Begleittext zu den Aufgaben zur Induktion

Einbettung der Unterrichtseinheit in das Curriculum

Diese Unterrichtseinheit ist für den fortgeschrittenen gymnasialen Informatikunterricht gedacht (d.h. für SuS der 11. – 12. Klasse mit Ergänzungsfach oder Schwerpunktfach Informatik).

Vorgängig soll die Induktion als Instrument zur Bewältigung einfacher Probleme (wie z.B. die Frage, wie viele Kreuzungspunkte es zwischen einer gegebenen Anzahl Geraden in einer zweidimensionalen Ebene gibt) bereits eingeführt worden sein.

Weiter soll die Potenzrechnung bereits aus dem Mathematikunterricht bekannt sein.

Zielsetzung

Mit dieser Unterrichtseinheit soll das Lösen mittels induktiver Argumente geübt und gefestigt werden. Dadurch werden auch die Mustererkennung sowie die korrekte mathematische Ausdrucksweise geschult.

Grobe Übersicht über die Unterrichtseinheit

Mit einer anschaulichen Aufgabe zu Stammbäumen infolge einer Ein-Kind-Politik startet das Üben der Mustererkennung und deren formalen Einbettung in Induktionsbeweise an einem einfachen Szenario.

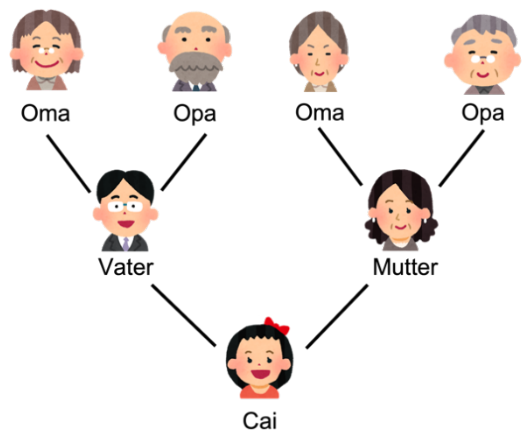
Die zweite Aufgabe thematisiert das Heron-Verfahren zur Bestimmung von Quadratwurzeln und soll den SuS aufzeigen, wie man die Induktion für den Beweis einer Eigenschaft eines Algorithmus (in diesem Fall die Tatsache, dass das Heron-Verfahren stets nur eine Approximation liefert) nutzen kann.

Abschliessend wird – wiederum mit Hilfe der Induktion – die Geschwindigkeit des Heron-Verfahrens untersucht.

Aufgaben zur Induktion

Aufgabe 1: Stammbäume infolge einer Ein-Kind-Politik

Bei einer Ein-Kind-Politik ist nur ein Kind pro Familie erlaubt. Cai ist das jüngste Mitglied einer solchen Familie. Wir bezeichnen sie als die nullte Generation, ihre Eltern als die erste Generation, ihre Grosseltern als die zweite, etc., vgl. auch Abb. rechts.

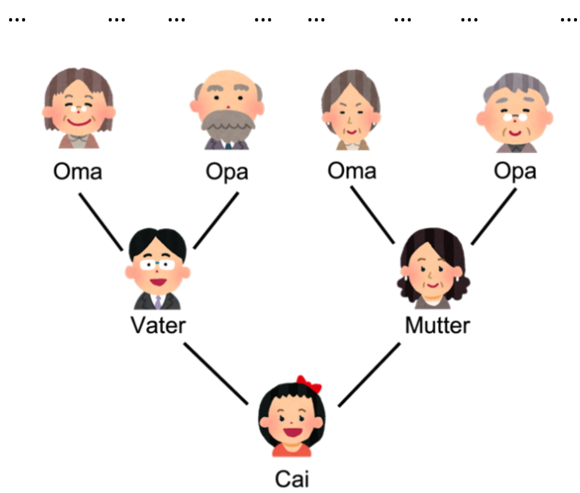


a) Wie viele Vorfahren von Cai kommen pro Generation dazu?

b) Wie viele Vorfahren zählen zu Cais Familie zur und einschliesslich der n-ten Generation?

Lösung:

a) *Ergänzen wir das Bild durch die Beschriftung der Generationen und der Anzahl Mitglieder einer Generation.*



Generation	Anzahl Mitglieder pro Generation
G2	**4**
G1	**2**
G0	**1**

Schnell sehen wir, dass sich jede Generation verdoppelt und somit die Anzahl Familienmitglieder pro Generation um eine Zweierpotenz wächst. Kommt eine n-te Generation dazu, wächst die Anzahl Familienmitglieder um 2^n.

Beweisen wir diesen Befund mittels einer Induktion. Sei $A(n)$ die Anzahl Mitglieder der n-ten Generation. So lautet die ***Induktionsannahme***

$$A(n) = 2^n$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsverankerung $n = 0$:
$A(0) = 1$, *da Cai die Einzige der nullten Generation ist. Da* $1 = 2^0$ *gilt, stimmt die Induktionsannahme für den ersten Wert* $n = 0$.

Induktionsschritt $n \to n + 1$:
Da jede Person genau zwei Vorfahren der vorgängigen Generation hat, verdoppelt sich jede ältere Generation im Vergleich zur jüngeren Generation. Es gilt also:

$$A(n+1) = A(n) \cdot 2 = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

Damit ist die Induktionsannahme bewiesen.

b) *Da wir uns nun bereits Gedanken zum Induktionsschritt gemacht haben und wissen, mit welchen Zahlen wir starten, können wir die folgenden induktiven Überlegungen zusammenführen:*

Sei $T(n)$ *die Anzahl Familienmitglieder bis und mit zur* n*-ten Generation. Da Cai die Einzige der nullten Generation ist, wissen wir, dass*

$$T(0) = 1$$

gilt. Auch haben wir in der Teilaufgabe a) herausgefunden, dass jede n*-te Generation* 2^n *zusätzliche Mitglieder hervorbringt. So stossen wir auf die Gleichung:*

$$T(n+1) = T(n) + 2^{n+1}$$

Ersetzen wir wiederum $T(n)$ *durch* $T(n-1) + 2^n$, *dann* $T(n-1)$ *durch* $T(n-2) + 2^{n-1}$ *usw.:*

$$T(n+1) = T(0) + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n+1}$$

Setzen wir zu guter Letzt noch $T(0) = 1$ *ein, erhalten wir:*

$$T(n+1) = 1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n+1}$$

Um die Anzahl Familienmitglieder bis zur und einschliesslich der n*-ten (und nicht mehr* $(n+1)$*-ten) Generation zu erhalten, müssen wir also*

$$T(n) = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n$$

berechnen. Wir können erkennen, dass die Summe aus allen Zweierpotenzen bis 2^n *besteht und dass diese Summe also durch die Binärzahl, bestehend aus* $n + 1$ *Einsenl repräsentiert werden kann. Wir erhalten somit:*

$$T(n) = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = \underbrace{11 \ldots 1_{bin}}_{n} = 2^{n+1} - 1$$

Diese Lösung macht auch Sinn: Da in jeder Generation die nächste Zweierpotenz an Vorfahren dazukommt, entspricht dies im Binärsystem genau dem Voranstellen einer 1 *an die bisherige Anzahl Vorfahren, sodass wir am Schluss* n*+1 Einsen nebeneinanderstehen haben.*

Beweisen wir diese Erkenntnis ***formal*** *mittels eines Induktionsbeweises.*

Sei $T(n)$ *noch immer die Anzahl Familienmitglieder bis zur und einschliesslich der* n*-ten Generation. So lautet die* ***Induktionsannahme***

$$T(n) = 2^{n+1} - 1$$

für $n \in \mathbb{N}$*.*

Induktionsverankerung $n = 0$***:***
Es ist $T(0) = 1$ *, da Cai die einzige Person der nullten Generation ist. Da* $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$ *gilt, stimmt die Induktionsannahme für den ersten Wert* $n = 0$*.*

Induktionsschritt $n \to n + 1$*:*
Berechnen wir $T(n + 1)$ *aus* $T(n)$*, indem wir die* $(n + 1)$*-ste Generation dazuzählen. Deren Anzahl ist genau* $A(n + 1) = 2^{n+1}$*.*

$$T(n + 1) = T(n) + A(n + 1) = T(n) + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$$

D.h., um die Anzahl Familienmitglieder bis zur und einschliesslich der n*-ten (und nicht mehr* $(n + 1)$*-ten) Generation zu erhalten:*

$$T(n) = 2^{n+1} - 1$$

Dies beweist die Induktionsannahme.

Aufgabe 2: Das Heron-Verfahren (Babylonisches Wurzelziehen)

Wir alle sind ihr schon einmal begegnet, der guten, alten **Quadratwurzel**. Das Ziel ist: Finde eine Zahl x, die - mit sich selbst multipliziert – eine vorgegebene, nichtnegative Zahl y ergibt:

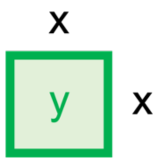
$$y = x \cdot x = x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{y}$$

Normalerweise würden wir ganz einfach den Taschenrechner hervorholen, um x zu berechnen. Hier wollen wir aber ein iteratives Rechenverfahren kennenlernen, das schon seit fast 4000 Jahren bekannt ist: das sogenannte «Heron-Verfahren».

Heron von Alexandria war ein griechischer Mathematiker, Physiker und Techniker, der ungefähr im 1. Jahrhundert n. Chr. lebte und als einer der genialsten Tüftler der Antike gilt. Er verfasste diverse Schriften, darunter auch die «Metrica», in welcher er unter anderem über ein Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel berichtet. Er war der Erste, der es schriftlich festhielt – das Verfahren selbst war schon den alten Babyloniern um etwa 1750 v. Chr. bekannt (deshalb wird das Heron-Verfahren auch «Babylonisches Wurzelziehen» genannt).

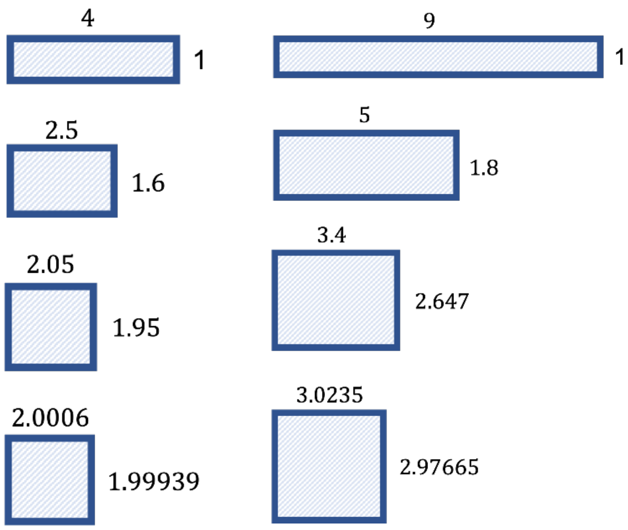
Wie dieses Verfahren zur Berechnung einer Quadratwurzel genau funktioniert und was man über dieses Verfahren mit Hilfe der Induktion herausfinden kann, werden wir im Rahmen dieser Aufgabe lernen.

Das Heron-Verfahren beruht auf der **geometrischen Auffassung** der Quadratwurzel. Letztere ist ja eigentlich nichts anders als die Seitenlänge x eines Quadrats, dessen Flächeninhalt y ergibt (vgl. hierzu die Abbildung rechts)! Aufgrund der geometrischen Interpretation verzichten wir in der nachfolgenden Diskussion auf die negative Wurzel $x = -\sqrt{y}$ und beschränken uns nur auf die positive Wurzel $x = \sqrt{y}$.



Die oben beschriebene geometrische Idee können wir ausnutzen, um uns schrittweise an die Quadratwurzel einer vorgegebenen Zahl y anzunähern.

Sie sehen rechts zwei Beispiele: Links wird $\sqrt{4}$ berechnet, während rechts $\sqrt{9}$ bestimmt wird.



a) Versuchen Sie zunächst nur **in Worten** zu erklären, wie das Heron-Verfahren die Quadratwurzel $x = \sqrt{y}$ iterativ (d.h. schrittweise sich der exakten Lösung annähernd) berechnet.
Tipp: Beachten Sie, dass die Rechtecke alle die gleiche Fläche (die der Grösse der Zahl y, aus der man die Wurzel ziehen möchte, entspricht) haben.

b) Finden Sie eine Formel, mit der man die nächste Näherung a_{n+1} an die Quadratwurzel (d.h. die eine Seitenlänge des Rechtecks) berechnen kann, unter der Voraussetzung, dass die Näherung bzw. die Seitenlänge a_n des vorangehenden Schrittes bekannt ist.
Tipps:
- Wie kann man a_{n+1} aus a_n und b_n (die andere Seitenlänge des Rechtecks) berechnen?
- Wenn man a_{n+1} kennt, wie kann man auf b_{n+1} schliessen, ohne auf a_n oder b_n zurückgreifen zu müssen?
- Wie kann man also a_{n+1} unter Benutzung von a_n ausrechnen?

c) Testen Sie Ihre in b) gefundene Iterationsformel am folgenden Beispiel: Berechnen Sie $\sqrt{10}$ in drei Iterationsschritten. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Taschenrechner. Wie stark weicht das von Ihnen berechnete Resultat ab?

d) Wir wollen mit Hilfe der Induktion beweisen, dass das Heron-Verfahren die Quadratwurzel $\sqrt{y}$ für Zahlen $y > 1$ nur annähert, jedoch nicht exakt berechnen kann. Zeigen Sie hierzu, dass stets $a_n > \sqrt{y}$ und $b_n < \sqrt{y}$ für einen beliebigen Iterationsschritt n gilt.
Tipp: Betrachten Sie für den Induktionsschritt $n \to n+1$ die Ungleichung $(a_n - \sqrt{y})^2 > 0$ (von dessen Gültigkeit Sie sich zunächst noch überzeugen sollen). Multiplizieren Sie die linke Seite aus und formen Sie die Ungleichung so weit auf geschickte Art um, bis auf der linken Seite $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{y}{a_n}}{2}$ und auf der rechten Seite $\sqrt{y}$ steht.

Lösung:

a) *Man startet damit, dass man die vorgegebene Zahl* y *als Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen* y *und* 1 *auffasst. Dann versucht man, das Rechteck schrittweise so umzuformen, dass es einem Quadrat immer ähnlicher sieht (d.h. also insbesondere, dass man die Differenz der Seitengrössen immer weiter verkleinert). Würde man sogar ein perfektes Quadrat erreichen, dann entspräche dessen Seitenlänge gerade der Quadratwurzel* $x = \sqrt{y}$ *(ein perfektes Quadrat erzielt man allerdings mit diesem Verfahren nicht – das Heron-Verfahren ist ein Näherungsverfahren, siehe auch Teilaufgabe d).*

b) *Die schrittweise Umformung des Rechtecks erfolgt auf diese Weise: Man rechnet das arithmetische Mittel der zwei aktuellen Seitenlängen* a_n *und* b_n *aus (z.B. bei* $\sqrt{4}$ *wäre das am Anfang* $\frac{4+1}{2} = 2.5$*). Das Ergebnis bildet die neue, nächste Näherung* a_{n+1} *an die Quadratwurzel von* y *bzw. die eine neue Seite des Rechtecks, was wir formal so ausdrücken:*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (1)$$

Die andere neue Seite b_{n+1} *ergibt sich durch die Division der Fläche durch die Seite* a_{n+1} *– formal dargestellt:*

$$b_{n+1} = \frac{y}{a_{n+1}}$$

Möchte man also in der Formel (1) auf b_n *verzichten, kann man* a_{n+1} *folglich so schreiben:*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{y}{a_n}}{2}$$

Damit haben wir eine iterative Formel gefunden, um die nächstbeste Näherung a_{n+1} *an* $\sqrt{y}$ *zu berechnen, beruhend auf der vorhergehenden Näherung* a_n.

c) *Wir möchten die Quadratwurzel von 10 berechnen, also starten wir mit einem Rechteck der Seitenlängen* $a_0 = 10$ *und* $b_0 = 1$*. Rechnen wir die nächstbeste Näherung* a_1 *an* $\sqrt{10}$ *aus. Dazu benutzen wir die Formel aus b):*

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{a_0 + \frac{y}{a_0}}{2} = \frac{10 + \frac{10}{10}}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

Berechnen wir die nächstbeste Näherung a_2*, wieder mit Hilfe der in b) gefundenen Formel:*

$$a_2 = \frac{a_1 + \frac{y}{a_1}}{2} = \frac{5.5 + \frac{10}{5.5}}{2} = 3.659$$

Berechnen wir nun auch in einem dritten Iterationsschritt die Näherung a_3:

$$a_3 = \frac{a_2 + \frac{y}{a_2}}{2} = \frac{3.659 + \frac{10}{3.659}}{2} = 3.196$$

Verglichen mit dem (gerundeten) Taschenrechnerresultat 3.162 sehen wir, dass wir uns in nur drei Schritten auf ca. 1% genau dem eigentlichen, irrationalen Wert von $\sqrt{10}$ genähert haben – nicht schlecht für ein jahrtausendaltes Verfahren!!!

d) *Die **Induktionsannahme** lautet der Aufgabe gemäss:*

$$a_n > \sqrt{y} \text{ und } b_n < \sqrt{y} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } y > 1$$

***Induktionsverankerung** $n = 0$:*
$a_0 > \sqrt{y}$ *und* $b_0 < \sqrt{y}$ *sind klar erfüllt, da ja* $y > 1$ *vorausgesetzt wird und das Rechteck am Anfang die Seitenlängen* $a_0 = y$ *bzw.* $b_0 = 1$ *besitzt.*

***Induktionsschritt** $n \to n + 1$:*
Angenommen $a_n > \sqrt{y}$ *und* $b_n < \sqrt{y}$ *seien erfüllt. Dann müssen wir zeigen, dass* $a_{n+1} > \sqrt{y}$ *und* $b_{n+1} < \sqrt{y}$ *gilt. Dem Tipp in der Aufgabe gemäss sollen wir die Ungleichung*

$$\left(a_n - \sqrt{y}\right)^2 > 0$$

betrachten. Diese ist erfüllt, weil wir ja für den Induktionsschritt $a_n > \sqrt{y}$ *vorausgesetzt haben. Multiplizieren wir – wieder dem Tipp gemäss – die linke Seite aus und formen sie geschickt um:*

$$a_n^2 - 2\sqrt{y}a_n + y > 0$$

$$a_n^2 + y > 2\sqrt{y}a_n$$

$$a_n + \frac{y}{a_n} > 2\sqrt{y}$$

$$\frac{a_n + \frac{y}{a_n}}{2} > \sqrt{y}$$

Dabei entspricht der letzte Ausdruck gerade a_{n+1}*. Also:*

$$\frac{a_n + \frac{y}{a_n}}{2} = a_{n+1} > \sqrt{y}$$

Damit haben wir $a_{n+1} > \sqrt{y}$ *gezeigt. Gleichzeitig ist auch* $b_{n+1} < \sqrt{y}$ *erfüllt, weil ja* $a_{n+1} \cdot b_{n+1} = y$ *und* $a_{n+1} > \sqrt{y}$*. Somit haben wir bewiesen, dass – für einen beliebigen Iterationsschritt* n *– die Seitenlängen* $a_n > \sqrt{y}$ *und* $b_n < \sqrt{y}$ *sind. Das bedeutet, dass das Heron-Verfahren niemals die exakte Wurzel* $\sqrt{y}$ *liefern wird, sondern immer nur eine Näherung.*

Aufgabe 3: Geschwindigkeit des Heron-Verfahrens

In dieser Aufgabe wollen wir erkunden, warum es sich für die alten Zivilisationen gelohnt hat, das Heron-Verfahren zu verwenden. Wir werden zeigen, dass das Heron-Verfahren sehr schnell eine grössere Genauigkeit liefert.

Wir berechnen $\sqrt{2}$ mit dem in der letzten Aufgabe eingeführten Verfahren.

Startwerte: $a_1 = 2, b_1 = 1$

Iterationsschritt: $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{2}{a_{n+1}}$

a) Berechnen Sie die ersten 5 Iterationsschritte sowie den Fehlerterm $err_n = a_n - b_n$.

b) Begründen Sie anhand des Fehlerterms, wie schnell sich die Variablen a_n und b_n immer mehr dem Zielwert $\sqrt{2}$ annähern.

In den nächsten Teilaufgaben werden wir schrittweise eine Rekurrenzungleichung für den Fehlerterm err_n herleiten. Das Resultat wird jeweils im nächsten Teilschritt verwendet.

Um die Notation zu vereinfachen, führen wir zwei neue Folgen p_n und q_n ein. Sie sind definiert durch $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, und somit gilt auch $b_n = \frac{2q_n}{p_n}$, d.h., p_n und q_n sind die Nenner der Seitenlängen des Rechtecks.

c) Zeigen Sie durch Induktion, dass $q_n \leq p_n$ für alle n gilt. Diese Ungleichung drückt aus, dass der Nenner von a_n immer kleiner ist als der von b_n.
Tipp: Es ist einfacher zu zeigen, dass $0 \leq p_n - q_n$ gilt.

d) Stellen Sie den Fehlerterm err_n durch p_n und q_n dar.

e) Zeigen Sie mittels Induktion, dass der Zähler von err_n für alle $n > 1$ immer genau 1 ist.

f) Stellen Sie eine Relation zwischen err_n und q_{n+1} her.

g) Zeigen Sie, dass $err_{n+1} \leq \frac{1}{4} err_n^2$ für ein beliebiges n gilt.

Lösung:

a) *1. Schritt:* $a_1 = 2, b_1 = 1, err_1 = 2 - 1 = 1$

2. Schritt: $a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}, b_2 = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}, err_2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$

3. Schritt: $a_3 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12}, b_3 = \frac{12 \cdot 2}{17} = \frac{24}{17}, err_3 = \frac{17}{12} - \frac{24}{17} = \frac{1}{204}$

4. Schritt: $a_4 = \frac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408}, b_4 = \frac{408 \cdot 2}{577} = \frac{816}{577}, err_4 = \frac{577}{408} - \frac{816}{577} = \frac{1}{235416}$

5. Schritt: $a_5 = \frac{\frac{577}{408}+\frac{816}{577}}{2} = \frac{665857}{470832}, b_5 = \frac{470842 \cdot 2}{665857} = \frac{941664}{665857},$

$err_5 = \frac{665857}{470842} - \frac{941664}{665857} = \frac{1}{313506783024}$

b) *Das iterative Verfahren hat die Eigenschaft, dass in jedem Iterationsschritt $b_n < \sqrt{2} < a_n$ gilt (vgl. auch Aufgabe 2d). Somit können a_n und b_n maximal um err_n von $\sqrt{2}$ abweichen.*

Anhand unserer Berechnungen können wir feststellen, dass err_n stehts ein Bruch mit dem Zähler 1 ist. Zudem vergrössert sich der Nenner von err_n in jedem Schritt um mindestens eine Stelle. Das bedeutet, dass sich auch die Genauigkeit um mindestens eine Stelle verbessert.

Tatsächlich ist der Algorithmus aber noch viel schneller. Die Ordnung des Nenners wird in jedem Iterationsschritt ungefähr verdoppelt, da er immer das Produkt der Nenner von a_n und b_n ist. Das bedeutet, dass die Approximation der Wurzel von 2 in jedem Schritt ungefähr auf doppelt so viele Stellen nach dem Komma genauer wird.

c) *Wir stellen zuerst eine Induktionsgleichung für p_n und q_n auf.*

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\frac{p_n}{q_n} + \frac{2q_n}{p_n}}{2} = \frac{p_n^2 + 2q_n^2}{2p_n q_n}$$

Daraus folgt natürlich $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2$ und $q_{n+1} = 2p_n q_n$. Damit können wir nun durch vollständige Induktion den Beweis führen.

***Induktionsverankerung** $n = 1$:*
Es gilt $p_1 = 2$ und $q_1 = 1$ und somit auch $0 \leq p_1 - q_1$.

***Induktionsschritt** $n \to n + 1$:*
Wir nehmen an, dass die Vermutung für n gilt und zeigen Sie für $n + 1$:

$$p_{n+1} - q_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2 - 2p_n q_n = (p_n^2 - 2p_n q_n + q_n^2) + q_n^2 = (p_n - q_n)^2 + q_n^2$$

Der Ausdruck rechts ist sicher positiv, da er eine Summe von zwei positiven Zahlen ist. Damit ist die Aussage für alle n bewiesen.

d) *Wir verwenden die Beziehung $err_n = a_n - b_n$:*

$$err_n = \frac{p_n}{q_n} - \frac{2q_n}{p_n} = \frac{p_n^2 - 2q_n^2}{p_n q_n}$$

e) *Wir müssen zeigen, dass $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$ für alle $n > 1$ gilt. Wir verwenden wieder die vollständige Induktion.*

***Induktionsverankerung** $n = 1 \,/\, n = 2$:*
Es gilt $err_1 = 1$, also ist die Vermutung erfüllt, jedoch gilt auch $p_1^2 - 2q_1^2 = 2$. Der Grund dafür ist, dass für den Index n = 1 der Bruch err_1 gekürzt werden kann. Wir verankern deshalb bei n = 2 und zeigen, dass err_n für jedes n > 1 den Nenner 1 besitzt. Es gilt $p_2 = 3$ und $q_2 = 2$ und somit $p_2^2 - 2q_2^2 = 9 - 8 = 1$.

***Induktionsschritt** $n \to n + 1$:*
Wir verwenden wieder die Induktionsformeln für p_n und q_n.

$$p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = (p_n^2 + 2q_n^2)^2 - 2(2p_n q_n)^2 = p_n^4 + 4p_n^2 q_n^2 + 4q_n^4 - 8p_n^2 q_n^2$$

$$= p_n^4 - 4p_n^2 q_n^2 + 4q_n^4 = (p_n^2 - 2q_n^2)^2 = 1^2 = 1$$

Da wir nun gezeigt haben, dass der Nenner von err_n immer 1 ist, können wir die Formel aus d) zu $err_n = \frac{1}{p_n q_n}$ vereinfachen.

f) *Wir haben bereits* $q_{n+1} = 2q_n p_n$ *und* $err_n = \frac{1}{p_n q_n}$ *gezeigt. Daraus folgt nach Ersetzen von* $p_n q_n$ *in einer der Gleichungen die Beziehung:*

$$q_{n+1} = \frac{2}{err_n}$$

g) *Wir verwenden jetzt alle Resultate aus den vorherigen Teilaufgaben, um eine Rekurrenzungleichung aufzustellen.*

$$err_{n+1} = \frac{1}{p_{n+1}q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_{n+1}^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{err_n}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{err_n^2}} = \frac{err_n^2}{4} = \frac{1}{4}err_n^2$$