Prof. Dr. M. Schulze und Raul Epure — Sommersemester 2019

Einführung in die Topologie
Blatt 3

Abgabetermin: Dienstag, 14.05.2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 9. Sei X eine überabzählbare Menge und $\mathscr{T}$ die Komplement-abzählbar Topologie auf X. Zeigen Sie:

(a) X ist zusammenhängend.

(b) X ist kein Hausdorff-Raum.

(c) Eine Menge $K \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn K eine endliche Menge ist.

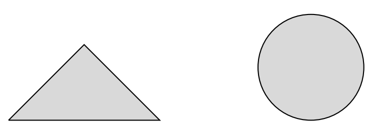
Aufgabe 10. Seien X, Y topologische Räume mit Topologien $\mathscr{T}_X$ und $\mathscr{T}_Y$. Wir nennen einen topologischen Raum **irreduzibel**, wenn es keine abgeschlossenen Mengen $A, B \subsetneq X$ mit $X = A \cup B$ gibt. Zeigen Sie:

(a) Ist X irreduzibel, so ist X zusammenhängend.

(b) X ist genau dann irreduzibel, wenn für alle $U \in \mathscr{T}_X \setminus \{\emptyset\}$ gilt, dass $X = \overline{U}$.

(c) Ist X irreduzibel, $f : X \to Y$ stetig und surjektiv, so ist Y irreduzibel.

Aufgabe 11. Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck D mit Schenkellänge $\sqrt{2}$, sowie Basislänge 2, und ein abgeschlossener Kreis K mit Radius 1 im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass D homöomorph zu K ist.



D $\qquad$ K

Aufgabe 12. Im Folgenden versehen wir $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Topologie. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn der Graph

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

wegzusammenhängend ist. Mit anderen Worten: Wir können den Graphen von f zeichnen ohne den Stift abzulegen.