Theorie der Informatik

M. Helmert, G. Röger
F. Pommerening
Frühjahrssemester 2015

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Übungsblatt 11

Abgabe: Mittwoch, 13. Mai 2015

Anmerkung: Für Abgaben, die ausschliesslich mit LaTeX erstellt wurden, gibt es einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie nur die resultierende PDF-Datei bzw. einen Ausdruck davon ab.

Aufgabe 11.1 (Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit, 0.5+0.5+1+1+1 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Geben Sie einen kurzen Beweis (1 Satz) oder ein Gegenbeispiel an. Sie dürfen alle Ergebnisse der Vorlesung verwenden.

(a) Jede entscheidbare Sprache ist vom Typ 0.

(b) Wenn A entscheidbar ist, ist auch $\bar{A}$ entscheidbar.

(c) Jede Sprache, die von einer Turingmaschine akzeptiert wird, ist entscheidbar.

(d) Jede Sprache, die durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden kann, ist entscheidbar.

(e) Jede entscheidbare Sprache ist kontextfrei.

Aufgabe 11.2 (Transitivität von Reduktionen, 1 Punkt)
Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B und C: Wenn $A \leq B$ und $B \leq C$, dann auch $A \leq C$.

Aufgabe 11.3 (Leerheitsproblem, 2 Punkte)
Das *Leerheitsproblem* für allgemeine Grammatiken (d.h. Typ-0-Grammatiken) ist definiert als:

LEERHEIT: Gegeben eine allgemeine Grammatik G, ist $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?

Beweisen Sie, dass LEERHEIT unentscheidbar ist.

Hinweise: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass man mit einer berechenbaren Funktion zu jeder gegebenen Typ-0-Grammatik G die Kodierung einer DTM M_G konstruieren kann, für die $\mathcal{L}(M_G) = \mathcal{L}(G)$ gilt. Ausserdem kann man mit einer berechenbaren Funktion zu jeder gegebenen DTM M eine Typ-0-Grammatik G_M konstruieren, für die $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G_M)$ gilt.
Wenden Sie den Satz von Rice in geeigneter Weise an, um die Unentscheidbarkeit zu zeigen.

Aufgabe 11.4 (Unentscheidbare Grammatik-Probleme, 1.5+1.5 Punkte)
Das *Äquivalenzproblem* und das *Schnittproblem* für allgemeine Grammatiken sind definiert als:

- ÄQUIVALENZ: Gegeben zwei allgemeine Grammatiken G_1 und G_2, ist $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)$?
- SCHNITT: Gegeben zwei allgemeine Grammatiken G_1 und G_2, gilt $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset$?

(a) Beweisen Sie, dass ÄQUIVALENZ unentscheidbar ist, indem Sie LEERHEIT darauf reduzieren.

(b) Beweisen Sie, dass SCHNITT unentscheidbar ist, indem Sie LEERHEIT darauf reduzieren.

Hinweis: Sie dürfen die Unentscheidbarkeit von LEERHEIT hier natürlich auch annehmen, wenn Sie Aufgabe 11.3 nicht gelöst haben.

Aufgabe 11.5 (Satz von Rice, 1 Bonuspunkt)

Bei welchen der folgenden Sprachen zeigt der Satz von Rice, dass die Sprache unentscheidbar ist? Geben Sie für Sprachen, bei denen der Satz von Rice verwendet werden kann, jeweils die Teilmenge von Turing-berechenbaren Funktionen $\mathcal{S}$ an, für die Sie den Satz anwenden.

Hinweis: Sie müssen keine Beweise angeben. Wenn der Satz von Rice anwendbar ist, geben Sie die Menge $\mathcal{S}$ an. Andernfalls geben Sie eine kurze Begründung (1 Satz) an, warum der Satz von Rice nicht anwendbar ist.

(a) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält für keine Eingabe mit einer gültigen Ausgabe } \}$

(b) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ berechnet die Nachfolgerfunktion oder Vorgängerfunktion } \}$

(c) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ benötigt eine gerade Anzahl von Schritten auf der Eingabe } \texttt{0011} \}$

(d) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{Keine Eingabe von } M_w \text{ führt zu einer gültigen Ausgabe, die } \texttt{0} \text{ enthält } \}$