

Grundlagen der Mathematik 1: Analysis – Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 7. Dezember bis 16:00 Uhr

Damit ihr mehr Zeit für die Vorbereitung auf die Zwischenklausur habt, hat das Übungsblatt diesmal nur 3 Aufgaben.

- (1) (a) Berechne den Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2023}$.
- (b) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 + 2iz + 2 - 4i = 0$.
- (c) Bestimme und skizziere die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die $2 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} \frac{1}{z} = 1$ gilt.

- (2) (a) Berechne $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| 3 + \frac{1}{n} + i^n \right|^2$.
- (b) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei beschränkte Folgen positiver Zahlen. Zeige, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

und gib ein Beispiel dafür an, dass hier im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

- (3) Untersuche die folgenden Mengen auf Abzählbarkeit:
- (a) die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathbb{Q} ;
- (b) die Menge aller Teilmengen von \mathbb{N} (also die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ von \mathbb{N}).