Blatt 7 - Lösungen nicht besprochener Aufgaben

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass

$$A := \{\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in k[T] \mid n \in \mathbb{N},\, a_1 = 0\},$$

also die Menge der Polynome mit verschwindendem linearen Term, in $k[T]$ ein Unterring ist, der isomorph zu $k[X][Y]/(X^2 - Y^3)$ ist.

Beweis. In der Übung wurde nicht gezeigt, dass der Kern des von $X \mapsto T^3$, $Y \mapsto T^2$ induzierten Ringhomomorphismus $f : K[X,Y] \to A$ genau das Ideal $I := (X^2 - Y^3)$ ist. Offenbar gilt wegen der Definition von f für jedes $P \in I$, dass $f(P) = 0$, also $I \subset \mathrm{Ker}(f)$. Sei also $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Wir betrachten P als Polynom in X mit Koeffizienten in $K(Y)$, also im Quotientenkörper von $K[Y]$. Per Division mit Rest erhält man $Q, R \in (K(Y))[X]$ mit

$$R = XR_1 + R_2 \text{ mit } R_i \in K(Y),$$

so dass

$$P = (X^2 - Y^3)Q + R.$$

Nun kann man sich leicht überlegen, dass wegen der einfachen Gestalt von $X^2 - Y^3$, in unserem Fall bereits $Q \in K[X,Y]$ und $R_i \in K[Y]$ gelten muss. Da $f(P) = 0$, gilt $f(R) = 0$, also

$$f(R) = T^3 R_1(T^2) + R_2(T^2) = 0,$$

wobei der Grad des ersten Summandens ungerade und der des zweiten gerade ist. Daraus folgt aber schon, dass $R_1 = R_2 = 0$ und somit $f \in I$.

Da in der Übung die Surjektivität gezeigt wurde, folgt die Aussage mit dem Homomorphiesatz.

$\square$