \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + a_2 - b_2), x_2 \leq b_2\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 + \frac{1}{2}(b_1 - b_2 + a_1 - a_2), b_2 \leq x_2 \leq a_2\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = a_1 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + a_2 - b_2), x_2 \geq a_2\}. \end{aligned}$$

STOP

else if $b_1 - a_1 < a_2 - b_2$ **then**

$$\begin{aligned} Bisec(a, b) = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = a_2 - \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + a_2 - b_2), x_1 \leq a_1\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1 + \frac{1}{2}(a_2 + b_2 - b_1 - a_1), a_1 \leq x_1 \leq b_1\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = b_2 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1 + a_2 - b_2), x_1 \geq b_1\}. \end{aligned}$$

STOP

else if $b_1 - a_1 = a_2 - b_2$ **then**

$$\begin{aligned} Bisec(a, b) = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq a_1, x_2 \leq b_2\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1 + \frac{1}{2}(a_2 + b_2 - b_1 - a_1), a_1 \leq x_1 \leq b_1\} \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq b_1, x_2 \geq a_2\}. \end{aligned}$$

STOP

Zur Veranschaulichung zwei Beispiele zur Berechnung der Bisektoren aus verschiedenen Fällen.

Beispiel 4.1Zu Fall 5:

Es sei $a = (2, 8)$ und $b = (6, -2)$, siehe Abbildung 4.9. Da $b_1 - a_1 < a_2 - b_2 \Leftrightarrow 6 - 2 < 8 + 2$ liegt für $Bisec(a, b)$ Fall 5 vor. Demnach lässt sich der Bisektor beschreiben durch:

$$\begin{aligned} Bisec(a, b) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 8 - \frac{1}{2}(6 - 2 + 8 + 2), x_1 \leq 2\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1 + \frac{1}{2}(8 - 2 - 6 - 2), 2 \leq x_1 \leq 6\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -2 + \frac{1}{2}(6 - 2 + 8 + 2), x_1 \geq 6\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 1, x_1 \leq 2\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1 - 1, 2 \leq x_1 \leq 6\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 5, x_1 \geq 6\} \end{aligned}$$

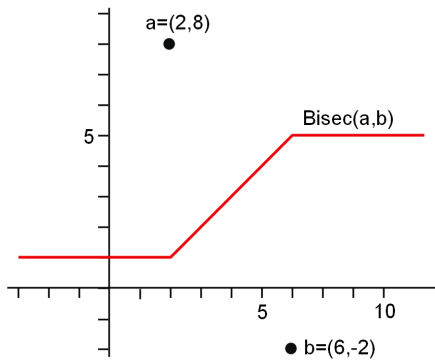


Abb. 4.9: Bisektor zu $a = (2, 8)$ und $b = (6, -2)$

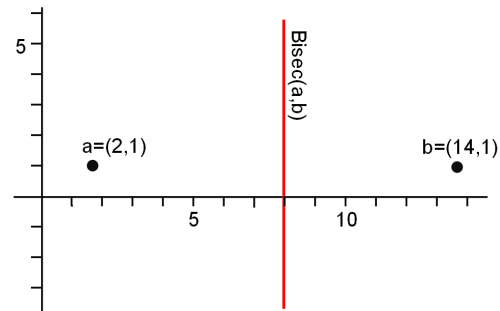


Abb. 4.10: Bisektor zu $a = (2, 1)$ und $b = (14, 1)$

Zu Fall 1:

Es sei $a = (2, 1)$ und $b = (14, 1)$, siehe Abbildung 4.10. Da $b_1 - a_1 > b_2 - a_2 \Leftrightarrow 14 - 2 > 1 - 1$ liegt für $Bisec(a, b)$ Fall 1 vor. Demnach lässt sich der Bisektor beschreiben durch:

$$\begin{aligned} Bisec(a, b) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 14 - \frac{1}{2}(14 - 2 + 1 - 1), x_2 \geq 1\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -x_2 + \frac{1}{2}(2 + 14 + 1 + 1), 1 \leq x_2 \leq 1\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 2 + \frac{1}{2}(14 - 2 + 1 - 1), x_2 \leq 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 8, x_2 \geq 1\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -x_2 + 9, x_2 = 1\} \\ &\cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 8, x_2 \leq 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 8\} \end{aligned}$$

4.2.4 Algorithmus und Komplexität

Aus den Bausteinen der Abschnitte 4.2.1 bis 4.2.3 kann nun ein Lösungsverfahren für Standortprobleme mit k-max Zielfunktion und zugrunde liegender l_1 -Norm zusammengesetzt werden. Zunächst werden die Fundamentalrichtungen und die Bisektoren zu den existierenden Standorten bestimmt. Anschließend werden alle Schnittpunkte von jedem Bisektor mit jeder Fundamentalrichtung sowie von je zwei Bisektoren berechnet. Diese Schnittpunkte entsprechen der reduzierten Kandidatenmenge \mathcal{K} , $\mathcal{K} \subset GSM$. An den Kandidatenpunkten wird die k-max Funktion ausgewertet. Der Kandidat mit dem niedrigsten Zielfunktionswert ist die gesuchte Optimallösung. Gibt es mehrere Punkte, die den optimalen Funktionswert annehmen, so wird jeweils von den optimalen Eckpunkten, die zu einer Zelle gehören, die konvexe Hülle gebildet. Die Vereinigung dieser konvexen Hüllen ist dann die Menge der optimalen Lösungen. Algorithmus 4.2 fasst dieses Vorgehen im geometrischen Lösungsverfahren zusammen.

Algorithmus 4.2 Das geometrische Lösungsverfahren

Input: Existierende Standorte $a_i \in A$, Gewichte w_i , $i = 1, \dots, M$, $k \in \{1, \dots, M\}$

Output: Menge $M(f_k)$ der opt. Standorte und opt. Zielfunktionswert z^* .

if $k=M$ **then**

$M(f_k) = \{a_i : i = \{1, \dots, M\}\}$ mit $z^* = M\text{-max}\{d(A, M(f_k))\} = 0$.

else

Konstruiere alle Fundamentalrichtungen und Bisektoren der ex. Standorte a_i , $i = 1, \dots, M$.

for $i=1$ to M **do**

for $j=i+1$ to M **do**

for $k=1$ to M **do**

for $l=k+1$ to M **do**

Berechne die Schnittpunkte von $Bisec(a_i, a_j)$ und $Bisec(a_k, a_l)$.

for $i=1$ to M **do**

for $j=i+1$ to M **do**

for $k = 1$ to 4 **do**

for $l = 1$ to M **do**

Berechne die Schnittpunkte von $Bisec(a_i, a_j)$ und d_l^k .

Speichere diese Schnittpunkte in der Kandidatenmenge \mathcal{K} .

for all $y \in \mathcal{K}$ **do**

Berechne $f_k(y) = k\text{-max}\{d(A, y)\}$.

$M(f_k) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \text{conv}\{(\arg \min_{y \in \mathcal{K}} f_k(y)) \cap C\}$ mit $z^* = f_k(x)$, $x \in M(f_k)$.

Zur Analyse der Komplexität von Algorithmus 4.2 wird abschnittsweise vorgegangen.

Im Fall $k = M$ sind nur zwei Zuweisungen zu erledigen, dies besitzt einen konstanten Aufwand von $\mathcal{O}(1)$.

Bei einem nicht-trivialen $k \neq M$ werden zunächst alle Fundamentalrichtungen und Bisektoren aufgestellt. Jeder existierende Standort besitzt mit l_1 -Norm vier Fundamentalrichtungen, bei M Standorten ergibt dies $\mathcal{O}(M)$ Geraden. Außerdem besitzen je zwei Standorte einen gemeinsa-

men Bisektor, insgesamt ist die Anzahl also $\frac{M(M-1)}{2}$. Die Berechnung eines einzelnen Bisektors erfolgt mit Algorithmus 4.1 (Kapitel 4.2.3) in $\mathcal{O}(1)$, damit ergibt sich für die Berechnung aller Bisektoren ein Aufwand von $\mathcal{O}(M^2)$.

Die Berechnung aller Schnittpunkte der Bisektoren benötigt $\mathcal{O}(M^4)$ Operationen, da jeder Bisektor mit jedem anderen geschnitten werden muss und die eigentliche Schnittpunktberechnung in konstanter Zeit umsetzbar ist. Die Schnittpunkte der Bisektoren mit den Fundamentalrichtungen hingegen besitzen nur eine Komplexität von $\mathcal{O}(M^3)$, weil die Anzahl der Fundamentalrichtungen zu jedem Standort fest ist.

Jede Auswertung der k-max Zielfunktion an einem der verbleibenden Kandidatenpunkte braucht aufgrund der nötigen Sortierung des Distanzvektors im Argument von f_k $\mathcal{O}(M \log(M))$ Operationen. Für die Kardinalität von \mathcal{K} gilt $|\mathcal{K}| = \mathcal{O}(M^4)$, da jeder Bisektor drei lineare Segmente besitzt. Das ergibt insgesamt $3M^2$ lineare Teilstücke; diese können bis zu $\frac{3M^2(3M^2-1)}{2}$ Schnittpunkte bilden. Für die $\mathcal{O}(M^4)$ Schnittpunkte in \mathcal{K} wird f_k je einmal ausgewertet, was insgesamt also einen Aufwand von $\mathcal{O}(M^5 \log(M))$ bedeutet.

Der letzte Schritt, die Bestimmung der konvexen Hülle der optimalen Eckpunkte, vergrößert die bisherige Komplexität nicht. Es gibt Algorithmen, die die konvexe Hülle in quadratischer Zeit berechnen. Das Verfahren „QuickHull“ zum Beispiel baut auf dem Divide-and-Conquer-Prinzip auf und erledigt die Rechnungen im Worst Case in der Zeit $\mathcal{O}(M^2)$, im Best-Case sogar in $\mathcal{O}(M \log(M))$ (vgl. [Dobkin et al.]).

Insgesamt dominiert also die Evaluation der Zielfunktion an den Kandidatenpunkten den Aufwand des Verfahrens und es ergibt sich ein Gesamtaufwand von $\mathcal{O}(M^5 \log(M))$ für das geometrische Lösungsverfahren.

Anhand der \mathcal{O} -Notation kann eine Ersparnis im Rechenaufwand durch die beschriebene Reduktion der Kandidatenmenge nicht nachgewiesen werden. Praktisch zeigt sich allerdings in den meisten Fällen, dass die Anzahl der zu überprüfenden Eckpunkte durch dieses Vorgehen deutlich abgesenkt werden kann.

Der Verlauf des Algorithmus sowie eine gelungene Reduktion der Kandidatenmenge werden an einem Beispiel mit drei Standorten verdeutlicht.

Beispiel 4.2 Es seien $a_1 = (0, 22)^T$, $a_2 = (13, 0)^T$ und $a_3 = (29, 15)^T$ die existierenden Standorte versehen mit der l_1 -Norm. Die optimale Lösungsmenge soll für alle möglichen k , also für $k = 1, 2, 3$ berechnet werden.

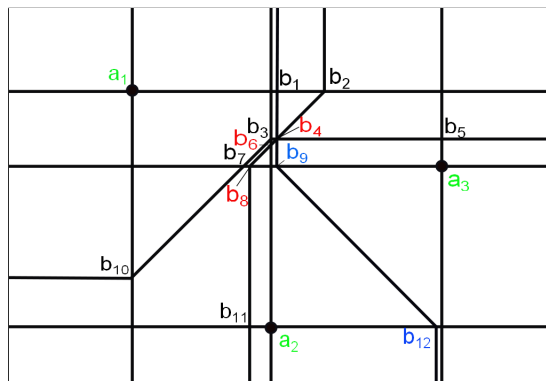


Abb. 4.11: Geometrisches Verfahren: Optimale Eckpunkte für $k=1$ (rot), $k=2$ (blau), $k=3$ (grün)

Durch Berechnung der Fundamentalrichtungen und Bisektoren (siehe Algorithmus 4.1) entsteht die in Abbildung 4.11 dargestellte Zerlegung der Ebene in die geordneten elementarkonvexen Mengen bzw. Zellen. Nach Reduktion der Kandidatenmenge (siehe Abb. 4.1) kommen nur noch die Eckpunkte b_i , $i = 1, \dots, 12$, sowie die a_i , $i = 1, \dots, M$ als mögliche Optimallösungen in Frage. Tabelle 4.1 zeigt alle Eckpunkte b_i sowie die existierenden Standorte a_i . Die zweite Spalte gibt die Werte des Distanzvektors d bzgl. des betrachteten Eckpunktes an. In den letzten drei Spalten finden sich die Werte f_k an den einzelnen Schnittpunkten für $k = 1, 2, 3$.

x	(x_1, x_2)	d	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
a_1	(0,22)	(0,35,36)	36	35	0
a_2	(13,0)	(35,0,35)	35	35	0
a_3	(29,15)	(36,31,0)	36	31	0
b_1	(13.5,22)	(13.5,22.5,22.5)	22.5	22.5	13.5
b_2	(18,22)	(18,27,18)	27	18	18
b_3	(13,17.5)	(17.5,17.5,19.5)	19.5	17.5	17.5
b_4	(13.5,17.5)	(18,18,18)	18	18	18
b_5	(29,17.5)	(33.5,33.5,2.5)	33.5	33.5	2.5
b_6	(13,17)	(19,17,18)	18	18	17
b_7	(10.5,15)	(17.5,17.5,19.5)	19.5	17.5	17.5
b_8	(11,15)	(18,17,18)	18	18	17
b_9	(13.5,15)	(20.5,15.5,15.5)	20.5	15.5	15.5
b_{10}	(0,4.5)	(17.5,17.5,39.5)	39.5	17.5	17.5
b_{11}	(11,0)	(33,2,33)	33	33	2
b_{12}	(28.5,0)	(50.5,15.5,15.5)	50.5	15.5	15.5

Tab. 4.1: Daten zu Beispiel 4.2

Für $k = 1$ nehmen die Standorte b_4 , b_6 und b_8 den kleinsten Zielfunktionswert von 18 an. b_4 und b_6 gehören zu einer Zelle, deshalb ist die konvexe Hülle der beiden Punkte ebenfalls optimal, hier die Strecke $\overline{b_4b_6}$. Genauso gehören b_6 und b_8 zu der gleichen Zelle, so dass alle Punkte auf $\overline{b_6b_8}$ optimal sind. Da b_6 zu beiden Zellen gehört ist die Menge der Optimallösungen hier zusammenhängend und es gilt $M(f_1) = \overline{b_4b_8}$.

Im Fall $k = 2$ ist der optimale Zielfunktionswert 15,5 und wird von den Ecken b_9 und b_{12} realisiert. Da diese zu der gleichen Zelle gehören, ist die gesamte konvexe Hülle $\text{conv}(b_9, b_{12})$ optimal und damit ist $M(f_2) = \overline{b_9b_{12}}$.

Ist $k = 3$, so werden die optimalen Standorte in den existierenden Standorten a_1 , a_2 und a_3 platziert, d.h. die Menge der Optimallösungen ist hier nicht zusammenhängend, da die Ecken nicht zur gleichen Zelle gehören. Der optimale Zielfunktionswert ist dabei 0, wie auch in Satz 4.4 bewiesen.

Das Beispiel zeigt den großen Vorteil des geometrischen Lösungsverfahrens: Wurde die Zielfunktion einmal an allen Kandidatenpunkten ausgewertet, so können verschiedene Instanzen

vom Standortproblem SP k mit unterschiedlicher Wahl für k ohne großen zusätzlichen Aufwand gelöst werden.

4.3 Lösung durch Rückführung auf Centerprobleme

Auch dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einem Lösungsverfahren für Standortprobleme SP k mit k-max Zielfunktion unter Verwendung der l_1 -Norm:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f_k(d(A, x)) = \text{k-max}_{i=1, \dots, M} \{w_i l_1(x - a_i)\} = \text{k-max}_{i=1, \dots, M} \{w_i [|x_1 - a_{i1}| + |x_2 - a_{i2}|]\}.$$

Allerdings wird hier ein anderer Ansatz gewählt, als für das geometrische Verfahren, welches sich stark an der Theorie für allgemeine geordnete Medianproblem orientiert.

Hier soll eine Rückführung der nicht-konvexen Probleme für $k > 1$ auf konvexe Probleme die Grundidee zur Lösung sein. Konkret wird dabei jedes SP k mit $k > 1$ auf den Fall $k = 1$, also auf Centerprobleme, zurückgeführt, für welche bereits gute Lösungsverfahren bekannt sind. Da dieses Vorgehen nicht auf Bisektoren, Fundamentalrichtungen und geordneten elementarkonvexen Mengen aufbaut, muss nicht im Vorfeld die Unterteilung der Ebene berechnet werden, was im allgemeinen Fall der aufwändigste Part des Verfahrens ist.

Zunächst werden einige für den Algorithmus wichtige Beobachtungen festgehalten und deren Korrektheit bewiesen. Im Anschluss daran wird ein Unterverfahren, das für die Rückführung benötigt wird, kurz beschrieben. Dabei handelt es sich um eine Lösungsmöglichkeit für Centerprobleme. Den Abschluss bilden die Aufwandsanalyse des vorgestellten Verfahrens sowie zwei ausführliche Beispiele.

4.3.1 Algorithmus und Korrektheitsbeweise

Das Verfahren „Rückführung auf den konvexen Fall“ errechnet die Optimallösung des SP k durch das Lösen von Centerproblemen zu bestimmten Teilmengen der existierenden Standorte.

Die Idee dabei ist, dass das Problem der Minimierung der k -größten Entfernung bei M existierenden Standorten äquivalent ist zu der Aufgabenstellung nur die $M - k + 1$ am dichtesten beieinander liegenden Standorte zu betrachten und von diesen den Centerpunkt \bar{x} zu berechnen. Durch das zweite Vorgehen wird sichergestellt, dass diese $M - k + 1$ Standorte auch die $M - k + 1$ kleinsten Distanzen zum Centerpunkt besitzen. Der größte dieser Abstände entspricht also genau dem gesuchten k-max, da die restlichen $k - 1$ nicht betrachteten Standorte auf jeden Fall einen größeren Abstand zu \bar{x} besitzen.

Dieser Gedanke wird im Folgenden formal dargestellt und bewiesen. Zunächst wird dafür definiert, was genau unter den „ $M - k + 1$ am dichtesten zusammenliegenden Punkten“ zu verstehen ist.

Definition 4.3

Es sei $\mathcal{R} := \{R : R \subseteq \{1, \dots, M\}, |R| = r\}$ die Menge aller r -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, M\}$. Die r Standorte $a_{i_1^*}, \dots, a_{i_r^*}$ mit Indexmenge $R^* = \{i_1^*, \dots, i_r^*\} \subseteq \mathcal{R}$ heißen **dichter zusammenliegend** als die Standorte $a_{\tilde{i}_1}, \dots, a_{\tilde{i}_r}$ mit $\tilde{R} = \{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_r\} \in \mathcal{R}$, wenn sie den kleineren Center-Zielfunktionswert realisieren.

Wenn $a_{i_1^*}, \dots, a_{i_r^*}$ unter allen Kombinationen $R \in \mathcal{R}$ den kleinsten Center-Zielfunktionswert besitzen, so heißen sie **am dichtesten zusammenliegend**, d.h. es gilt:

$$\arg \min_{R \in \mathcal{R}} \left\{ \min_{x \in \mathbb{R}^2} \left\{ \max_{\substack{i_m \in R \\ m=1:M}} \{w_{i_m} l_1(a, a_{i_m})\} \right\} \right\} = R^*.$$

Die Begriffe „weiter auseinanderliegend“ und „am weitesten entfernt/auseinanderliegend“ werden analog über einen größeren bzw. den größten realisierten Center-Zielfunktionswert definiert. Die Definition der Nähe von Punkten ist für dieses Verfahren nur direkt über die Höhe des Center-Zielfunktionswertes sinnvoll. Bei der Verwendung eines Umweges über die Summe von Abständen kann die Situation auftreten, dass die r -elementige Teilmenge zwar streckenmäßig eng beieinander liegt, die einzelnen Punkte aber zueinander eine ungünstige Lage besitzen. Ungünstig bedeutet in diesem Fall, dass die Standorte z.B. nahezu auf einer Linie liegen, so dass die Größe des induzierten Kreises oder die Summe der Abstände keine Aussage über die Höhe des Centerwertes liefern kann. Für diese Menge von Orten ist der Center-Zielfunktionswert größer als bei einer anderen Menge, deren Standorte eher gehäuft liegen, auch wenn sie dafür einen etwas größeren maximalen Abstand besitzen. Eine andere Idee war es, den von der Norm induzierten Kreis um einen Punkt zu betrachten und diesen so weit auszudehnen, bis er alle anderen Punkte der Menge überdeckt. Dies wird mit allen Punkten wiederholt und anschließend der Kreis mit dem kleinsten benötigten Radius ausgewählt. Aber auch hierbei tritt der oben beschriebene Effekt auf.

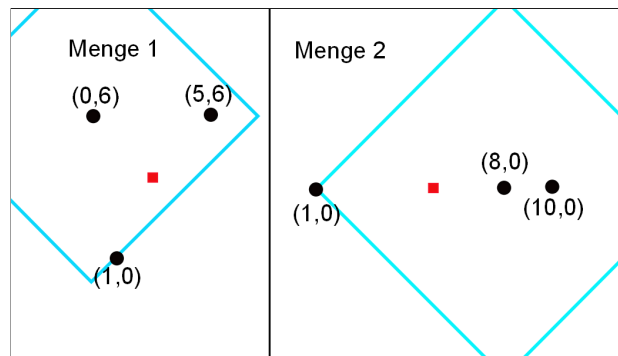


Abb. 4.12: Zwei gleich dicht zusammenliegende Mengen mit Center-Zielfunktionswert 5

Abbildung 4.12 zeigt ein Beispiel für zwei Mengen, deren Punkte gleich dicht zusammen liegen, denn beide generieren einen Center-Zielfunktionswert von 5 (Berechnung des Centerpunktes siehe Kapitel 4.3.2); die Center sind in rot dargestellt.

Außerdem wird hier deutlich, warum sowohl die Summe der Entfernungen als auch die Größe einer abdeckenden induzierten Kugel, gelegen in einem existierenden Standort, kein sinnvolles Kriterium bilden. Würde die Nähe durch die Summe von Entfernungen bestimmt werden, so ergäbe sich für Menge 1 ein Wert von $5 + 10 + 7 = 22$, für Menge 2 allerdings $8 + 10 + 2 = 20$. Demnach lägen die Punkte nicht gleich dicht zusammen, obwohl sie den gleichen Center-Wert bilden. Wird der Umfang des kleinsten von der Norm induzierten Kreises, platziert in einem existierenden Standort, der alle anderen Standorte abdeckt, betrachtet, so tritt eine ähnliche Situation ein. Der kleinste Kreis ist in Abbildung 4.12 jeweils in blau eingezeichnet. Dieses

Vorgehen ergibt bei Menge 1 einen Radius von 7, bei Menge 2 einen Wert von 8. Also kann auch dieses Maß keinen Aufschluss über den Center-Wert geben.

Satz 4.5 zeigt eine Möglichkeit, den Center-Zielfunktionswert aller r -elementigen Standortmengen leicht zu berechnen ohne zuerst ihren Centerpunkt bestimmen zu müssen. Dafür reicht eine Aussage über die ungefähre Lage des Centerpunktes.

Satz 4.5

Die Centerpunkte \bar{x} von $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ Standorten a_1, \dots, a_r liegen auf dem Bisektor der zwei am weitesten voneinander entfernten Standorte $a_p, a_q \in \{a_1, \dots, a_r\}$, für die also gilt:

$$\max_{i,j \in \{1, \dots, r\}} \{d(a_i, a_j)\} = d(a_p, a_q).$$

Beweis:

Dass die Centerpunkte auf einem Bisektor liegen, folgt nach Satz 4.3 mit $k = 1$. Bleibt zu zeigen, dass \bar{x} genau auf dem Bisektor der am weitesten voneinander entfernten Standorte liegt. Es sei d der Vektor der Distanzen mit $d = (d_1, \dots, d_r)^T = (d(a_1, x), \dots, d(a_M, x))^T$ bezüglich der l_1 -Norm. In d_{\geq} seien die Elemente von d der Größe nach absteigend sortiert. Diese Sortierung wird im Folgenden durch Klammern um den Index gekennzeichnet. Entsprechend sei $a_{(i)}$ der Standort, der die Entfernung $d_{(i)}$ generiert.

Annahme: \bar{x} liegt auf dem Bisektor zweier Standorte, die nicht am weitesten voneinander entfernt sind.

Für den Distanzvektor d_{\geq} zu \bar{x} gilt dann:

$$d_{(1)} > d_{(2)} > \dots > d_{(m)} = d_{(m+1)} > \dots > d_{(r)}, \quad m < r.$$

Verschiebung von \bar{x} in Richtung des Standortes $a_{(1)} \Rightarrow \bar{d}_{(1)} < d_{(1)}$.

Für eine genügend kleine Verschiebung bleibt die Sortierung von \bar{d} die gleiche wie für d , da $\bar{x} \notin \text{Bisec}(a_{(1)}, a_{(2)})$.

$$\Rightarrow 1 - \max\{\bar{d}\} = \max\{\bar{d}\} = \bar{d}_{(1)} < d_{(1)} \quad \not\Leftarrow$$

Widerspruch zur Optimalität von \bar{x} .

$\Rightarrow \max\{d\} = d_{(1)}$ kann durch Verschiebung verbessert werden, solange $d_{(1)} \neq d_{(2)}$ gilt.

$\Rightarrow \bar{x}$ liegt auf dem Bisektor der beiden weitest entfernten Standorte.

q.e.d.

Durch Satz 4.5 ist also bekannt, dass der Centerpunkt von M Standorten immer auf dem Bisektor der beiden am weitesten voneinander entfernten Standorte liegen muss. Wo genau sich der Centerpunkt auf dem Bisektor befindet, wird durch die Aussage allerdings nicht klar. Um die Lage etwas genauer zu bestimmen, wird Lemma 4.2 betrachtet.

Lemma 4.2

Es sei B_2 der mittlere Abschnitt (siehe Kapitel 4.2.3) eines Bisektors bezüglich der l_1 -Norm. Dann gilt: Die Punkte $x \in B_2 \subset \text{Bisec}(a, b)$ realisieren die minimalste Entfernung zu a, b unter allen Punkten des Bisektors, d.h.

$$\min_{z \in \text{Bisec}(a, b)} \{d(z, a)\} = d(x, a) \quad \forall x \in B_2$$

Beweis:

Im Folgenden liege ein Bisektor $Bisec(a, b)$ zur l_1 -Norm vom Fall 1 in Kapitel 4.2.3 vor, d.h. es gilt $b_1 - a_1 > b_2 - a_2$.

Betrachte $x = (x_1, x_2) \in B_2 \subset Bisec(a, b)$ und ein $y \in \mathbb{R}^2$, welches aus x durch eine Verschiebung hervorgeht, d.h. $y_2 = x_2 - \varepsilon$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ genügend klein, so dass $y \in B_2$.

Da $y \in B_2$ gilt nach Definition von B_2 und unter Beachtung von $y_2 = x_2 - \varepsilon$:

$$y_1 = -y_2 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) = -x_2 + \varepsilon + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) = x_1 + \varepsilon.$$

Für die Distanzen von x bzw. y zu a, b gilt dann

$$\begin{aligned} d(x, a) &= d(x, b) = w_b l_1(x, b) \\ &= w_b (|x_1 - b_1| + |x_2 - b_2|) \\ d(y, a) &= d(y, b) = w_b l_1(y, b) \\ &= w_b (|y_1 - b_1| + |y_2 - b_2|) \\ &= w_b (|x_1 + \varepsilon - b_1| + |x_2 - \varepsilon - b_2|) \end{aligned}$$

Da zum ersten Summanden ε addiert und vom zweiten Summanden der gleiche Wert subtrahiert wird, bleibt die Summe insgesamt gleich, d.h. $d(x, a) = d(x, b) = d(y, a) = d(y, b) \forall x, y \in B_2$. Alle Punkte des mittleren Bisektorabschnitts besitzen also den gleichen Abstand zu a und b .

Zu zeigen bleibt, dass die Punkte aus B_2 unter allen Punkten des Bisektors den kleinsten Abstand zu a, b besitzen. Dazu sei $x \in B_2$ und $y \notin B_2$; B_1 und B_3 ergeben sich gemäß den Definitionen aus Abschnitt 4.2.3.

Fall 1: $y \in B_1$

Da alle $x \in B_2$ den gleichen Abstand zu a, b besitzen, betrachte oBdA $x_2 = b_2$. Per Definition von B_2 gilt dann $x_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + b_1 - b_2)$. z entstehe durch Verschiebung nach oben aus x , d.h. $z_2 = x_2 + \varepsilon = b_2 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Da $z \in B_1$ gilt $z_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + b_1 - b_2) \Rightarrow x_1 = z_1$. Damit gilt:

$$d(x, b) = w_b (|x_1 - b_1| + |x_2 - b_2|) = w_b (|x_1 - b_1| + |b_2 - b_2|) = w_b |x_1 - b_1|$$

und

$$d(z, b) = w_b (|z_1 - b_1| + |z_2 - b_2|) = w_b (|x_1 - b_1| + |b_2 + \varepsilon - b_2|) = w_b |x_1 - b_1| + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ gilt $d(x, a) = d(x, b) < d(z, a) = d(z, b) \forall x \in B_2, y \in B_1$.

Fall 2: $y \in B_3$

Betrachte oBdA $x = a_2$. Per Definition von B_3 gilt dann $x_1 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + b_1 + b_2)$. z entstehe aus x durch eine Verschiebung nach unten, d.h. $z_2 = x_2 - \varepsilon = a_2 - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Da $z \in B_3$ gilt $z_1 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + b_1 + b_2) \Rightarrow x_1 = z_1$. Damit gilt:

$$d(x, a) = w_a (|x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|) = w_a (|x_1 - a_1| + |a_2 - a_2|) = w_a |x_1 - a_1|$$

und

$$d(z, a) = w_a (|z_1 - a_1| + |z_2 - a_2|) = w_a (|x_1 - a_1| + |a_2 - \varepsilon - a_2|) = w_a |x_1 - a_1| + |-\varepsilon|.$$

Da $\varepsilon > 0$ gilt $d(x, a) = d(x, b) < d(z, a) = d(z, b) \forall x \in B_2, y \in B_3$.

Insgesamt folgt somit die Behauptung $d(x, a) = d(x, b) < d(z, a) = d(z, b) \forall x \in B_2, y \in B_1 \cup B_3$.

Ist der gesamte Bisektor durch nur eine Gerade darstellbar, so besteht $B_2 = \{x\}$ aus nur einem Element $x = a + \frac{1}{2}\overline{ab}$.

Liegt einer der anderen fünf Bisekortypen aus Kapitel 4.2.3 vor, so verlaufen die Beweise analog zum beschriebenen Fall. Für die Fälle 3 und 6 ist dabei lediglich zu beachten, dass auf grund der flächigen Bisektorabschnitte für z sowohl eine Verschiebung um ε in horizontaler als auch um ν in vertikaler Richtung möglich ist. Der Abstand der $z \in B_1 \cup B_3$ zu a, b ist dann um $\varepsilon + \nu$ größer als die Distanz von $x \in B_2$ zu a, b .

q.e.d.

Damit folgt, dass der Centerpunkt \bar{x} aus Satz 4.5 immer auf dem mittleren Bisektorabschnitt B_2 der am weitesten voneinander entfernten Punkte a_p und a_q liegt, da der maximale Abstand $d(a_p, a_q)$ auf dem Abschnitt B_2 minimal ist. Alle Punkte $x \in B_2$ sind somit mögliche Kandidaten für Centerpunkte der Standortmenge $\{a_1, \dots, a_r\}$. Der optimale Zielfunktionswert zu \bar{x} beträgt also $\alpha_R = d(a_p, \bar{x}) = \frac{1}{2}d(a_p, a_q)$, da als Abstand zweier Punkte immer ihre kleinstmögliche Distanz (ohne Umwege) betrachtet wird.

Die Information über den optimalen Zielfunktionswert ist nun bereits ausreichend, um die r am dichtesten zusammenliegenden Standpunkte aus einer Menge von M Orten zu bestimmen.

Dafür wird für eine r -elementige Teilmenge $R \in \mathcal{R}$ die beiden am weitesten voneinander entfernten Punkte dieser Teilmenge bestimmt, das heißt zwei Punkte a_p, a_q für die gilt:

$$(a_p, a_q) \in \{(a_i, a_j) : d(a_p, a_q) = \max_{i, j \in R} \{d(a_i, a_j)\}\}.$$

Die Aufgabe, diese beiden Punkte zu bestimmen wird auch „Farthest-Pair-Problem“ genannt und ist ein Gebiet der algorithmischen Geometrie. Alternativ kann auch der größte Wert aus einer Distanzmatrix der existierenden Standorte abgelesen werden. Die Berechnung der Distanzmatrix fordert allerdings einen Aufwand von $\mathcal{O}(M^2)$, während Algorithmen wie der Pruning Algorithmus aus [Stolpe] eine bessere Komplexität von $\mathcal{O}(r \log(r))$ aufweisen. Da dieser Teil die Gesamtkomplexität des Verfahrens aber nicht erhöht, ist hier die Methode der Distanzmatrix ausreichend.

Nach Satz 4.5 und Lemma 4.2 gibt diese Distanz den optimalen Center-Zielfunktionswert α_R der betrachteten Standort-Teilmenge R an: $\alpha_R = \frac{1}{2}d(a_p, a_q)$, da der Centerpunkt auf dem mittleren Bisektorabschnitt der beiden weitest entfernten Punkte der Teilmenge liegt.

Bestimmt man diese Distanz nun für alle r -elementigen Standort-Teilmengen $R \in \mathcal{R}$ und wählt unter diesen alle diejenigen Mengen aus, die den kleinsten Wert $\alpha := \min_{R \in \mathcal{R}} \{\alpha_R\}$ realisieren, so sind diese Teilmengen gerade die am dichtesten zusammenliegenden, weil sie, wie per Definition verlangt, den minimalen Center-Zielfunktionswert besitzen.

Von diesen $r = M - k + 1$ am dichtesten zusammenliegenden Standorten werden anschließend die Centerpunkte bestimmt (siehe Kapitel 4.3.2), die dann den Optimallösungen des Problems SPk entsprechen (vgl. Korrektheitsbeweise zu Lemma 4.3 und Satz 4.6). Es ergibt sich der folgende Algorithmus zur Lösung eines SPk mit $k \geq 1$ durch Rückführung auf konvexe Centerprobleme mit $k = 1$.

Algorithmus 4.3 Rückführung auf den konvexen Fall

Input: Existierende Standorte $a_i \in A$, Gewichte w_i , $i = 1, \dots, M$, $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq M$, Distanzmatrix D der existierenden Standorte.

Output: Menge $M(f_k)$ der optimalen Standorte und minimaler Zielfunktionswert $z^* = k\text{-max}\{d(A, M(f_k))\}$.

if $k=M$ **then**

$M(f_k) = \{a_i : i = 1, \dots, M\}$ mit $z^* = M\text{-max}\{d(A, M(f_k))\} = 0$.

else

Ermittle die $M - k + 1$ am dichtesten zusammenliegenden Standorte:

for all $R \in \mathcal{R}$ **do**

Bestimme zwei ex. Standorte für die gilt:

$$(a_p, a_q) \in \{(a_i, a_j) : d(a_p, a_q) = \max_{i,j \in R} \{d(a_i, a_j)\}\}.$$

Setze $\alpha_R := d(a_p, a_q)$.

Setze $\alpha := \min_{R \in \mathcal{R}} \{\alpha_R\}$.

$\mathcal{R}^* := \{R : \alpha_R = \alpha\}$.

for all $R \in \mathcal{R}^*$ **do**

Setze $A_R := \{a_i : i \in R\}$.

Bestimme die Centerpunkte

$$\mathcal{X}_R = \{\bar{x} : \bar{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \{\max\{d(A_R, x)\}\}\} \text{ mit } z = \max\{d(A_R, \bar{x})\} = \frac{1}{2}\alpha.$$

$M(f_k) = \bigcup_{R \in \mathcal{R}^*} \mathcal{X}_R$ mit $z^* = z = \frac{1}{2}\alpha$ ist optimal.

Die Korrektheit der Berechnung der dichtesten Standorte in Algorithmus 4.3 beweist Lemma 4.3.

Lemma 4.3

Die r am dichtesten zusammenliegenden Standorte werden in Algorithmus 4.3 korrekt bestimmt, d.h. $\nexists \tilde{R} \in \mathcal{R}$, $\tilde{R} \notin \mathcal{R}^*$, so dass die Standorte $A_{\tilde{R}} = \{a_j : j \in \tilde{R}\}$ mindestens genauso dicht zusammen liegen wie die $A_R = \{a_i : i \in R, R \in \mathcal{R}^*\}$.

Beweis:

Annahme: Die Standorte $\{a_j : j \in \tilde{R}\}$ liegen mindestens genauso dicht zusammen wie die Standorte $\{a_i : i \in R, R \in \mathcal{R}^*\}$.

Da alle a_i mit $i \in R \ \forall R \in \mathcal{R}^*$ gleich dicht zusammen liegen, betrachte oBdA $R^* \in \mathcal{R}^*$.

Per Annahme folgt, dass die $\{a_j : j \in \tilde{R}\}$ einen Center-Zielfunktionswert zum Centerpunkt \bar{x} realisieren, der höchstens so groß ist wie der Center-Funktionswert von $\{a_i : i \in R^*\}$. Es sei nun also

$$\frac{1}{2}\beta = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \{\max_{j \in \tilde{R}} \{w_j l_1(x, a_j)\}\}$$

$$\frac{1}{2}\alpha = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \{\max_{i \in R^*} \{w_i l_1(x, a_i)\}\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Da \bar{x} nach Satz 4.5 auf dem Bisektor der beiden weitest entfernten Punkte a_p und a_q mit $p, q \in \tilde{R}$ liegt, gilt:

$$d(a_p, a_q) = \alpha_{\tilde{R}} = 2d(\bar{x}, a_p) = 2d(\bar{x}, a_q) = \beta.$$

Per Annahme gilt außerdem: $\frac{1}{2}\beta \leq \frac{1}{2}\alpha \Leftrightarrow \beta \leq \alpha$.

Fall 1: $\beta = \alpha$

Per Definition von \mathcal{R}^* gilt in diesem Fall $\tilde{R} \in \mathcal{R}^*$ \nmid

Fall 2: $\beta < \alpha$

$$\beta = \alpha_{\tilde{R}} < \alpha \quad \nmid$$

Widerspruch, da $\alpha = \min_{R \in \mathcal{R}} \alpha_R$ und $\tilde{R} \in \mathcal{R}$.

q.e.d.

Abschließend folgt der Korrektheitsbeweis, dass Algorithmus 4.3 alle Optimallösungen von SPk richtig bestimmt.

Satz 4.6

Algorithmus 4.3 bestimmt alle Optimallösungen $x^* \in M(f_k)$ von SPk mit k-max Zielfunktion korrekt.

Beweis:

Fall 1: $k = M$

Siehe Satz 4.4 und zugehörigen Beweis.

Fall 2: $k < M$

Algorithmus 4.3 bestimmt die Centerpunkte \bar{x} der $M - k + 1$ dichtesten Standorte und setzt diese als Optimallösungen von SPk.

Es sei $A = \{a_1, \dots, a_M\}$, $R^* \in \mathcal{R}^*$ und \bar{x} das Center der $A_{R^*} = \{a_j : j \in R^*\}$.

Zu zeigen:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \{1\text{-max}_{j \in R^*} \{w_j l_1(a_j, x)\}\} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \{k\text{-max}_{i \in \{1, \dots, M\}} \{w_i l_1(a_i, x)\}\}$$

und

$$1\text{-max}_{j \in R^*} \{w_j l_1(a_j, \bar{x})\} = k\text{-max}_{i \in \{1, \dots, M\}} \{w_i l_1(a_i, \bar{x})\}.$$

Es sei $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 l_1(a_1, \bar{x}) \\ \vdots \\ w_M l_1(a_M, \bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M$ der Vektor der gewichteten Distanzen von \bar{x} zu

den $a_i \in A$. Außerdem beinhalte $d_{\geq} = \begin{pmatrix} d_{(1)} \\ \vdots \\ d_{(M)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M$ die Komponenten von d in sortierter

Reihenfolge $d_{(1)} \geq \dots \geq d_{(M)}$. $a_{(i)}$ sei entsprechend der Standort, der $d_{(i)}$ realisiert.

Betrachte nun den Distanzvektor d bzgl. des Centerpunktes \bar{x} . Für alle $r \in \{1, \dots, M\} \setminus R^*$ gilt:

$$d_r \geq \max_{s \in R^*} \{d_s\}, (*)$$

da \bar{x} der Centerpunkt der A_{R^*} ist mit Zielfunktionswert $z = \max_{s \in R^*} \{d_s\}$ und R^* optimal.

Alle Standorte $a_l \notin A_{R^*}$ liegen also genauso weit von \bar{x} entfernt wie $a_m = \arg \max_{a_s \in A_{R^*}} \{d_s\}$ (wenn $l \in \bar{R}$, $\bar{R} \in \mathcal{R}^*$), bzw. weiter von \bar{x} entfernt als a_m (wenn $l \in \{1, \dots, M\} \setminus R \quad \forall R \in \mathcal{R}^*$), da \bar{x} nach Satz 4.5 auf dem Bisektor der beiden am weitesten voneinander entfernten Standorte $a_p, a_q \in A_{R^*}$ liegt.

Gäbe es ein $a_l \notin R^*$ mit $a_l \notin R, \forall R \in \mathcal{R}^*$ und $d_l < \max_{s \in R^*} \{d_s\}$, so folgt sofort ein Widerspruch zu $R^* \in \mathcal{R}^*$, da die beiden weitest entfernten Punkte in $A_{(R^* \setminus a_m) \cup a_l}$ dichter zusammen lägen als in A_{R^*} und sie somit einen kleineren Center-Zielfunktionswert besäßen.

Es seien nun die Komponenten d_r von d , $r \in \{1, \dots, M\} \setminus R^*$ in $d_{\geq}^r \in \mathbb{R}^{k-1}$ der Größe nach absteigend sortiert zusammengefasst und entsprechend die Komponenten d_s von d mit $s \in R^*$ in $d_{\geq}^s \in \mathbb{R}^{M-k+1}$.

Wegen (*) und $|\{1, \dots, M\} \setminus R^*| = k-1$ ist $d_{(k-1)}^r \geq d_{(1)}^s$, d.h. d_{\geq}^r enthält die $k-1$ größten Komponenten von d_{\geq}^r und d_{\geq}^s die $M-k+1$ kleinsten Komponenten des sortierten Distanzvektors. Es gilt also:

$$d_{\geq} = \begin{pmatrix} d_{\geq}^r \\ d_{\geq}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{(1)} \\ \vdots \\ d_{(k-1)} \\ d_{(k)} \\ \vdots \\ d_{(M)} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 1\text{-max}\{d_{\geq}^s\} = \max_{s \in R^*} \{d_s\} = d_{(1)}^s = d_{(k)} = k\text{-max}\{d_{\geq}\}$ und somit stimmen die Zielfunktionswerte der beiden Aufgaben überein.

Auch die Optimalität von \bar{x} folgt offensichtlich hieraus, da die Minimierung der größten der $M-k+1$ kleinsten Distanzen genau der Minimierung des k -größten von allen M sortierten Einträgen entspricht. Da $\bar{x} \in \text{Bisec}(a_{(k)}, a_{(k+1)})$ folgt die Optimalität von \bar{x} für SPk formal wie im Beweis zu Satz 4.3.

q.e.d.

Der Vorteil dieses zweiten Verfahrens ist, dass für die Berechnung der Optimallösungen nicht zuerst die Bisektoren und Fundamentalrichtungen bestimmt werden müssen. Vor allem die Berechnung der Bisektoren sowie der Schnittpunkte aller Bisektoren und Fundamentalrichtungen stellt im Allgemeinen einen großen Aufwand dar.

Ein Nachteil gegenüber dem geometrischen Verfahren ist allerdings, dass die Lösungen für beliebiges k nicht so schnell aus den erhaltenen Zwischenergebnissen bestimmt werden können, sobald der Algorithmus einmal für ein festes k durchgelaufen ist. Bei der Rückführung auf den konvexen Fall muss für jedes k eine neue dichteste Punktmenge und somit auch ein neuer Centerpunkt bestimmt werden.

4.3.2 Ein Lösungsverfahren für Centerprobleme

Algorithmus 4.3 benötigt ein Verfahren zur Lösung von Centerproblemen mit l_1 -Abständen, ein solches soll in diesem Abschnitt kurz vorgestellt werden. Die Beschreibung folgt dabei [Hamacher].

Ein Standortproblem zur l_1 -Norm kann genau dann gelöst werden, wenn das entsprechende Standortproblem zur l_∞ -Norm gelöst werden kann, indem gewisse Transformationen (wie in Kapitel 4.4 beschrieben) verwendet werden. Da Centerprobleme mit Tschebychev-Norm sehr einfach und effizient zu lösen sind, wird ein Verfahren für diesen Problemtyp vorgestellt. Durch oben genannte Transformation der SPk mit Manhattan-Norm, können auch diese mit dem präsentierten Verfahren bearbeitet werden.

Das Centerproblem mit l_∞ -Distanzen lässt sich wie folgt definieren:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \left\{ \max_{i=1, \dots, M} \left\{ \max\{w_i |x_1 - a_{i1}|, w_i |x_2 - a_{i2}|\} \right\} \right\}.$$

Es sei $z := \max\{w_i |x_1 - a_{i1}|, w_i |x_2 - a_{i2}|\}$. Dann erfüllt z die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} z &\geq w_i |x_1 - a_{i1}|, \quad \forall i = 1, \dots, M \\ z &\geq w_i |x_2 - a_{i2}|, \quad \forall i = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

da z als das Maximum dieser beiden Ausdrücke definiert wurde. Bei festem x ist z minimal mit dieser Eigenschaft, da z gerade gleich dem Maximum dieser Ausdrücke ist und somit der kleinste Wert, der alle Bedingungen erfüllt.

Werden z und x nun als Variablen eines linearen Optimierungsproblems aufgefasst, bei dem z minimiert werden soll, so entsteht nach Auflösung der Beträge das folgende LP:

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & w_i(x_1 - a_{i1}) \leq z, \quad \forall i = 1, \dots, M \\ & w_i(x_1 - a_{i1}) \geq -z, \quad \forall i = 1, \dots, M \\ & w_i(x_2 - a_{i2}) \leq z, \quad \forall i = 1, \dots, M \\ & w_i(x_2 - a_{i2}) \geq -z, \quad \forall i = 1, \dots, M \end{aligned}$$

Eine Minimierung von z entspricht dadurch automatisch der Minimierung von $\max\{w_i |x_1 - a_{i1}|, w_i |x_2 - a_{i2}|\}$ und löst das SPk. Unter der realistischen Annahme, dass $w_i > 0 \forall i = 1, \dots, M$ (andernfalls hätte der zugehörige existierende Standort keinen Einfluss auf die Optimallösung) lässt sich das LP umformen zu:

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq a_{i1} + \frac{1}{w_i} z, \quad \forall i = 1, \dots, M \\ & x_1 \geq a_{i1} - \frac{1}{w_i} z, \quad \forall i = 1, \dots, M \\ & x_2 \leq a_{i2} + \frac{1}{w_i} z, \quad \forall i = 1, \dots, M \\ & x_2 \geq a_{i2} - \frac{1}{w_i} z, \quad \forall i = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{i1}^+(z) &:= a_{i1} + \frac{1}{w_i}z & A_1^+(z) &:= \min_{i=1,\dots,M} A_{i1}^+(z) \\
 A_{i1}^-(z) &:= a_{i1} - \frac{1}{w_i}z & A_1^-(z) &:= \max_{i=1,\dots,M} A_{i1}^-(z) \\
 A_{i2}^+(z) &:= a_{i2} + \frac{1}{w_i}z & A_2^+(z) &:= \min_{i=1,\dots,M} A_{i2}^+(z) \\
 A_{i2}^-(z) &:= a_{i2} - \frac{1}{w_i}z & A_2^-(z) &:= \max_{i=1,\dots,M} A_{i2}^-(z),
 \end{aligned}$$

mit diesen Definitionen kann das LP geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z \\
 \text{s.t.} \quad & A_1^-(z) \leq x_1 \leq A_1^+(z) \\
 & A_2^-(z) \leq x_2 \leq A_2^+(z).
 \end{aligned}$$

Das LP könnte nun bereits mit dem Simplexalgorithmus gelöst werden. Allerdings gibt es über die geometrische Anschauung ein weit effizienteres Lösungsverfahren.

Aus den Definitionen von $A_k^+(z)$ und $A_k^-(z)$, $k = 1, 2$ folgt, dass sie stetige, stückweise lineare Funktionen sind. Außerdem ist $A_k^+(z)$ eine streng wachsende Funktion in z , während $A_k^-(z)$ streng fallend ist.

Zusätzlich gilt, dass $A_k^+(0) \leq A_k^-(0)$ für $k = 1, 2$ ist, da $A_k^+(0) = \min_{i=1,\dots,M} A_{ik}^+(0) = \min_{i=1,\dots,M} a_{ik}$, $k = 1, 2$. Für A_k^- ergibt sich analog $A_k^-(0) = \max_{i=1,\dots,M} a_{ik}$.

Werden die beschriebenen Funktionen mit den erhaltenen Eigenschaften aufgezeichnet, so ergibt sich die in Abbildung 4.13 dargestellte Situation.

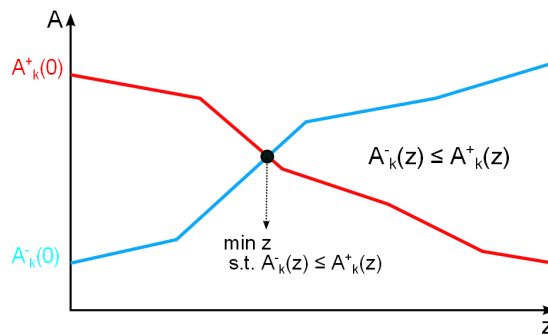


Abb. 4.13: Verlauf von $A_k^+(z)$ und $A_k^-(z)$

Die $A_k^\pm(z)$ entsprechen per Definition immer einer der linearen Funktionen $A_{ik}^\pm \forall z$. In der Abbildung lässt sich gut erkennen, dass die A_k^+ und A_k^- genau einen Schnittpunkt besitzen. Durch den streng wachsenden bzw. streng fallenden Verlauf der beiden Funktionen befindet sich der zulässige Bereich des LP rechts von ihrem Schnittpunkt, da dort $A_k^-(z) \leq A_k^+(z)$ gilt. Der Schnittpunkt ist also der am weitesten links liegende Punkt des zulässigen Bereichs und liefert

den minimalen Wert für z , für den beide Bedingungen noch erfüllt sind. Unter diesen Schnittpunkten ist daher die Optimallösung des LP zu finden. Zunächst müssen nun alle möglichen $\mathcal{O}(M^2)$ Schnittpunkte der A_{ik}^+ mit $A_{lk}^- \forall i, l = 1, \dots, M, k = 1, 2$ bestimmt werden. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} A_{ik}^-(z) &= A_{lk}^+(z) \\ \Leftrightarrow z &= \frac{w_i w_l}{w_i + w_l} (a_{ik} - a_{lk}) := z_{il}^k. \end{aligned}$$

Die z_{il}^k entsprechen nun allen Schnittpunkten der stückweise linearen Funktionen. Daraus lässt sich die Optimallösung des LP und damit die des Centerproblems mit l_∞ -Distanzen wie im Satz angegeben berechnen.

Satz 4.7

$z^* = \max\{|z_{il}^k| : i, l \in \{1, \dots, M\}, i < l, k = 1, 2\}$ ist der optimale Zielfunktionswert des Centerproblems mit l_∞ -Distanzen und $M(f_1) = [A_1^-(z^*), A_1^+(z^*)] \times [A_2^-(z^*), A_2^+(z^*)]$ ist die Menge der optimalen Lösungen.

Beweis:

Siehe [Hamacher], Seite 123.

Aus der Definition der z_{il}^k geht hervor, dass $z_{il}^k = -z_{li}^k$. Da nur nicht-negative Werte von Interesse sind, werden die Betragsstriche gesetzt. Aus dem letzten Satz folgt die Korrektheit des Algorithmus 4.4.

Algorithmus 4.4 Lösung von Centerproblemen mit l_∞ -Norm

Input: Existierende Standorte $a_i \in A$, Gewichte $w_i \geq 0, i = 1, \dots, M$.

Output: Menge $M(f_1, l_\infty)$ der optimalen Standorte und minimaler Zielfunktionswert z^* .

Bestimme $z^* = \max\{|z_{il}^k| : i, l \in \{1, \dots, M\}, i < l, k = 1, 2\}$, wobei

$$z_{il}^k = \frac{w_i w_l}{w_i + w_l} (a_{ik} - a_{lk}).$$

Setze $M(f_1, l_\infty) = [A_1^-(z^*), A_1^+(z^*)] \times [A_2^-(z^*), A_2^+(z^*)]$, $k = 1, 2$ mit

$$\begin{aligned} A_1^+(z) &:= \min_{i=1, \dots, M} A_{i1}^+(z) & A_2^+(z) &:= \min_{i=1, \dots, M} A_{i2}^+(z) \\ A_1^-(z) &:= \max_{i=1, \dots, M} A_{i1}^-(z) & A_2^-(z) &:= \max_{i=1, \dots, M} A_{i2}^-(z). \end{aligned}$$

Alternativ zu dem direkten Verfahren für Centerprobleme kann der Baustein aus Algorithmus 4.3 auch durch die allgemeineren Verfahren für geordnete Medianprobleme mit entsprechendem $\lambda = (0, \dots, 0, 1)$ gelöst werden. Dafür gilt $\lambda \in S_M^{\leq}$ und somit können die bekannten Verfahren für konvexe GMP angewandt werden.

Da diese aber einen wesentlich höheren Aufwand besitzen, ist Verfahren 4.4 hier vorzuziehen.

Beispiel 4.3 Gegeben seien die Standorte $A = \{a_1 = (-22, 22)^T, a_2 = (13, 13), a_3 = (14, 44)\}$ versehen mit $w_i = 1 \forall i = 1, 2, 3$ und der l_∞ -Norm (vgl. Abb. 4.18). Als Zielfunktionswerte der Schnittpunkte ergeben sich

$$z_{12}^1 = -17,5 \quad z_{13}^1 = -18 \quad z_{23}^1 = -0,5 \quad z_{12}^2 = 4,5 \quad z_{13}^2 = -11 \quad z_{23}^2 = -15,5$$

$$\Rightarrow z^* = \max\{17,5, 18, 0,5, 4,5, 11, 15,5\} = 18 \text{ ist optimaler Zielfunktionswert.}$$

Für die Menge der Optimallösungen gilt:

$$A_1^+(z^*) = \min_{i=1,2,3} \{a_{i1} + z^*\} = \min\{-4, 31, 32\} = -4$$

$$A_1^-(z^*) = \max_{i=1,2,3} \{a_{i1} - z^*\} = \max\{-40, -5, -4\} = -4$$

$$A_2^+(z^*) = \min_{i=1,2,3} \{a_{i2} + z^*\} = \min\{40, 31, 62\} = 31$$

$$A_2^-(z^*) = \max_{i=1,2,3} \{a_{i2} - z^*\} = \max\{4, -5, 26\} = 26$$

$$\Rightarrow M(f_1) = [-4, -4] \times [26, 31] = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 31 \end{pmatrix}\right\}.$$

4.3.3 Komplexitätsanalyse und Beispiele

In diesem Abschnitt soll der Aufwand des Verfahrens der Rückführung auf Centerprobleme zur Lösung von Standortproblemen mit k-max Funktionen genauer betrachtet werden. Anschließend folgen zwei Beispiele, mit drei bzw. vier existierenden Standorten, die den Verlauf des hergeleiteten Algorithmus 4.3 verdeutlichen sollen.

Zur Untersuchung der Komplexität von Algorithmus 4.3 werden die einzelnen Schritte nacheinander betrachtet.

Als Input wird bereits eine Distanzmatrix verlangt, deren Berechnung einen Aufwand von $\mathcal{O}(M^2)$ besitzt, da $D \in \mathbb{R}^{M \times M}$.

Der Fall $k = M$ lässt sich in konstanter Zeit $\mathcal{O}(1)$ beenden, da die existierenden Standorte in diesem Fall optimal sind und lediglich zwei Zuweisungen für \mathcal{X}^* und z^* anfallen.

Ist dagegen $k \neq M$, so werden die $M - k + 1$ am dichtesten zusammenliegenden Standorte untersucht. Die Menge \mathcal{R} ist die Menge der $(M - k + 1)$ -elementigen Teilmengen der M existierenden Standorte und somit gilt $|\mathcal{R}| = \binom{M}{M-k+1}$. Für jede dieser $\binom{M}{M-k+1}$ Teilmengen werden folgende Schritte ausgeführt:

- Bestimmung der beiden am weitesten voneinander entfernten Punkten der aktuellen Teilmenge. Dies entspricht der Suche nach dem größten Eintrag der Distanzmatrix D , welche durch

Input: Distanzmatrix D , Indexmenge R .

Output: Maximaler Eintrag $d_{max} \in D_R$.

Setze $d_{max} := 0$.

for all $i = 1 : M$ **do**

for all $j = i + 1 : M$ **do**

if $d_{ij} > d_{max} \wedge i, j \in R$ **then**

$d_{max} := d_{ij}$

in $\mathcal{O}(M^2)$ Schritten erledigt werden kann.

- Der Wert von α als das Minimum über alle α_R wird als minimaler Eintrag des Vektors α_R in $\mathcal{O}(M)$ berechnet.

Das Setzen von α_R und \mathcal{R}^* benötigt lediglich $\mathcal{O}(1)$.

Somit ergibt sich für diese Schleife über alle $R \in \mathcal{R}$ ein Aufwand von $\mathcal{O}\left(\binom{M}{M-k+1}M^2\right)$.

Für die dichtesten Standorte mit Indexmenge $R \in \mathcal{R}^*$ wird jeweils ein Centerproblem gelöst. Im Worst Case ist $|\mathcal{R}^*| = \binom{M}{M-k+1}$, somit sind eben soviele Standortprobleme mit Centerziel­funktion zu lösen. Algorithmus 4.4 besitzt eine Komplexität von $\mathcal{O}(M^2)$, da sowohl die Berechnung aller z_{il}^k für $i, l \in \{1, \dots, M\}$ als auch die Bestimmung des Maximums dieser Werte aus der zugehörigen Matrix in quadratischer Zeit $\mathcal{O}(M^2)$ umsetzbar sind. Das Aufstellen der Optimallösung $M(f_1, l_\infty)$ erhöht den Gesamtaufwand des Verfahrens nicht, da dies in linearer Zeit geschieht. Also ergibt sich auch für die zweite Schleife in Algorithmus 4.3 ein Aufwand von $\mathcal{O}\left(\binom{M}{M-k+1}M^2\right)$.

Die abschließenden Zuweisungen sind mit konstanter Zeit anzusetzen. Insgesamt ergibt sich somit ein Gesamtaufwand von $\mathcal{O}\left(\binom{M}{M-k+1}M^2\right)$.

Durch Verwendung des zu Anfang des Abschnittes erwähnten Pruning-Algorithmus kann die Lösung des Farthest-Pair-Problems auch mit einem Aufwand von $\mathcal{O}\left((M-k+1)\log(M-k+1)\right)$ behandelt werden. Da der Aufwand aber durch die Berechnung der Centerpunkte für alle dichtesten Punktemengen dominiert wird, hat die kleine Ersparnis durch Nutzung des Pruning-Algorithmus keinen bedeutenden Einfluss auf die Komplexität im \mathcal{O} -Sinn.

Schwachpunkt des Verfahrens 4.3 ist also die Betrachtung von allen $(M-k+1)$ -elementigen Teilmengen, die die ganze Rechnung sehr aufwändig macht. Allerdings ist das Verfahren in der Praxis besser als die Analyse dies andeutet, da der Worst Case von $|\mathcal{R}^*| = \binom{M}{M-k+1}$ nur in den seltensten Fällen angenommen wird. Oft ist die Menge der dichtesten Punktemengen wesentlich kleiner, wodurch auch weniger Centerprobleme gelöst werden müssen (siehe Beispiele 4.4 und 4.5).

Die Effizienz des Verfahrens hängt außerdem stark von der Anzahl M der existierenden Standorte und dem gewählten k ab. Insgesamt sollte das Verfahren eher für eine geringe Anzahl M an Standorten verwendet werden. Für k im Bereich von $\frac{M}{2}$ ist die Laufzeit am höchsten, für sehr kleine Werte $k \approx 1$ sowie Werte in der Größenordnung der Anzahl der existierenden Standorte, $k \approx M$, kann die Rückführung auf Centerprobleme aber mit einem akzeptablen Aufwand gute Ergebnisse liefern.

Welches der beiden vorgestellten Verfahren, die geometrische Methode oder die Rückführung auf Centerprobleme, zur Lösung eines gegebenen Problems herangezogen werden sollte, hängt stark von der Wahl der Größen M und k und deren Verhältnis zueinander ab. Das geometrische

Verfahren ist für kleine Probleme, d.h. bei wenigen existierenden Standorten, nicht so geeignet wie die Rückführung auf Centerprobleme, da der Aufwand hierfür durch den Faktor M^5 deutlich größer ist.

Der Binomialkoeffizient $\binom{M}{M-k+1}$ ist am größten für $k \approx \frac{M}{2}$, je kleiner k wird, desto weiter nehmen die Werte ab. Für größer werdende $k > \frac{M}{2}$ nimmt der Binomialkoeffizient aufgrund seiner Symmetrieeigenschaft $\binom{M}{M-k+1} = \binom{M}{M-(M-k+1)}$ ebenfalls ab. Bis zu einer Größe von $M = 14$ Standorten ist die Rückführungsmethode für alle k , auch für den ungünstigsten Fall von $k = \frac{M}{2}$, das effizientere Verfahren. Für $M > 14$ übersteigt der Aufwand der Rückführung den des geometrischen Verfahrens für bestimmte k . Nur für $k \approx 1$ und $k \approx M$ ist auch bei großen M die Rückführung auf Centerprobleme die effektivere Methode.

An exemplarischen Werten ergeben sich die folgenden Erkenntnisse: Der Bereich, in dem k um 1 bzw. M variieren darf, wird mit steigendem M immer kleiner. So ist bei $M = 15$ die Rückführung auf Centerprobleme für $k \leq 6$ und $k \geq 11$ besser, für das Intervall $\frac{1}{3}M \lesssim k \lesssim \frac{2}{3}M$ dagegen das geometrische Verfahren. Bei deutlich größerem $M = 1000$ gilt die gleiche Aussage nur noch für $k \leq 3$ und $k \geq 996$, dies entspricht einem Verhältnis von $k \approx \frac{1}{333}M$.

Das hergeleitete Verfahren der Rückführung auf Centerprobleme wird nun an zwei ausführlichen Beispielen vorgestellt.

Beispiel 4.4 Drei existierende Standorte

Es sei wieder $A = \{a_1 = (0, 22), a_2 = (13, 0), a_3 = (29, 15)\}$ versehen mit $w_i = 1 \forall i = 1, 2, 3$ und der l_1 -Norm (siehe Abbildung 4.14). Die Distanzmatrix der existierenden Standorte lautet

also $D = \begin{pmatrix} 0 & 35 & 36 \\ 35 & 0 & 31 \\ 36 & 31 & 0 \end{pmatrix}$. Optimallösungen für alle k , also für $k = 1, 2, 3$ sind zu berechnen.

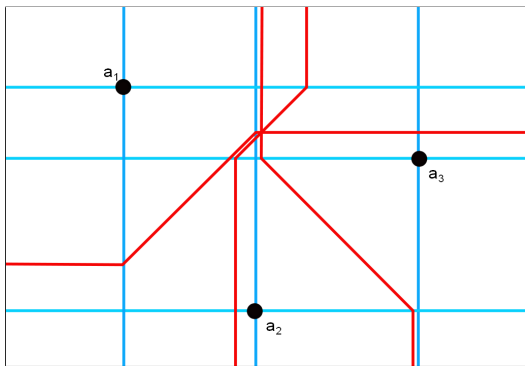


Abb. 4.14: Bisektoren (rot) und Fundamentalarichtungen (blau) der drei Orte

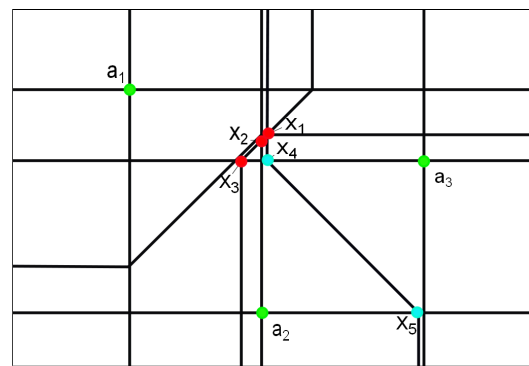


Abb. 4.15: Optimale Eckpunkte für $k = 1$ (rot), $k = 2$ (blau), $k = 3$ (grün)

Fall 1: $k = 1$

Zu bestimmen sind die $M - k + 1 = 3$ am dichtesten zusammenliegenden Standorte. Da $M = 3$ gibt es hierfür nur eine Möglichkeit, so dass $\mathcal{R} = \{\{1, 2, 3\}\}$. Das Punktepaar mit der größten Distanz lässt sich aus der Distanzmatrix ablesen. Es ergibt sich $a_p = a_1$ und $a_q = a_3$ mit $d_{13} = \alpha_{\{1,2,3\}} = 36$.

$$\Rightarrow \alpha = \alpha_{\{1,2,3\}} = 36 \Rightarrow \mathcal{R}^* = \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Als Centerpunkte von $A_R = \{a_1, a_2, a_3\}$ ergibt sich mit Algorithmus 4.4:

$$M(f_1, l_\infty) = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 31 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \mathcal{X}_R = \text{conv}\left\{T\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 26 \end{pmatrix}\right), T\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 31 \end{pmatrix}\right)\right\} = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13, 5 \\ 17, 5 \end{pmatrix}\right\}$$

mit $z = \frac{1}{2}\alpha = 18$.

$\Rightarrow M(f_1) = \overline{x_1 x_3} = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13, 5 \\ 17, 5 \end{pmatrix}\right\}$ ist Optimallösung des SPK mit $z^* = z = 18$. Die Eckpunkte sind rot in Abbildung 4.15 markiert.

Fall 2: $k = 2$

Zu bestimmen sind die $M - k + 1 = 2$ dichtesten Standorte. Es gilt: $\mathcal{R} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Da alle Mengen in \mathcal{R} zweielementig sind, ist die Berechnung der beiden weitest entfernten Punkte hinfällig.

$$R_1 = \{1, 2\} : \alpha_{\{1,2\}} = 35, \quad R_2 = \{1, 3\} : \alpha_{\{1,3\}} = 36, \quad R_3 = \{2, 3\} : \alpha_{\{2,3\}} = 31$$

$$\Rightarrow \alpha = \min\{35, 36, 31\} = 31 \Rightarrow \mathcal{R}^* = \{\{2, 3\}\}.$$

Centerpunkte zu $A_{R_3} = \{a_2, a_3\}$ ergeben sich mit Algorithmus 4.4 zu

$$\mathcal{X}_{R_3} = \overline{x_4 x_5} = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 13, 5 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 28, 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

mit $z = \frac{1}{2}\alpha = 15, 5$.

$\Rightarrow M(f_2) = \overline{x_4 x_5} = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 13, 5 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 28, 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ist Optimallösung des SPK mit $z^* = z = 15, 5$.

Die Eckpunkte sind blau in Abbildung 4.15 dargestellt.

Fall 3: $k = 3$

Da nun $k = M$ gilt, ist die Optimallösung von SPK sofort bekannt. Die optimalen Standorte

sind $M(f_3) = \{a_1, a_2, a_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 29 \\ 15 \end{pmatrix}\right\}$ mit Zielfunktionswert $z^* = 0$.

Die Ergebnisse decken sich also mit denen aus Beispiel 4.2 zum geometrischen Verfahren.

Beispiel 4.5 Vier existierende Standorte

Sei $A = \{a_1 = (8, 30), a_2 = (17, 16), a_3 = (33, 27), a_4 = (42, 7)\}$ versehen mit $w_i = 1 \forall i = 1, 2, 3, 4$ und der l_1 -Norm (siehe Abbildung 4.16). Die Distanzmatrix der existierenden

Standorte ergibt sich zu $D = \begin{pmatrix} 0 & 23 & 28 & 57 \\ 23 & 0 & 27 & 34 \\ 28 & 27 & 0 & 29 \\ 57 & 34 & 29 & 0 \end{pmatrix}$. Die Optimallösungen für alle $k = 1, \dots, 4$

werden gesucht.

Fall 1: $k = 1$

Zu bestimmen sind die $M - k + 1 = 4$ am dichtesten zusammenliegenden Standorte. Da $M = 4$ gibt es hierfür nur eine Möglichkeit, so dass $\mathcal{R} = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$. Das Punktepaar mit der größten Distanz lässt sich aus der Distanzmatrix ablesen. Es ergibt sich $a_p = a_1$ und $a_q = a_4$ mit $d_{14} = \alpha_{\{1,2,3,4\}} = 57$.

$\Rightarrow \alpha = \alpha_{\{1,2,3,4\}} = 57 \Rightarrow \mathcal{R}^* = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$.

Für $A_R = \{a_1, a_2, a_2, a_4\}$ ergeben sich mit Algorithmus 4.4 $x_3, x_7, x_8, x_{10}, x_{11}$ als optimale Eckpunkte, die Centerpunkte sind somit :

$$\mathcal{X}_R = \overline{x_3 x_{11}} = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 34 \\ 27, 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 12, 5 \end{pmatrix}\right\}$$

mit $z = \frac{1}{2}\alpha = 28, 5$.

$\Rightarrow M(f_1) = \overline{x_3 x_{11}} = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 34 \\ 27, 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 12, 5 \end{pmatrix}\right\}$ ist Optimallösung des SPK mit $z^* = z = 28, 5$.

Die Eckpunkte sind rot in Abbildung 4.17 markiert.

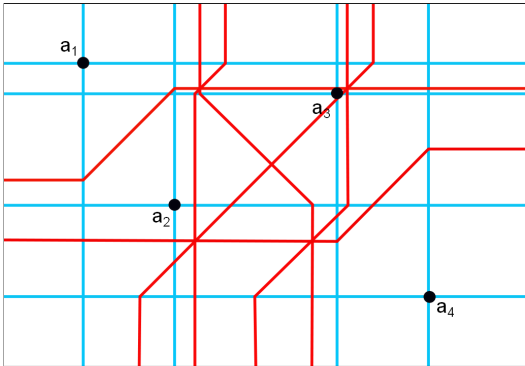


Abb. 4.16: Bisektoren (rot) und Fundamentalarrichtungen (blau) der vier Standorte

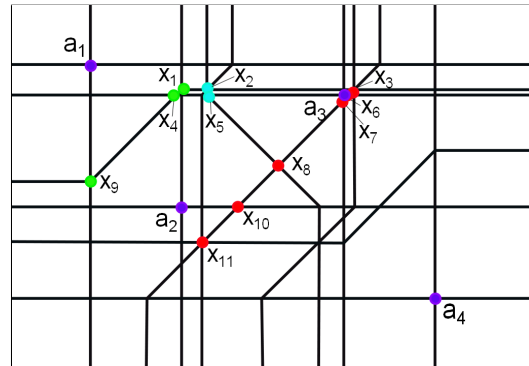


Abb. 4.17: Optimale Eckpunkte für $k = 1$ (rot), $k = 2$ (blau), $k = 3$ (grün), $k = 4$ (lila)

Fall 2: $k = 2$

Zu bestimmen sind die $M - k + 1 = 3$ dichtesten Standorte.

Es gilt: $\mathcal{R} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.

$$R_1 = \{1, 2, 3\} : \alpha_{\{1,2,3\}} = 28 \text{ für } a_p = a_1, a_q = a_3$$

$$R_2 = \{1, 2, 4\} : \alpha_{\{1,2,4\}} = 57 \text{ für } a_p = a_1, a_q = a_4$$

$$R_3 = \{1, 3, 4\} : \alpha_{\{1,3,4\}} = 57 \text{ für } a_p = a_1, a_q = a_4$$

$$R_4 = \{2, 3, 4\} : \alpha_{\{2,3,4\}} = 34 \text{ für } a_p = a_2, a_q = a_4$$

$$\Rightarrow \alpha = \min\{28, 57, 34\} = 28 \Rightarrow \mathcal{R}^* = \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Centerpunkte zu $A_{R_1} = \{a_1, a_2, a_3\}$ ergeben sich mit Algorithmus 4.4 zu

$$\mathcal{X}_{R_1} = \overline{x_2x_5} = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 19 \\ 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19, 5 \\ 27, 5 \end{pmatrix}\right\}$$

mit $z = \frac{1}{2}\alpha = 14$.

$\Rightarrow M(f_2) = \overline{x_2x_5} = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 19 \\ 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19, 5 \\ 27, 5 \end{pmatrix}\right\}$ ist Optimallösung des SPK mit $z^* = z = 14$. Die Eckpunkte sind blau in Abbildung 4.17 dargestellt.

Fall 3: $k = 3$

Zu bestimmen sind die $M - k + 1 = 2$ dichtesten Standorte.

Es gilt: $\mathcal{R} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. Da alle Mengen in \mathcal{R} zweielementig sind, kann der Wert für α als minimaler Eintrag aus D abgelesen werden.

$$\Rightarrow \alpha = \min_{i,j=1,\dots,4} \{d_{ij}\} = 23 \text{ für } a_1, a_2 \Rightarrow \mathcal{R}^* = \{\{1, 2\}\}.$$

Centerpunkte zu $A_{R_1} = \{a_1, a_2\}$ ergeben sich mit Algorithmus 4.4 zu

$$\mathcal{X}_{R_1} = \overline{x_1x_9} = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 8 \\ 18, 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 27, 5 \end{pmatrix}\right\}$$

mit $z = \frac{1}{2}\alpha = 11,5$.

$\Rightarrow M(f_3) = \overline{x_1x_9} = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 8 \\ 18, 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 27, 5 \end{pmatrix}\right\}$ ist Optimallösung des SPK mit $z^* = z = 11,5$.

Die Eckpunkte sind grün in Abbildung 4.17 dargestellt.

Fall 4: $k = 4$

Da nun $k = M$ gilt, ist die Optimallösung von SPK sofort bekannt. Die optimalen Standorte

sind $M(f_4) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \left\{\begin{pmatrix} 8 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 42 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}$ mit Zielfunktionswert $z^* = 0$.

4.4 Transformation von Standortproblemen mit l_∞ -Norm

Bisher wurden Lösungsverfahren für Standortprobleme mit Manhattanmetrik betrachtet. Aber auch Probleme mit einer anderen polyedrischen Norm lassen sich leicht mit den entwickelten Algorithmen lösen; es handelt sich dabei um Standortprobleme mit k-max Zielfunktion und zugrundeliegender Maximumsnorm. Diese Aufgabenstellung lässt sich formulieren als

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f_k(d(A, x)) = \text{k-max}_{i=1,\dots,M} \{w_i l_\infty(x - a_i)\} = \text{k-max}_{i=1,\dots,M} \{\max\{w_i |x_1 - a_{i1}|, w_i |x_2 - a_{i2}|\}\}.$$

Hier wird in der Zielfunktion also nicht die Summe von horizontalem und vertikalem Abstand betrachtet, sondern das Maximum dieser beiden Längen. Das in diesem Abschnitt vorgestellte Lösungsverfahren ist an eine Vorlage aus [Hamacher] angelehnt.

Grundlage für die Lösung des obigen Problemtyps ist die Transformation der l_∞ -Distanzen in äquivalente Abstände bzgl. der l_1 -Norm.

Lemma 4.4

Es sei $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2$ und $T(x) := \frac{1}{2}(x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$, das heißt $T(x) = Tx$ mit $T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt für alle $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ und $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$l_\infty(a, b) = l_1(T(a), T(b)).$$

Beweis:

Siehe [Hamacher], Seite 21.

Werden auf diese Weise die existierenden Standorte des Optimierungsproblems umgerechnet, so entspricht dies anschaulich einer Schrumpfung und Drehung der zugehörigen Einheitskreise zur l_∞ -Norm um 45° , so dass diese den Einheitskreisen der Manhattannorm entsprechen. Auch die gesamte Zerlegung der Ebene durch Bisektoren und Fundamentalrichtungen wird durch Drehung und Verkleinerung auf ein Standortproblem mit l_1 -Abständen transformiert (siehe Beispiel 4.4).

Durch diese einfache lineare Transformation lassen sich die Distanzen also ineinander umrechnen. Die Konsequenz daraus ist, dass die transformierte Optimallösung des Problems mit l_∞ -Abständen optimal ist für die Aufgabenstellung zur l_1 -Norm. Beide Optimallösungen besitzen außerdem den gleichen Zielfunktionswert.

Korollar 4.1

x^* ist Optimallösung von SPk mit l_∞ -Norm mit den existierenden Standorten a_1, \dots, a_M genau dann, wenn $T(x^*)$ Optimallösung von SPk mit l_1 -Norm mit den existierenden Standorten $T(a_1), \dots, T(a_M)$ ist.

Die Lösung des l_∞ -Problems lässt sich also über die angegebene Transformation der Eingangsdaten auf ein in den vorherigen Abschnitten betrachtetes Standortproblem mit l_1 -Distanzen zurückführen. Die dafür erhaltene Optimallösung muss mit der inversen Transformation nur noch auf l_∞ -Abstände zurückgerechnet werden, um die gesuchten optimalen Standorte zu erhalten. Es ergibt sich das in Algorithmus 4.4. beschriebene Verfahren.

Algorithmus 4.5 Lösung von SPk mit l_∞ -Norm mittels Transformation

Input: Existierende Standorte $a_i \in A$, Gewichte $w_i, i = 1, \dots, M, k \in \{1, \dots, M\}$

Output: Menge $M(f_k)$ der opt. Standorte und opt. Zielfunktionswert z^* von SPk mit l_∞ -Norm.

for $i = 1$ to M **do**

Transformiere a_i mittels $T(a_i) := \frac{1}{2}(a_{i1} + a_{i2}, -a_{i1} + a_{i2})$.

Berechne Optimallösung Y^* von SPk zur l_1 -Norm mit ex. Standorten $T(a_1), \dots, T(a_M)$.

Setze $M(f_k) = T^{-1}(Y^*) = \{(y_1^* - y_2^*, y_1^* + y_2^*) : (y_1^*, y_2^*) \in Y^*\}$.

Eine Verallgemeinerung dieser Aussage durch ähnliche Transformationen der existierenden Standorte ist für alle Blocknormen mit vier Extrempunkten möglich. Die Lösung von Standortproblemen des Typs SPk mit entsprechender Distanzfunktion ist nach einer Transformation also immer mit den Algorithmen aus den Kapiteln 4.2 und 4.3 umsetzbar.

Beispiel 4.6 Es sei $A = \{a_1 = (-22, 22)^T, a_2 = (13, 13)^T, a_3 = (14, 44)^T\}$ und das Abstandsmaß die Maximumsnorm l_∞ .

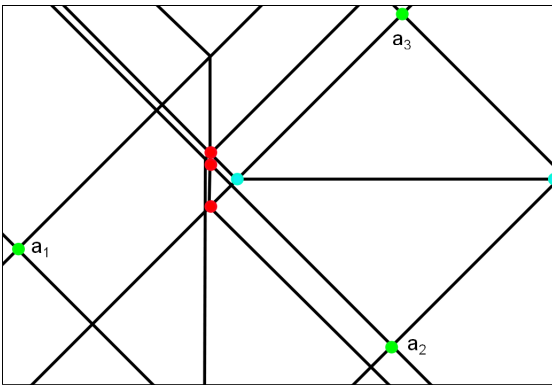


Abb. 4.18: Ausgangsproblem mit l_∞ -Norm

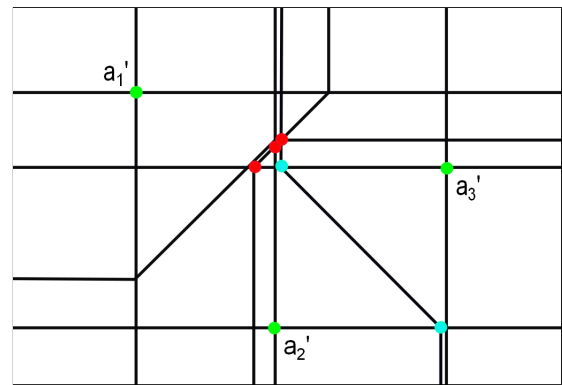


Abb. 4.19: Transformation in l_1 -Norm

Bisektoren und Fundamentalrichtungen liegen wie in Abbildung 4.18 dargestellt. Transformation der existierenden Standorte führt zu

$$a'_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -22 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \end{pmatrix},$$

$$a'_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a'_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich die in Abbildung 4.19 dargestellte Situation, ein Standortproblem zu den existierenden Standorten a'_1, a'_2 und a'_3 bezüglich der l_1 -Norm. Genau dieses Problem wurde bereits in den Beispielen zu Kapitel 4.2 und 4.3 mit den dargestellten Verfahren gelöst. Als optimale Eckpunkte für $k = 1$ ergaben sich $y_1^* = (13.5, 17.5), y_2^* = (13, 17)$ und $y_3^* = (11, 15)$.

Rücktransformation der Eckpunkte durch $x = T^{-1}y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y$ liefert

$$x_1^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13,5 \\ 17,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 31 \end{pmatrix},$$

$$x_2^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 30 \end{pmatrix},$$

$$x_3^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

als optimale Ecken (rote Punkte in Abb. 4.18) des Ausgangsproblems mit l_∞ -Norm. Auch hier gehört die konvexe Hülle der optimalen Eckpunkte innerhalb einer Zelle zur optimalen Lösungsmenge. Damit ergibt sich $M(f_1) = \overline{x_1^* x_3^*}$.

Für $k = 2$ gilt:

$$y_1^* = (13.5, 15) \quad \Rightarrow \quad x_1^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13,5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 28,5 \end{pmatrix},$$

$$y_2^* = (28.5, 0) \quad \Rightarrow \quad x_2^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28,5 \\ 28,5 \end{pmatrix}.$$

Die Eckpunkte sind blau dargestellt in Abbildung 4.18. Menge der Optimallösungen ist somit $M(f_2) = \overline{x_1^* x_2^*}$.

Im Fall $k = 3$ sind auch hier die existierenden Standorte die optimalen Lösungen:

$$y_1^* = (0, 22) \quad \Rightarrow \quad x_1^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 22 \end{pmatrix} = a_1,$$

$$y_2^* = (13, 0) \quad \Rightarrow \quad x_2^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = a_2,$$

$$y_3^* = (29, 15) \quad \Rightarrow \quad x_3^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 44 \end{pmatrix} = a_3.$$

Die Menge der Optimallösungen ergibt sich zu $M(f_3) = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Kapitel 5

Ausblick

In diesem abschließenden Kapitel soll ein kleiner Überblick über einen anderen Lösungsansatz sowie Erweiterungen auf den multikriteriellen Fall der zuvor besprochenen Standortprobleme gegeben werden.

Zunächst wird dabei auf die Theorie von allgemeinen Voronoi-Diagrammen eingegangen, danach wird ein spezielles Voronoi-Diagramm vorgestellt, das sich zur Lösung von Standortproblemen mit k -max Zielfunktion eignet.

Im Anschluss daran wird ein bekannter Ansatz zur Lösung von konvexen multikriteriellen Standortproblemen beschrieben und darauf eingegangen, warum dieser nicht zur Lösung der Probleme mit k -max Funktion genutzt werden kann.

Die beiden Abschnitte sollen nur in die jeweilige Theorie einführen, betrachtenswerte Ideen und weitere Forschungsansätze aufzeigen, erheben dabei aber keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

5.1 Lösung über k -Nächster-Punkt Voronoi-Diagramme

Einen ganz anderen Ansatz zur Bestimmung der Optimallösungen eines Standortproblems mit k -max Zielfunktion liefern verallgemeinerte Voronoi-Diagramme. Voronoi-Diagramme sind als Teilgebiet der algorithmischen Geometrie häufig verwendete Hilfsmittel in verschiedensten wissenschaftlichen Bereichen wie der Biologie, Chemie, Meteorologie, Kristallographie und anderen Disziplinen wie der Materialwissenschaft. Es gibt eine breite Theorie (z.B in [Okabe et al.]) die sich mit der Konstruktion und den Eigenschaften der verschiedensten Verallgemeinerungen von Voronoi-Diagrammen beschäftigt. Hier soll lediglich kurz eine Idee für einen möglichen Verfahrensansatz geliefert werden, da dieser sehr vielversprechend zur Lösung von SP k zu sein scheint. Die vorgestellte Vorgehensweise ist dabei als unbewiesene Idee für weitere Forschungen zu verstehen.

Werden bei einer Menge von M gegebenen Punkten in der Ebene alle Orte dieser Ebene ihrem jeweils nächstgelegenen Mitglied der Punktmenge zugeordnet, so spricht man von einem klassischen Voronoi-Diagramm. Die Punkte der Punktmenge werden auch als Zentren bezeichnet. Das Ergebnis ist eine Unterteilung der Ebene in eine Menge von Regionen, die zu je einem Zentrum gehören (siehe Abbildung 5.1). Aus allen Punkten, die mehr als einen nächstgelegenen Punkt der Menge besitzen und somit die Grenzen der Regionen bilden, entsteht das Voronoi-Diagramm. Im einfachsten Fall entspricht diese Aufteilung derjenigen gemäß den geordneten

Regionen (siehe Kapitel 3.2.2). Einem klassischen Voronoi-Diagramm ist die euklidische Norm zugrunde gelegt, aber es existieren auch Verallgemeinerungen auf beliebige Abstandsmaße sowie viele Spezialfälle, die auf ganz konkrete Problemstellungen zugeschnitten sind. Ein Beispiel sind die Nächster-Nachbar Voronoi-Diagramme.

Hier spielt aber eine andere Verallgemeinerung der Diagramme eine Rolle, die so genannten k -Nächster-Punkt Voronoi-Diagramme. Dazu wird zunächst noch eine formale Definition der klassischen Voronoi-Diagramme aus [Okabe et al.] vorgestellt.

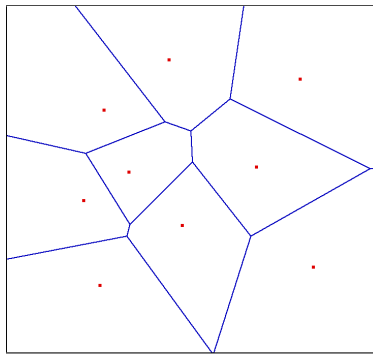


Abb. 5.1: Voronoi-Diagramm zur euklidischen Norm

Definition 5.1

Es sei $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ eine endliche Punktmenge und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, $i, j \in I_n = \{1, \dots, n\}$. Die durch

$$V(p_i) = \{x : \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\| \text{ für } i \neq j\}$$

definierten Regionen werden **Voronoi-Regionen** genannt. Die Menge $\mathcal{V} = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$ bildet das klassische **Voronoi-Diagramm**.

Für eine k -max Zielfunktion mit beliebigem k ist das klassische Voronoi-Diagramm allerdings nicht geeignet, da es nur die direkten Nachbarn eines Punktes anzeigt. Hier kann auf eine bekannte Verallgemeinerung, die k -Nächster-Punkt Voronoi-Diagramme (siehe [Okabe et al.]), zurückgegriffen werden.

Definition 5.2

Es sei $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ eine endliche Punktmenge. Ein Punkt p der Ebene wird einem Zentrum p_i zugeordnet, wenn p_i von p aus das k -nächste Zentrum darstellt. So entstehen die Voronoi-Regionen $V^{[k]}(p_i)$ und das zugehörige k -Nächster-Punkt **Voronoi-Diagramm** ist gegeben durch $\mathcal{V}^{[k]} = \{V^{[k]}(p_1), \dots, V^{[k]}(p_n)\}$.

Bei dieser Variante eines klassischen Voronoi-Diagramms werden die Punkte der Ebene also nicht ihrem nächsten, sondern dem k -nächsten Zentrum zugeordnet.

Durch die Zerlegung der Ebene gemäß dem k -Nächster-Punkt Voronoi-Diagramm ist für jeden existierenden Standort, bzw. für jedes Zentrum, a_i , $i \in \{1, \dots, M\}$, die Menge der Punkte

bekannt, für die a_i unter allen existierenden Standorten $a_j, \forall j \in \{1, \dots, M\}$, den k -kleinsten Abstand realisiert. Im der Größe nach aufsteigend sortierten Distanzvektor d_{\leq} mit $d_{(1)} \leq \dots \leq d_{(M)}$ befindet sich die Distanz der Punkte der zu a_i gehörigen Voronoi-Region also genau an der k -ten Position. Es gilt somit $d_{(k)} = d(a_i, x)$ für $x \in V^{[k]}(a_i)$.

Mit dieser Information kann die Menge der möglichen Optimallösungen auf die Regionen des k -Nächster-Punkt Voronoi-Diagramms eingeschränkt werden, für die gilt

$$V^{[k]}(\bar{a}_i) = \arg \min_{a_i \in A} \left\{ \min_{x \in V^{[k]}(a_i)} d(a_i, x) \right\},$$

für die also der kleinste Abstand eines Punktes $x \in V^{[k]}(a_i)$ zum zugehörigen a_i minimal ist unter allen Standorten $a_j, \forall j \in \{1, \dots, M\}$. Dieser Abstand entspricht genau dem gesuchten optimalen k -max Wert; der zugehörige Punkt $x \in V^{[k]}(\bar{a}_i)$, der diesen minimalen Abstand generiert, stellt die Optimallösung des SPk dar.

In zukünftigen Forschungen bleibt also die Frage zu klären, wie dieser Punkt $x \in V^{[k]}(\bar{a}_i)$ unter allen Punkten der Kandidaten-Regionen am effizientesten berechnet werden kann. Dafür müssen weitergehende Eigenschaften der verallgemeinerten Voronoi-Diagramme sowie das Verhalten der k -max Funktion über den einzelnen Regionen untersucht werden, was in dieser Arbeit zu weit vom eigentlichen Thema wegführen würde.

Außerdem werden schnelle Algorithmen zur Berechnung des k -Nächster-Punkt Voronoi-Diagramms benötigt, wobei es noch zu klären ist, ob die Möglichkeit besteht, diese Berechnung in akzeptabler Zeit umzusetzen, ohne den Aufwand des Gesamtverfahrens allzu groß werden zu lassen.

5.2 Multikriterielle Standortprobleme mit k -max Zielfunktion

In den Prozess der Standortplanung sind oftmals mehrere Entscheidungsträger involviert, die verschiedene Anforderungen an einen optimalen Standort stellen. Diese Ansprüche müssen nun möglichst gut miteinander kombiniert werden. Eine andere Möglichkeit ist, dass der geplante Standort verschiedene Umweltansprüche erfüllen muss. Eine neue Mülldeponie muss so zum Einen gut und schnell über Transportwege erreichbar sein, auf der anderen Seite sollte sie nicht zu nah an Wohngebieten liegen, um die Lebensqualität der Anwohner nicht einzuschränken. Diese Szenarien mit verschiedenen, oft widersprüchlichen Anforderungen sind sehr viel realitätsnäher, als Probleme, bei denen nur ein Kriterium optimiert werden muss. In diesen Fällen reicht eine einzige Zielfunktion nicht mehr aus, um das Standortproblem hinreichend genau beschreiben zu können.

Deshalb soll in diesem Abschnitt eine Ausweitung der Standortprobleme auf p verschiedene k -max Zielfunktionen betrachtet werden. Ein multikriterielles Standortproblem mit k -max Funktionen lässt sich folgendermaßen modellieren:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f_k(x) := \begin{pmatrix} k_1\text{-max}\{d(A, X)\} \\ i=1, \dots, M \\ \vdots \\ k_p\text{-max}\{d(A, X)\} \\ i=1, \dots, M \end{pmatrix},$$

wobei $f_k(x) = \begin{pmatrix} f_k^1(x) \\ \vdots \\ f_k^p(x) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^p$, $d(A, X) = (d(a_1, X), \dots, d(a_M, X))$ und $d(a_i, X) =$

$\min_{y \in \mathcal{X}} w_i \gamma_B(y - a_i)$ mit $w_i \geq 0$. Außerdem ist auch k , das den gesuchten k-max Wert angibt, nun kein Skalar mehr; es gilt $k \in \mathbb{R}^p$, so dass in jeder Komponente f_k^i ein anderes Element k_i minimiert wird.

Für diese Art von Standortproblemen gibt es noch keine Lösungsansätze. Eine Möglichkeit, an diese Probleme heranzugehen, ist, wie bei den einkriteriellen Problemen, der Weg über die geordneten Medianprobleme. Dafür werden zunächst ein paar wichtige Begriffe aufgeführt und speziell auf Standortprobleme angepasst.

Es seien $f_k^1, \dots, f_k^p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verschiedene k-max Funktionen, die simultan optimiert werden sollen. Das Auswerten dieser Funktionen liefert Punkte in einem d -dimensionalen Bildraum, der nicht mit der kanonischen Ordnung versehen ist, weshalb auf das Optimalitätskonzept der Effizienz zurückgegriffen werden muss.

Nach den Definitionen aus Kapitel 2.1.2 ist ein Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ ein effizienter Standort, wenn es kein $y \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass

$$f_k^m(y) \leq f_k^m(x) \quad \forall m = 1, \dots, p \quad \text{und} \quad f_k^n(y) < f_k^n(x) \quad \text{für ein } n = 1, \dots, p.$$

Die Menge der effizienten Lösungen wird dabei mit \mathcal{X}_E bezeichnet.

Mit Hilfe von Niveaumengen und Niveaulinien lässt sich ein Kriterium herleiten, welches angibt, ob ein Punkt x effizient ist oder nicht (siehe [Nickel und Puerto]).

Definition 5.3

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist die **Niveaumenge** zu $\rho \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$L_{\leq}(f, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq \rho\},$$

die **Niveaulinie** zu $\rho \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$L_{=}(f, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \rho\}.$$

Damit ergibt sich folgende Aussage über die Effizienz von x .

Satz 5.1

$$x \in \mathcal{X}_E \Leftrightarrow \bigcap_{m=1}^p L_{\leq}(f_k^m, f_k^m(x)) = \bigcap_{m=1}^p L_{=}(f_k^m, f_k^m(x)).$$

Beweis:

Siehe [Kohl].

Die Bedingungen in Satz 5.1 lassen sich auch anschaulich gut interpretieren. Kann man durch Verschiebung von x den Zielfunktionswert der einen Funktion nicht verbessern, ohne dass der

Wert einer anderen Funktion schlechter wird, so ist x effizient. Dies entspricht der Tatsache, dass sich die Niveaumengen nur in den Punkten schneiden, die zur Niveaulinie gehören.

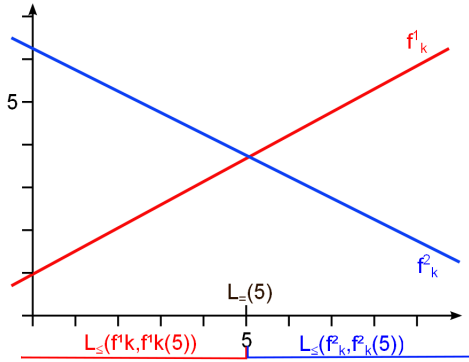


Abb. 5.2: Erfülltes Effizienzkriterium

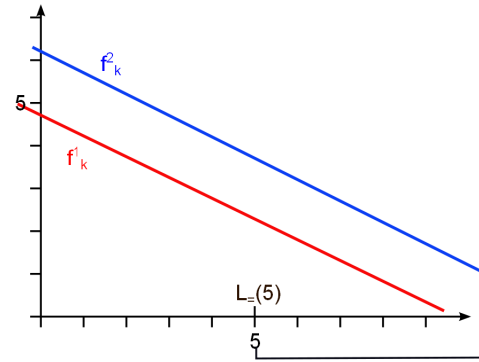


Abb. 5.3: Nicht erfülltes Effizienzkriterium

Die Abbildungen 5.2 und 5.3 veranschaulichen das Effizienzkriterium für zwei Zielfunktionen f_k^1 und f_k^2 . Im ersten Fall wird der Punkt $x = 5$ untersucht. Dieser ist effizient, da $L_{\leq}(f_k^1, f_k^1(5)) = \{x \in \mathbb{R}^2 : f_k^1(x) \leq f_k^1(5)\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \leq 5\}$ und genauso $L_{\leq}(f_k^2, f_k^2(5)) = \{x \in \mathbb{R}^2 : f_k^2(x) \leq f_k^2(5)\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \geq 5\}$. Daraus folgt, dass

$$L_{\leq}(f_k^1, f_k^1(5)) \cap L_{\leq}(f_k^2, f_k^2(5)) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = 5\} = L_{=} (f_k^1, f_k^1(5)) \cap L_{=} (f_k^2, f_k^2(5)).$$

Analog kann für alle Punkte x in Abbildung 5.2 gezeigt werden, dass sie effizient sind. In Abbildung 5.3 ist das Effizienzkriterium dagegen nicht erfüllt. Zum Beispiel ist für $x = 5$ die Niveaumenge für beide Funktionen $\{x \in \mathbb{R}^2 : x \geq 5\}$, die Niveaulinien allerdings nur $\{x \in \mathbb{R}^2 : x = 5\}$. Analoge Rechnungen für beliebiges x führen zu dem Ergebnis, dass kein Punkt effizient ist.

Aufbauend auf diesem Effizienzkriterium entwickeln [Nickel und Puerto] einen Lösungsalgorithmus für konvexe zweikriterielle geordnete Medianprobleme. Auch im zweikriteriellen Fall ergibt die Berechnung der Bisektoren und Fundamentalrichtungen eine Teilung der Ebene in Zellen, wobei nun jede Zielfunktion ihre eigenen Bisektoren generiert, sofern ihnen unterschiedliche Abstandsmaße zugeordnet sind. Im Falle der Konvexität der p Zielfunktionen kann gezeigt werden, dass die Menge der effizienten Lösungen \mathcal{X}_E zusammenhängend ist und eine Kette von Kanten oder Ecken von Zellen oder kompletten Zellen darstellt.

Die Idee des Verfahrens ist es, bei einem Punkt $\alpha \in \mathcal{X}_E$ der Zellstruktur zu starten, den Zusammenhang von \mathcal{X}_E auszunutzen und sich so von einem effizienten Knoten x zu einer anderen effizienten Ecke y , die mit der vorhergehenden über eine geordnete elementarkonvexe Menge verbunden ist, zu bewegen. Für Start- und Endpunkt α, β der Kette gilt dabei:

$$\alpha \in \mathcal{X}_{1,2} := \arg \min_{x \in M(f_\lambda^1)} f_\lambda^2(x) \quad \text{und} \quad \beta \in \mathcal{X}_{2,1} := \arg \min_{x \in M(f_\lambda^2)} f_\lambda^1(x).$$

$\mathcal{X}_{1,2}$ und $\mathcal{X}_{2,1}$ sind die Mengen der lexikographisch optimalen Lösungen des Standortproblems. Bei der lexikographischen Optimierung wird das Problem zunächst bezüglich einer der beiden

Zielfunktionen optimiert und unter diesen optimalen Lösungen diejenige herausgesucht, die bezüglich der anderen Zielfunktion den besten Wert aufweist. Dass tatsächlich $\mathcal{X}_{lex} \subseteq \mathcal{X}_E$ gilt, wird in [Kohl] bewiesen.

Die Verfahrensidee lässt sich mit einigen zusätzlichen Beobachtungen auch auf $p > 2$ Zielfunktionen verallgemeinern (siehe [Nickel und Puerto]).

Die Übertragung dieses Lösungsansatzes auf multikriterielle Standortprobleme mit k-max Zielfunktionen ist allerdings nicht möglich, da k-max Funktionen, wie in Kapitel 4 gezeigt, außer für $k = 1$ nicht konvex sind. Somit ist der kettenförmige Zusammenhang der effizienten Lösungsmenge nicht gegeben und ein Fortschreiten entlang dieser Kette nicht umsetzbar.

Einen solchen Fall, in dem die effiziente Menge eines multikriteriellen Standortproblems mit k-max Funktionen nicht zusammenhängend ist, zeigt das nächste Beispiel.

Beispiel 5.1 Gegeben sei ein zweikriterielles Standortproblem mit k-max Zielfunktionen in folgender Form:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f_k(x) := \begin{pmatrix} 2\text{-max}_{i=1,\dots,M} \{l_2(A, x)\} \\ 3\text{-max}_{i=1,\dots,M} \{l_2(A, x)\} \end{pmatrix},$$

wobei $A = \{a_1 = (1, 1)^T, a_2 = (7, 1)^T, a_3 = (27, 1)^T, a_4 = (33, 1)^T\}$, $w_i = 1 \forall i = 1, \dots, 4$ und alle Standorte mit der euklidischen Norm versehen sind.



Abb. 5.4: 2-max (grün), 3-max (blau), effiziente Menge (gelb)

Abbildung 5.4 zeigt die Optimallösungen der zugehörigen einkriteriellen SPk, wobei diese jeweils nicht zusammenhängend sind. Die optimalen Punkte $M(f_2) = \{(14, 1)^T, (20, 1)^T\}$ des 2-max Problems sind in grün dargestellt, $M(f_3) = \{(4, 1)^T, (30, 1)^T\}$ der 3-max Aufgabe in blau.

Die Strecken $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \end{pmatrix}$ beinhalten alle effizienten Punkte des zweikriteriellen Standortproblems, denn dort ist eine Verbesserung der einen Zielfunktion nur durch

eine Verschlechterung in der anderen Zielfunktion zu erreichen. Die Strecke $\begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist

nicht effizient, da für eine Verschiebung der Lösung in diesen Bereich sowohl die 2-max als auch die 3-max Funktion schlechtere Zielfunktionswerte (größere Distanzen) annehmen. Die Menge der effizienten Lösungen \mathcal{X}_E ist somit nicht zusammenhängend und kann deshalb nicht mit dem oben beschriebenen Ansatz gelöst werden.

Für den Fall von nicht-konvexen Zielfunktionen muss also ein eigenes Lösungsverfahren entwickelt werden. Zudem muss überprüft werden, ob es auch hier ausreicht, die Ecken der geordneten elementarkonvexen Mengen zu untersuchen, oder ob auch mitten auf einer Kante oder im Inneren einer Zelle ein Optimum liegen kann. Auch die Rückführung auf multikriterielle Centerprobleme stellt ein lohnenswertes Gebiet für weitere Forschungen dar.

Lösungsverfahren können allerdings weiterhin auf zwei Eigenschaften zurückgreifen, die auch im multikriteriellen Fall ihre Gültigkeit nicht verlieren: Zum einen bleibt die Zellstruktur unverändert, da weder Bisektoren noch Fundamentalrichtungen von der fehlenden Konvexität beeinflusst werden. Zum anderen ist auch die Linearität der Zielfunktionen f_k^i innerhalb jeder geordneten elementarkonvexen Menge weiterhin gegeben. Deshalb können die in [Nickel et al.] aufgeführten Beobachtungen zur Berechnung der lokal effizienten Punkte innerhalb einer Zelle verwendet werden. Der Unterschied ist allerdings, dass die globale Effizienz der lokal effizienten Lösungen nicht mehr sichergestellt werden kann. Deshalb müssten nach der Bestimmung sämtlicher lokal effizienter Lösungen, diese untereinander verglichen werden, um die globalen Lösungen herauszufiltern.

Da dies allerdings sehr aufwändig ist, versprechen Verfahren, die genauer auf die Struktur der k-max Funktionen zugeschnitten sind, wesentlich effizientere Lösungsmethoden.

Zudem können ganz neue Ansätze über die Theorie der multikriteriellen Optimierung, wie zum Beispiel Summenskalarisierungen oder ε -Constraint-Verfahren, getestet werden.

Kapitel 6

Fazit

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Standortprobleme mit k -max Zielfunktion analysiert und auf zwei verschiedene Arten gelöst. Dieser Problemtyp stellt eine Verallgemeinerung des bekannten Centerproblems dar und minimiert das k -größte Element des Distanzvektors eines neuen zu den bereits existierenden Standorten.

Zur Herleitung von Lösungsverfahren wurden zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt.

Das geometrische Lösungsverfahren (Algorithmus 4.2) baut auf der Theorie der geordneten Medianprobleme auf. Geordnete Medianprobleme besitzen eine Zielfunktion, die in ihrer allgemeinen Form viele bekannte Standortprobleme als Spezialfälle zulässt. Über eine bestimmte Wahl des Gewichtsvektors λ stellt auch die k -max Zielfunktion einen solchen Spezialfall dar.

Die für geordnete Medianprobleme bekannten Diskretisierungsergebnisse konnten auf k -max Standortprobleme übertragen und weiter verschärft werden, indem die Kandidatenmenge der möglichen Optimallösungen durch Einbeziehen der besonderen Lage der Optimallösungen unter Verwendung der l_1 -Norm noch weiter reduziert wurde. Dafür wurde eine Zerlegung der Ebene in Zellen, die so genannten geordnete elementarkonvexe Mengen, aufgebaut. Als Ergebnis der Diskretisierung zeigte sich, dass unter den optimalen Lösungen immer Ecken dieser Zellen liegen. Wird als Abstandsmaß die Manhattannorm zugrunde gelegt, so können die optimalen Eckpunkte nur auf Schnittpunkten von mindestens zwei Bisektoren oder aber in einem Schnittpunkt eines Bisektors mit einer Fundamentalrichtung liegen. Auf diese Weise muss die k -max Funktion nur in all diesen Schnittpunkten ausgewertet, die erhaltenen Werte miteinander verglichen und der Punkt mit dem kleinsten Zielfunktionswert ausgewählt werden. Existieren mehrere optimale Eckpunkte, so ist die konvexe Hülle der Punkte, die zu der gleichen Zelle gehören, ebenfalls optimal.

Die Berechnung der Bisektoren stellen im allgemeinen Fall der geordneten Medianprobleme den aufwändigsten Teil des Lösungsverfahrens dar. Für die Bisektoren zur l_1 -Norm könnte dagegen aufgrund ihrer einfachen Struktur ein sehr effizienter Algorithmus aufgestellt werden.

Eine echte Ersparnis durch die weitere Reduktion der Kandidatenmenge konnte theoretisch, in Form eines niedrigeren Aufwandes, nicht gezeigt werden. Praktisch erweist sich dieses Vorgehen dagegen als vielversprechend. Abhängig von der Lage der existierenden Standorte kann die Kandidatenmenge teilweise erheblich verkleinert, im Beispiel sogar fast halbiert werden.

Das zweite Verfahren, Algorithmus 4.3, stellt eine Lösung des k -max Problems durch Rück-

führung auf eine Reihe von Centerproblemen dar. Durch Konvexitätsaussagen zur geordneten Medianfunktion konnten auch genaue Aussagen über die Konvexität der k -max Funktion gemacht werden; diese ist im Allgemeinen, außer für $k = 1$, nicht konvex. Da bekannte Verfahren meist auf konvexen Zielfunktionen aufbauen, schien die Untersuchung einer Transformation des Ausgangsproblems in konvexe Unterprobleme sinnvoll.

Dafür wurde zunächst der Begriff der „Nähe“ von Standorten geprägt. Darauf aufbauend stellte sich heraus, dass der optimale k -max Punkt zu allen M existierenden Standorten gleich dem optimalen Centerpunkt der $M - k + 1$ am nächsten zusammenliegenden Standorte ist. Indem also für alle $M - k + 1$ -elementigen Teilmengen, die am dichtesten zusammenliegen, jeweils ein Centerproblem gelöst wird, ergibt sich automatisch auch die gesuchte Optimallösung des k -max Standortproblems.

Durch die Untersuchung aller $M - k + 1$ -elementigen Teilmengen ist der Aufwand für dieses Verfahren für eine große Menge von existierenden Standorten relativ hoch. Welches der beiden vorgestellten Verfahren bei einem gegebenen Problem zum Einsatz kommen sollte, hängt von dem Verhältnis zwischen M und k ab. Genauere Überlegungen für sinnvolle Werte von M und k wurden ebenfalls vorgestellt.

Durch eine einfache Transformation der existierenden Standorte können die hergeleiteten Algorithmen nicht nur für k -max Standortprobleme mit l_1 -Norm, sondern auch für solche mit l_∞ -Distanzen als Abstandsmaß angewandt werden.

Dass das Gebiet der k -max Standortprobleme noch sehr viele Forschungsmöglichkeiten bietet, zeigt schon der kurze Ausblick im letzten Kapitel. Einen vielversprechenden Ansatz zur Lösung bieten zum Beispiel k -Nächster-Punkt Voronoi-Diagramme, die ebenfalls eine Unterteilung der Ebene herbeiführen. Von dieser ausgehend ist es wahrscheinlich, dass viele Regionen als Optimallösungen ausgeschlossen werden können und so wieder eine gute Diskretisierung erfolgt. Auch das Gebiet der multikriteriellen k -max Probleme lässt noch viele Fragen offen. Von Seiten der geordneten Medianprobleme kann dabei nur auf Lösungsverfahren für konvexe Probleme zurückgegriffen werden, die sich nicht auf k -max Probleme anwenden lassen. Hier müssen also völlig neue Ansätze entwickelt werden.

Eine interessante Anwendung finden die k -max Standortprobleme zum Beispiel im Rahmen der Standorttheorie mit Outliern. Diese beiden Problemtypen sind zueinander äquivalent. Die Idee, die k -größte Entfernung des neuen Standortes zu den existierenden Kunden zu minimieren und diese als Entscheidungskriterium zu verwenden, entspricht genau dem Vorgehen, eine bestimmte Anzahl von Outliern (hier $k - 1$ Stück) aus der Berechnung der Optimallösung auszuschließen. Dies kann sinnvoll sein, wenn einige Standorte extrem weit von den anderen entfernt liegen und so einen zu großen negativen Einfluss auf die Optimallösungen haben würden. Die in dieser Arbeit erhaltenen Ergebnisse bilden also einen völlig neuen Zugang für den Umgang mit Outliern in der Standortplanung.

Literaturverzeichnis

- [Charikar et al.] Charikar, M.; Khuller, S.; Mount, D.; Narasimhan, G.: *Algorithms for facility location problems with outliers*, Proc. Symposium on Discrete Algorithms, 642-651, 2001
- [Dobkin et al.] Dobkin, D.P.; Huhdanpaa, H.; Barber, C.B.: *The quickhull algorithm for convex hulls*, Journal ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), Volume 22 Issue 4, 1996
- [Durier und Michelot] Durier, R.; Michelot, C.: *Geometrical properties of the Fermat-Weber problem*, European Journal of Operational Research 20, 332-343, 1985
- [Ehrgott] Ehrgott, M.: *Multicriteria Optimization*, Second Edition, Springer-Verlag, 2005
- [Francis et al.] Francis, R.L.; Leon, F.; McGinnis, L.F.; White, J.A.: *Facility Layout and Location: An Analytical Approach*, Rentice-Hall, New York, 1992
- [Gorski und Ruzika] Gorski, J.; Ruzika, S.: *On k-max-Optimization*, Operations Research Letters 37(1), 23-26, 2009
- [Hamacher] Hamacher, H.W.: *Mathematische Lösungsverfahren für planare Standortprobleme*, Vieweg, 1995
- [Icking et al.] Icking, C.; Klein, R.; Ma, L.; Nickel, S.; Weißler, A.: *On Bisectors for Different Distance Functions*, Discrete Applied Mathematics, 109, 139-161, 2001
- [Katz und Cooper] Katz, I.N.; Cooper, L.: *Facility location in the presence of forbidden regions*, European Journal of Operations Research, Volume6, Issue 2, 1981
- [Klamroth] Klamroth, K.: *Single-Facility Location Problems with Barriers*, First Edition, Springer New York, 2002
- [Kariv und Hakimi] Kariv, O; Hakimi, S.L.: *An algorithmic approach to the network location problems*, SIAM Journal on applied Mathematics, Vol.37, 1979
- [Kohl] Kohl, T.: *Multikriterielle Standortprobleme mit minimax-Zielfunktion*, Diplomarbeit, Universität Kaiserslautern, 1996
- [Love et al.] Love, R.F; Morris, J.G.; Wesolowsky, G.O.: *Facilities location: Models and methods*, Operations Research Letters, 7, 1988.

- [Minkowski] Minkowski, H.: *Theorie der konvexen Körper - Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 2, Teubner, Berlin, 1911
- [Nickel und Puerto] Nickel, S.; Puerto, J.: *Location Theory - A Unified Approach*, Springer-Verlag, 2005
- [Nickel et al.] Nickel, S.; Puerto, J.; Rodriguez-Chia, A.M.; Weissler, A.: *Multicriteria Planar Ordered Median Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 126, 657-683, 2005
- [Okabe et al.] Okabe, A.; Boots, B.; Sugihara, K.: *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, Second Edition, Wiley, 2000
- [Punnen und Nadir] Punnen, A.P.; Nadir, K.P.K.: *Generalized bottleneck problems*, Optimization 35 (2), 159-169, 1995
- [Rosenbaum] Rosenbaum, R.A.: *Subadditive Functions*, Duke Math Journal, 227-247, 1950
- [Scholz] Scholz, D.: *Multikriterielle Optimierung*, Skript zur Vorlesung, Universität Göttingen, 2006
- [Schulze] Schulze, K.: *Multikriterielle Standortprobleme auf Netzwerken mit Median- und Center-Zielfunktion*, Diplomarbeit, Universität Kaiserslautern, 1998
- [Stolpe] Stolpe, M.: *Ein Algorithmus zur Lösung des Farthest-Pair-Problems*, Diplomarbeit, Universität Dortmund, 2003
- [Velten] Velten, S.: *Discrete Location Problems with Flexible Objectives*, J. Kovac, 2009
- [Wendell et al.] *Efficient points in location problems*, Operations Research, 33:1074-1090, 1985
- [Zvi und Hamacher] Zvi, D.; Hamacher, H.W.: *Facility Location - Applications and Theory*, Springer-Verlag, 2001