Klausur in Mathematik III

für Maschinenbau am 06.02.2009

---

1. Man stelle die Kurve

$$C \ : \ \vec{x}(t) = (\sinh t - \cosh t, \sqrt{2}t, \cosh t + \sinh t) \qquad , \qquad 0 \le t \le 2\pi \ .$$

nach der Bogenlänge dar und berechne den Tangenteneinheitsvektor, die Hauptnormale sowie die Krümmung.

2. Man prüfe, ob das Vektorfeld

$$\vec{V} = \left(\frac{z^2}{x+y} + y, \frac{z^2}{x+y} + x, z\ln((x+y)^2) + 2z \right)$$

quellen- oder wirbelfrei ist und berechne das Kurvenintegral

$$\int_C \vec{V} \ d\vec{x} \qquad mit\ C : \vec{x}(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t, t(t-\pi)) \ , \ t \in [0,\pi] \ .$$

3. Man berechne den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{V} = \left(y\sin z + x^2 y, y(2z - e^{x^2}), ze^{x^2} - z^2 \right)$$

durch die Oberfläche des Körpers

$$K = \{(x,y,z) | 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \ , \ y \ge -|x| \ , \ 0 \le z \le x^2 + y^2 \ \} \ .$$

Klausur Mathematik III für Maschinenbau 06.02.2009

1) $\vec{x}(t) = (\sinh t - \cosh t,\ \sqrt{2}\,t,\ \cosh t + \sinh t)$, Bogenlänge

$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{x}}(\tau)|\,d\tau$ (2), $\dot{\vec{x}}(t) = (\cosh t - \sinh t,\ \sqrt{2},\ \sinh t + \cosh t)$ (1)

$\Rightarrow |\dot{\vec{x}}(t)| = \left[(\cosh t - \sinh t)^2 + (\cosh t + \sinh t)^2 + 2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\cosh^2 t + 2(\sinh^2 t + 1)}$

$= \sqrt{4\cosh^2 t} = 2\,|\underbrace{\cosh t}_{\geq 1}| = 2\cosh t$ (4)

$\Rightarrow s(t) = \int_0^t 2\cosh\tau\, d\tau = 2\sinh t \Rightarrow t = \operatorname{arsh}\frac{s}{2}$ (2)

$\Rightarrow \vec{x}(s) = (\sinh \operatorname{arsh}\frac{s}{2} - \cosh(\operatorname{arsh}\frac{s}{2}),\ \sqrt{2}\operatorname{arsh}\frac{s}{2},\ \cosh(\operatorname{arsh}\frac{s}{2}) + \sinh(\operatorname{arsh}\frac{s}{2}))$

$\vec{x}(s) = \left(\frac{s}{2} - \sqrt{1+\frac{s^2}{4}},\ \sqrt{2}\operatorname{arsh}\frac{s}{2},\ \frac{s}{2} + \sqrt{1+\frac{s^2}{4}}\right)$; Darstellung nach der Bogenlänge, Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}(s) = \vec{x}\,'(s)$ (3)

$\Rightarrow \vec{T}(s) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{s}{\sqrt{1+\frac{s^2}{4}}},\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\frac{s^2}{4}}},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{s}{\sqrt{1+\frac{s^2}{4}}}\right)$ (3)

$\vec{T}(s) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+4}},\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{s^2+4}},\ 1 + \frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\right)$ $\quad \vec{T}\,'(s) = \varkappa(s)\,\vec{n}(s)$ (2)

$\vec{T}\,'(s) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{s^2+4} - \frac{s^2}{\sqrt{s^2+4}}}{s^2+4},\ -\frac{2\sqrt{2}\,s}{(s^2+4)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\sqrt{s^2+4} - \frac{s^2}{\sqrt{s^2+4}}}{s^2+4}\right)$ (3)

$= \frac{1}{(s^2+4)^{\frac{3}{2}}}(-2,\ -\sqrt{2}s,\ 2) \Rightarrow \varkappa(s) = |\vec{T}\,'(s)| = \frac{1}{(s^2+4)^{\frac{3}{2}}}(2(s^2+4))^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{s^2+4}$ (2)

(22) $\Rightarrow$ Krümmung $\varkappa(s) = \frac{\sqrt{2}}{s^2+4}$ Hauptnormale $\vec{n}(s) = \frac{1}{\varkappa(s)}\vec{T}\,'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{s^2+4}}(-2,\ \sqrt{2}s,\ 2)$.

2) $\vec{v} = \left(\underbrace{\frac{z^2}{x+y} + y}_{P},\ \underbrace{\frac{z^2}{x+y} + x}_{Q},\ \underbrace{2z\ln|x+y| + 2z}_{R}\right)$, $\vec{v}$ quellenfrei $\Leftrightarrow$

$\operatorname{div} v \equiv 0$ $\quad \operatorname{div}\vec{v} = P_x + Q_y + R_z = -\frac{z^2}{(x+y)^2} - \frac{z^2}{(x+y)^2} + 2\ln|x+y| + 2 \not\equiv 0$ (4)

$\Rightarrow \vec{v}$ nicht quellenfrei.

$\vec{v}$ wirbelfrei $\Leftrightarrow \operatorname{rot}\vec{v} \equiv 0$ $\quad \operatorname{rot}\vec{v} = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$

$= \left(\frac{2z}{x+y} - \frac{2z}{x+y},\ \frac{2z}{x+y} - \frac{2z}{x+y},\ -\frac{z^2}{(x+y)^2} + \frac{z^2}{(x+y)^2} + 1 - 1\right) \equiv 0 \Rightarrow \vec{v}$ wirbelfrei. (5)

Da die Kurve C $\vec{x}(t) = (\cos^2 t,\ \sin^2 t,\ t(t-\pi))$ wegen $x+y = \cos^2 t + \sin^2 t$ im homologisch einfach zusammenhängenden Bereich $x+y>0$, $z \in \mathbb{R}$, in dem $\vec{v}$ stetig diffbar ist, verläuft und geschlossen ist $\Rightarrow \oint_C \vec{v}\,d\vec{x} = 0$ (da Anfangs- und Endpunkt der Kurve zusammenfallen) (7) (16)

3) Integralsatz von Gauß: Fluß von $\vec{v}$ durch ∂K: (3)

$J = \iint_{\partial K} \vec{v}\,\vec{n}_0\,d\sigma = \iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\,dx\,dy\,dz$, $\vec{v} = (\underbrace{y\sin x + x^2 y}_{P},\ \underbrace{y(2z - e^{x^2})}_{Q},\ \underbrace{ze^{x^2} - z^2}_{R})$

$K = \{4 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ y \geq -|x|,\ 0 \leq z \leq x^2+y^2\}$ (2)

$\operatorname{div}\vec{v} = P_x + Q_y + R_z = 2xy + 2z - e^{x^2} + e^{x^2} - 2z = 2xy \Rightarrow$ (2)

$J = \iiint_K 2xy\,dx\,dy\,dz = \iint_B \left(\int_{z=0}^{x^2+y^2} 2xy\,dz\right)dx\,dy = \iint_B 2xyz\Big|_0^{x^2+y^2} dx\,dy = \iint_B 2xy(x^2+y)\,dx\,dy$ (2) (4)

$B = \{4 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ y \geq -|x|\}$. Übergang zu Polarkoordinaten

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\quad 2 \leq r \leq 3$ $\quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5}{4}\pi$ (wegen $y \geq -|x|$) (4)

$dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$ $\quad x^2+y^2 = r^2 \Rightarrow$

$J = \int_{r=2}^{3}\left(\int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} r^5 \underbrace{\sin\varphi}_{u} \cdot \underbrace{\cos\varphi\,d\varphi}_{du}\right)dr = \int_2^3 r^5 \frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} dr = 0$ (4) (21)