3. Unendliche Mengen

Wir untersuchen nun unendliche Mengen. Lediglich gestützt auf den Begriff der Bijektion entdecken wir eine unerwartet reichhaltige Welt, mit schwierigen bis unlösbaren Fragen über die Größenunterschiede im Unendlichen.

Dedekind-Unendlichkeit

Wir hatten eine Menge A als endlich definiert, falls es eine natürliche Zahl n und eine Bijektion $f : A \to \{ 1, \ldots, n \}$ gibt. Anschaulich ist eine solche Bijektion eine Zählung $f(1), \ldots, f(n)$ der Elemente von A. Die Definition ist für sich genommen sehr klar, und sie ist auch die in der heutigen axiomatischen Mengenlehre bevorzugte Definition der Endlichkeit. Es gibt aber auch einen alternativen Weg, der die Verwendung der natürlichen Zahlen vollkommen vermeidet und alles aus dem Funktionsbegriff heraus entwickelt. Hierzu wird das Schubfachprinzip an die Spitze gestellt. Wir wissen, dass für eine endliche Menge A eine Injektion $f : A \to A$ automatisch bijektiv ist. Für unendliche Mengen ist dies anders. Das einfachste Beispiel ist vielleicht die Nachfolgerfunktion $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $S(n) = n + 1$ für alle n. Diese Funktion ist injektiv, aber nicht bijektiv. Die automatische Bijektivität einer injektiven Transformation unterscheidet die endlichen Mengen von den unendlichen Mengen. Diese Überlegungen motivieren:

Definition *(Dedekind-Unendlichkeit)*

Eine Menge A heißt *Dedekind-unendlich*, falls es eine Injektion $f : A \to A$ gibt, die nicht surjektiv ist. Andernfalls heißt A *Dedekind-endlich*.

Eine äquivalente Formulierung der Dedekind-Unendlichkeit ist: Es gibt eine Bijektion zwischen A und einer echten Teilmenge B von A. Die Dedekind-Endlichkeit bedeutet, dass jede Injektion $f : A \to A$ eine Bijektion ist. Dies ist eine Version des Schubfachprinzips.

Die beiden Endlichkeits- bzw. Unendlichkeitsdefinitionen erweisen sich als äquivalent. Hierzu beweisen wir zunächst:

Satz *(Einbettbarkeit der natürlichen Zahlen)*

Sei A eine Menge. Dann sind äquivalent:

(a) A ist Dedekind-unendlich.

(b) Es gibt eine Injektion $g : \mathbb{N} \to A$.

Beweis

(a) impliziert (b):

Sei $f : A \to A$ injektiv, aber nicht surjektiv. Dann gibt es ein $a_0 \in A$, das nicht im Wertebereich $f[A] = \{ f(a) \mid a \in A \}$ von f liegt. Wir betrachten nun den Orbit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von a_0 unter f, d. h. die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Da f injektiv ist, ist $a_n \neq a_m$ für alle $n \neq m$ mit $n, m \geq 1$. Da a_0 nicht im Wertebereich von f liegt, ist zudem $a_n \neq a_0$ für alle $n > 0$. Damit ist $g = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Injektion von $\mathbb{N}$ nach A.

© Oliver Deiser

(b) impliziert (a):

Sei $g : \mathbb{N} \to A$ injektiv. Wir definieren zwei Funktionen $f_1 : g[\mathbb{N}] \to A$ und $f_2 : A - g[\mathbb{N}] \to A$ durch

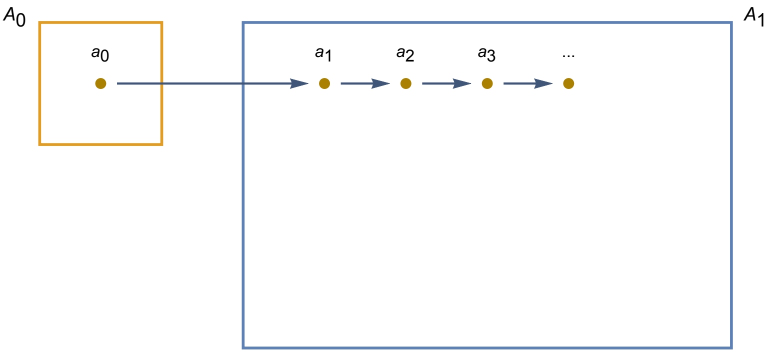
$$f_1(g(n)) = g(n+1) \quad \text{für alle } n \geq 0,$$

$$f_2(a) = a \quad \text{für alle } a \in A - g[\mathbb{N}].$$

Weiter sei

$$f = f_1 \cup f_2,$$

sodass $f : A \to A$ mit $f(a) = f_1(a)$ für $a \in g[\mathbb{N}]$ und $f(a) = f_2(a)$ sonst. Die Funktion f ist als Vereinigung zweier injektiver Funktionen mit disjunkten Wertebereichen injektiv. Weiter gilt $f[A] = A - \{ a_0 \}$, sodass f nicht surjektiv ist.



Ist $f : A \to A$ injektiv, nicht surjektiv, $A_0 = A - f[A]$, $A_1 = f[A]$, so ist der Orbit jedes Elements a_0 von A_0 unter f eine Kopie von $\mathbb{N}$ in A

Die Dedekind-unendlichen Mengen sind also genau die Mengen, die eine „Kopie“ der natürlichen Zahlen enthalten: Ist $g : \mathbb{N} \to A$ injektiv, so können wir die Folge $g(0), g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots$ als eine Version von $\mathbb{N}$ innerhalb von A betrachten. Auf diesem Abbild von $\mathbb{N}$ können wir die Nachfolgerfunktion bilden, und dies liefert zusammen mit der Identität auf allen anderen Elementen eine Injektion, die nicht bijektiv ist. Umgekehrt ist der Orbit jedes ausgelassenen Elements einer nicht surjektiven Injektion $f : A \to A$ eine Kopie von $\mathbb{N}$.

Mit Hilfe der Einbettung der natürlichen Zahlen in eine Dedekind-unendliche Menge zeigen wir nun:

Satz *(Äquivalenz der Endlichkeits-Definitionen)*

Sei A eine Menge. Dann sind äquivalent:

(a) A ist endlich.

(b) A ist Dedekind-endlich.

Beweis

(a) impliziert (b):

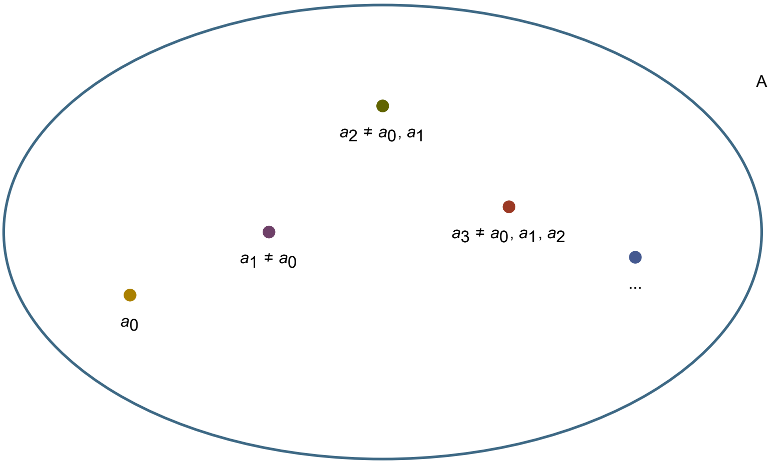
Sei A endlich, und sei $f : A \to A$ eine Injektion. Dann ist f bijektiv nach dem Schubfachprinzip. Dies zeigt, dass A Dedekind-endlich ist.

(b) impliziert (a):

Wir zeigen die Implikation indirekt. Sei also A eine unendliche Menge. Wir konstruieren eine Injektion $g : \mathbb{N} \to A$ und zeigen damit, dass A Dedekind-unendlich ist. Sei hierzu $a_0 \in A$ beliebig. Wir definieren rekursiv

$$a_{n+1} \;=\; \text{„ein } a \in A \text{ mit } a \neq a_i \text{ für alle } i = 0, \ldots, n\text{“} \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Ein derartiges Element a in A existiert für jedes $n \geq 0$, denn aufgrund der Unendlichkeit von A ist $A \neq \{ a_0, \ldots, a_n \}$. Nach Konstruktion ist $g = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Injektion von $\mathbb{N}$ nach A.



Aus einer unendlichen Menge A können wir rekursiv eine injektive Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ausheben, durch eine „unendliche Auswahl“ unverbrauchter Elemente

Der zweite Teil des Beweises weist eine Besonderheit auf: Wir müssen unendlich oft aus einer nichtleeren Menge ein im Allgemeinen nicht weiter spezifiziertes Element auswählen. Im Bild gesprochen ziehen wir aus einer Urne mit unendlich vielen Kugeln unendlich oft eine Kugel ohne Zurücklegen. Dass dieses Vorgehen hier und an zahlreichen anderen Stellen erlaubt ist, regeln die Axiome der Mengenlehre. Wir werden darauf noch zurückkommen, weisen aber bereits an dieser Stelle darauf hin. Der Beweis des Satzes besitzt, so einfach und klar er erscheinen mag, eine gewisse grundlagentheoretische Komplexität.

 © Oliver Deiser

Abzählbar unendliche Mengen

Sei A eine unendliche Menge. Nach unseren Ergebnissen existiert eine Injektion von $\mathbb{N}$ nach A. Eine natürliche Frage ist, ob es auch eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A gibt. Wir definieren hierzu:

Definition *(abzählbar, abzählbar unendlich)*

Sei A eine Menge. Dann heißt A *abzählbar unendlich*, falls es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt. Weiter heißt A *abzählbar*, falls A endlich oder abzählbar unendlich ist.

Schreiben wir eine Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ als Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so bedeutet die abzählbare Unendlichkeit von A, dass wir alle Elemente von A in der Form

(+) $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$

ohne Wiederholungen aufzählen können. In dieser Form ist der Begriff der Abzählbarkeit besonders anschaulich. Die Elemente von A können mit Hilfe der natürlichen Zahlen nummeriert, durchgezählt oder aufgelistet werden. Wir präzisieren in diesem Kontext noch einige Sprechweisen:

Definition *(Aufzählung)*

Sei A eine Menge. Eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ nennen wir auch eine *(unendliche) Aufzählung* von A. Für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt f(n) das *n-te Element* und n eine *Position* von f(n) in der Aufzählung. Ist f bijektiv, so heißt f eine *injektive Aufzählung* oder eine *Aufzählung ohne Wiederholungen.*

Ist A nichtleer, so existiert eine Aufzählung von A genau dann, wenn A endlich oder abzählbar unendlich ist. Weiter können wir aus einer Aufzählung einer unendlichen Menge Wiederholungen streichen, wodurch eine injektive Aufzählung (also eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A) entsteht.

Beispiele

(1) Die Menge $\mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich: Die Folge 0, 1, 2, …, n, … ist eine Aufzählung von $\mathbb{N}$.

(2) Die Menge der Primzahlen ist abzählbar unendlich.

(3) Eine Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar. Eine unendliche Teilmenge einer abzählbar unendlichen Menge abzählbar unendlich.

Ist die Unendlichkeit einer Menge A klar, so sagen wir im Folgenden oft nur „A ist abzählbar“ statt „A ist abzählbar unendlich“.

Wir betrachten nun weitere Beispiele für abzählbare Mengen, die zum Teil auch den Rang von Sätzen beanspruchen können.

1. Die ganzen Zahlen

Die Menge $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn

$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots,\ n,\ -n,\ \ldots$

ist eine Aufzählung von $\mathbb{Z}$.

2. Paare natürlicher Zahlen

Die Menge $\mathbb{N}^2$ aller Paare natürlicher Zahlen ist abzählbar. Zum Beweis zählen wir das Gitter $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf, indem wir seine endlichen Diagonalen betrachten und aneinanderfügen:

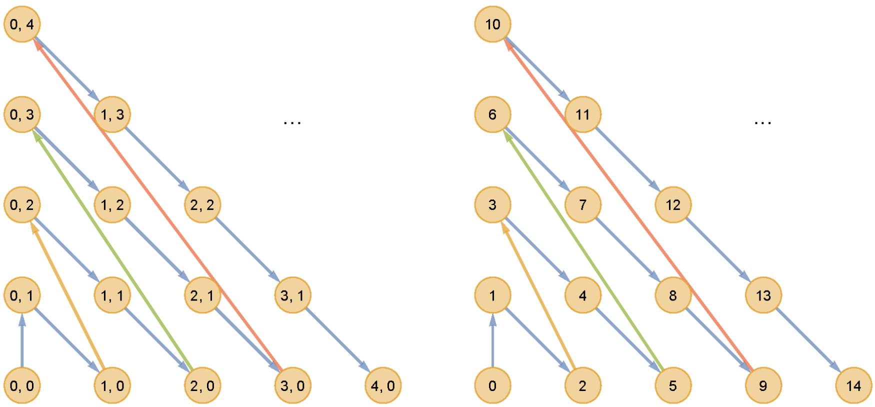
$(0, 0),\ (0, 1),\ (1, 0),\ (0, 2),\ (1, 1),\ (2, 0),\ (0, 3),\ (1, 2),\ (2, 1),\ (3, 0),\ \ldots$

Diese injektive Aufzählung von $\mathbb{N}^2$ ist als *Cantorsche Diagonalaufzählung* bekannt. Sie entspricht der *Cantorschen Paarung* $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$\pi(n, m) = \frac{(n + m)(n + m + 1)}{2} + n \quad \text{für alle } (n, m) \in \mathbb{N}^2.$$

Für alle $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ ist $\pi(n, m)$ die eindeutige Position von (n, m) in der Diagonalaufzählung, d. h. die Diagonalaufzählung ist die Umkehrfunktion von π (Übung). Es ist bemerkenswert, dass sich die Positionen der Diagonalaufzählung durch ein einfaches Polynom zweiten Grades berechnen lassen.

Wir können die Diagonalaufzählung von $\mathbb{N}^2$ noch in einer etwas anderen Form beschreiben, die für das Folgende nützlich ist: Die Paare (n, m) auf einer Diagonalen von $\mathbb{N}^2$ haben ein konstantes „Gewicht" $k = n + m$. Jedem Gewicht k entsprechen nur endlich viele Paare (genauer sind es $k + 1$ viele). In der Diagonalaufzählung zählen wir die Elemente von $\mathbb{N}^2$ nach ihrem Gewicht auf.



Die Cantorsche Diagonalaufzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Rechts sind die Werte der Paarungsfunktion $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ eingetragen.

 © Oliver Deiser

3. Die rationalen Zahlen

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, denn für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es nur endlich viele Brüche $n/m \in \mathbb{Q}$ mit dem Gewicht $k = |n| + |m|$. Fügen wir die Brüche des Gewichts k für k = 0, 1, 2, … aneinander, so erhalten wir eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$. Diese Aufzählung besitzt Wiederholungen, die wir streichen können, um eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ zu erhalten.

4. Die algebraischen Zahlen

Die Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen ist abzählbar. Denn jede algebraische Gleichung hat höchstens endlich viele Nullstellen, und die algebraischen Gleichungen können wir wieder nach einem geeigneten Gewicht aufzählen. Geeignet ist zum Beispiel die Summe aus dem Grad und der Beträge aller (ohne Einschränkung ganzzahligen) Koeffizienten. Dieses Gewicht einer algebraischen Gleichung ist nach Dedekind auch als *Höhe* der Gleichung bekannt. So hat zum Beispiel die Gleichung

$$x^4 - 2x^3 + 3x - 4 = 0$$

die Dedekindsche Höhe 4 + 1 + 2 + 3 + 4 = 14 und höchstens vier reelle Nullstellen. Zu jeder Höhe h gibt es nur endlich viele Gleichungen der Höhe h. Hierzu ist es wichtig, den Grad in die Höhe mit aufzunehmen. Ansonsten hätten die unendlich vielen Gleichungen $x = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = 0$, … alle die Höhe 1.

5. Endliche Folgen natürlicher Zahlen

Die Menge $\mathrm{Seq} = \{ (a_1, \ldots, a_n) \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{N} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \}$ aller endlichen Folgen in $\mathbb{N}$ ist abzählbar. Denn die Folgen $(a_1, \ldots, a_n)$ in Seq lassen sich erneut nach einem geeigneten Gewicht, etwa $n + a_1 + \ldots + a_n$, aufzählen. Zu jedem Gewicht gibt es nur endlich viele Folgen mit diesem Gewicht.

Die Abzählbarkeit der Menge Seq verallgemeinert die Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^2$ in einer sehr starken Weise. Speziell ist für jedes $k \geq 1$ die Menge $\mathbb{N}^k$ aller k-Tupel in $\mathbb{N}$ abzählbar.

6. Die Universalbibliothek

Die ideelle Universalbibliothek, die alle in einem bestimmten endlichen oder abzählbar unendlichen Alphabet

a, b, c, …, A, B, C, …, 0, …, 9, ?, !, ;, (,), …, α, β, γ, …, א, ב, ג, …

geschriebenen Bücher enthält, ist abzählbar. Denn ein Buch ist eine endliche Folge in einem Alphabet, dessen Zeichen wir mit den natürlichen Zahlen durchnummerieren können. Damit ist dieses Beispiel lediglich eine eindrucksvolle Veranschaulichung der Abzählbarkeit aller endlichen Folgen in den natürlichen Zahlen.

Als allgemeinen Satz halten wir fest:

Satz *(abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen)*

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen, und sei

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Dann ist A abzählbar.

Beweis

Wir dürfen annehmen, dass alle A_n nichtleer sind. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir nun eine Aufzählung $(a_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ der Menge A_n. Weiter sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ die Cantorsche Diagonalaufzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, d. h. es gilt $\sigma = \pi^{-1}$ mit der Paarungsfunktion π. Dann ist $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung von A.

Die konstruierte Aufzählung von A erhalten wir, wenn wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Elemente von A_n in die Spalte n des Gitters $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eintragen und dann das Gitter diagonal aufzählen. Sind alle Mengen A_n abzählbar unendlich und paarweise disjunkt, so entsteht eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A, wenn wir die Spalten des Gitters ohne Wiederholungen füllen.

Im Beweis des Satzes taucht an versteckter Stelle wieder ein unendlicher Auswahlakt auf: Wir wählen unendlich oft eine unspezifizierte Aufzählung.

Überabzählbare Mengen

Unsere Diskussion lässt offen, ob nicht jede unendliche Menge abzählbar ist, sodass es, wie man vielleicht erwarten würde, im Unendlichen keine Größenunterschiede gibt. Dies ist aber nicht der Fall. Das fundamentale Ergebnis, das wie die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 Eingang in den Grundkreis der mathematischen Bildung gefunden hat, ist, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ im Gegensatz zu $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{A}$, Seq, … nicht mehr abzählbar sind. Wir definieren hierzu:

Definition *(überabzählbar)*

Eine Menge A heißt *überabzählbar*, falls A nicht abzählbar ist.

Das Herz der Theorie der überabzählbaren Mengen ist:

Satz *(Diagonalkonstruktion von Georg Cantor)*

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gibt es ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$x^* \neq x_n$ für alle $n \geq 0$.

Der folgende Beweis ist konstruktiv: Wir können x^* konkret angeben, wenn die Folgenglieder x_n bekannt sind. Die Idee ist, x^* schrittweise so zu lokalisieren, dass im n-ten Schritt $x^* \neq x_n$ sichergestellt wird. Wir weichen der Folge in diesem Sinne aus (um nicht zu sagen, dass wir sie austricksen).

Beweis

Wir schreiben in Dezimaldarstellung

$$x_0 = \pm m_0,\ a_{0,0}\ a_{0,1}\ a_{0,2}\ \dots$$

$$x_1 = \pm m_1,\ a_{1,0}\ a_{1,1}\ a_{1,2}\ \dots$$

$$x_2 = \pm m_2,\ a_{2,0}\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ \dots$$

$$\dots$$

$$x_n = \pm m_n,\ a_{n,0}\ a_{n,1}\ a_{n,2}\ \dots$$

$$\dots$$

mit Dezimalziffern $a_{n,m} \in \{0, \dots, 9\}$. (Dabei können wir im zweideutigen Fall irgendeine der beiden Dezimaldarstellungen von x_n verwenden.)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nun

$$d_n = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad d_{n,n} \neq 1, \\ 2 & \textit{falls} \quad d_{n,n} = 1. \end{cases}$$

Schließlich setzen wir, wieder in Dezimaldarstellung

$$x^* = 0, d_0\, d_1\, d_2 \dots d_n \dots$$

Dann ist x^* eine reelle Zahl, die eine eindeutige Dezimaldarstellung besitzt (da die Ziffern d_n nicht in 0 oder 9 terminieren). Nach Konstruktion ist die Darstellung von x^* für jedes n von der Darstellung von x_n verschieden. Aufgrund der Eindeutigkeit der Darstellung von x^* ist also $x^* \neq x_n$ für alle n.

Ein wichtiges Detail des Beweises ist die Definition der Nachkommaziffern von x^*. Wir können statt 1, 2 zum Beispiel auch 3, 7 verwenden. Nicht geeignet sind dagegen 0 und 1. Denn für $d_n \in \{0, 1\}$ ist nicht mehr garantiert, dass die Darstellung von x^* eindeutig ist.

Wir erhalten:

Korollar *(Überabzählbarkeit der reellen Zahlen)*

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis

Annahme, $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dann gibt es eine Aufzählung $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathbb{R}$. Ist nun x^* wie in der Diagonalkonstruktion, so ist x^* kein Element der Aufzählung, *Widerspruch*.

Wir können das Ergebnis kurz und ohne jede Verwendung von philosophisch belasteten Begriffen so zusammenfassen:

Jede Folge $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ reeller Zahlen lässt eine reelle Zahl aus.

Der Rest ist Interpretation. Und diese Interpretation hängt vom gewählten Rahmen ab, der letztendlich durch die Axiome der Mengenlehre gegeben wird. In diesem Rahmen lautet die Interpretation:

Es gibt Größenunterschiede im Unendlichen.

Untermauert wird diese Interpretation durch den folgenden bestechend allgemeinen Satz:

Satz *(Satz von Cantor)*

Sei A eine Menge, und sei $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Dann ist f nicht surjektiv.

Beweis

Wir definieren $D \in \mathcal{P}(A)$ durch

$$D = \{ a \in A \mid a \notin f(a) \}.$$

Dann ist D kein Element des Wertebereichs von f.

Beweis hierzu

Für alle $a \in A$ gilt nach Definition von D:

(+) $a \in D$ *genau dann, wenn* $a \notin f(a)$.

Annahme, es gibt ein $a^* \in A$ mit $D = f(a^*)$. Dann gilt nach (+) mit $a = a^*$:

$a^* \in D$ *genau dann, wenn* $a^* \notin D$,

Widerspruch.

Nach dem Satz markieren die wiederholten Potenzmengenbildungen

$$\mathbb{N},\ \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})),\ \ldots,\ \mathcal{P}^n(\mathbb{N}),\ \ldots$$

verschiedene Stufen des Unendlichen. Sie illustrieren auch die Bedeutung des axiomatischen Rahmens: Dieser Rahmen garantiert (oder genauer: postuliert), dass wir die sehr großen überabzählbaren Mengen $\mathcal{P}^n(\mathbb{N})$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ bilden können. Wir werden am Ende des Kapitels auf die Unendlichkeitsstufen dieser Folge noch einmal zurückkommen.

Der Beweis des Satzes zeigt die Idee der Diagonalisierung in ihrer vielleicht klarsten Form. Identifizieren wir Teilmengen von A mit 0-1-Folgen auf A, so definiert $f : A \to \mathcal{P}(A)$ eine (abstrakte) 0-1-Matrix. Der Austausch von 0 und 1 auf der Diagonalen liefert die Menge D. Anders formuliert: Jede quadratische 0-1-Matrix liefert durch Diagonalisierung eine 0-1-Folge, die keine Zeile (und keine Spalte) der Matrix ist. Das funktioniert auch im Unendlichen.

Der Satz von Cantor enthält die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen als Spezialfall. Denn man kann, was keineswegs trivial ist, zeigen, dass es eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und der Potenzmenge der natürlichen Zahlen gibt. Da nach dem Satz von Cantor keine Surjektion von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ existiert, gibt es auch keine Surjektion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Diese Argumentation benötigt keine Dezimaldarstellung reeller Zahlen.

Mächtigkeitsvergleiche

Licht ins Reich des Unendlichen bringt:

Definition *(Mächtigkeitsvergleiche)*

Seien A, B Mengen. Wir setzen

$|A| \leq |B|$ *falls* es gibt ein injektives $f : A \to B$

$|A| = |B|$ *falls* es gibt ein bijektives $f : A \to B$

$|A| < |B|$ *falls* $|A| \leq |B|$ und $|A| \neq |B|$

Wir sagen entsprechend, dass *die Mächtigkeit von* A *kleinergleich (gleich, kleiner) der Mächtigkeit von* B ist.

In der Definition wird die Mächtigkeit nur relational (zwischen zwei Mengen) definiert, aber nicht festgelegt, was die Mächtigkeit einer Menge A an sich ist. Dies ist in der Mengenlehre durch Definition der transfiniten Kardinalzahlen möglich, die kanonische Repräsentanten für unendliche Mengen darstellen.

In der neuen Mächtigkeitsnotation bedeutet:

$|A| < |\mathbb{N}|$ A ist endlich

$|A| \leq |\mathbb{N}|$ A ist abzählbar

$|\mathbb{N}| = |A|$ A ist abzählbar unendlich

$|\mathbb{N}| \leq |A|$ A ist (Dedekind-)unendlich

$|\mathbb{N}| < |A|$ A ist überabzählbar

Es gilt

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = |\mathrm{Seq}|.$$

Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ liest sich nun schlicht als

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|.$$

Über die Struktur der Mächtigkeiten im Unendlichen lassen sich viele Fragen stellen, und die meisten von ihnen sind alles andere als einfach zu beantworten. Ein wichtiges Beispiel ist:

Satz *(Satz von Cantor-Bernstein)*

Seien A, B Mengen mit $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$. Dann gilt $|A| = |B|$.

Gegeben sind zwei Injektionen von A nach B bzw. von B nach A. Diese Injektionen müssen wir zu einer Bijektion zwischen A und B verschmelzen. Wir zeigen hierzu folgenden für sich interessanten Hilfssatz, der Methoden unserer Analyse Dedekind-unendlicher Mengen aufgreift:

Satz *(Zwischenmengensatz)*

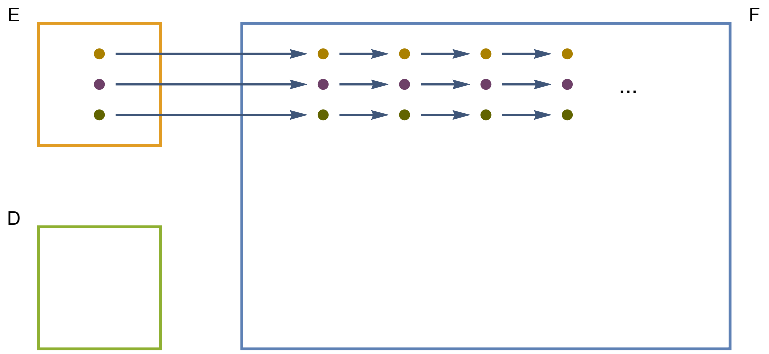
Seien D, E, F paarweise disjunkte Mengen, und sei $h : D \cup E \cup F \to F$ bijektiv. Dann gibt es eine Bijektion $h^* : E \cup F \to F$.

Beweis

Zur Konstruktion von h^* betrachten wir alle Orbits $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (h^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ von $a \in E$ unter h. Auf diesen injektiven und paarweise disjunkten Orbits verschieben wir um 1, d. h. wir setzen

$$h^*(a_n) = a_{n+1} = h(a_n) \quad \text{für alle } a \in E \text{ und } n \geq 0.$$

Für alle anderen Elemente b von $E \cup F$ sei $h^*(b) = b$. Dann ist die Funktion $h^* : E \cup F \to F$ bijektiv (Übung).



Wir betrachten alle Orbits von Elementen in E unter der Bijektion $h : D \cup E \cup F \to F$, also den Orbit der Menge E. Auf diesem Mengen-Orbit wenden wir h an. Auf dem Rest von $E \cup F$ verwenden wir die Identität. Es entsteht eine Bijektion $h^* : E \cup F \to F$.

Der Beweis erinnert an die Einbettung von $\mathbb{N}$ in eine Dedekind-unendliche Menge. Auch dort hatten wir mit einer Orbit-Verschiebung argumentiert. Das „D“ im Beweis steht sowohl für „Dedekind“ als auch für „delete“, da die Menge D aus $D \cup E \cup F$ entfernt wird. Ist $|D \cup E \cup F| = |F|$, so ist die Zwischenmenge $E \cup F$ der beiden Mengen ebenfalls gleichmächtig zu den beiden Mengen.

Nun können wir ohne weitere Schwierigkeiten zeigen:

Beweis des Satzes von Cantor-Bernstein

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ injektiv. Wir betrachten die Zerlegung

$$F = g[f[A]], \quad E = g[B] - F, \quad D = A - g[B]$$

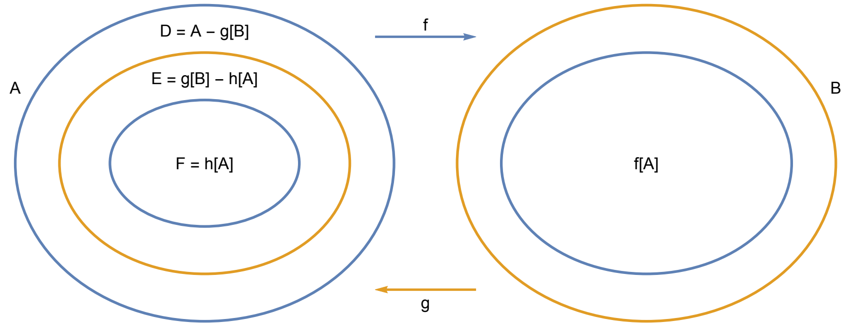
von A und die Bijektion

$$h = g \circ f : D \cup E \cup F \to F.$$

Nach dem Zwischenmengensatz gilt

$$|B| = |g[B]| = |E \cup F| = |F| = |h[A]| = |A|.$$

 © Oliver Deiser



Zum Beweis des Satzes von Cantor-Bernstein mit der Bijektion $h = g \circ f$ von A nach F. Gleichfarbige Mengen sind nach Voraussetzung gleichmächtig. Die Gleichmächtigkeit aller beteiligten Mengen ergibt sich aus dem Zwischenmengensatz.

Der Satz von Cantor-Bernstein wurde von Cantor vermutet und von Dedekind und Bernstein unabhängig voneinander bewiesen. Historisch korrekter (aber umständlicher) wäre „Satz von Cantor-Dedekind-Bernstein".

Der Satz erleichtert in vielen Fällen den Beweis der Gleichmächtigkeit zweier Mengen. Wollen wir $|A| = |B|$ zeigen, so können wir in zwei Schritten

$|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$

zeigen. Die Konstruktion zweier Injektionen ist oft einfacher als die Konstruktion einer Bijektion. Die Situation ist vergleichbar mit

$A = B$ *genau dann, wenn* $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ für Mengen A, B,

$A \leftrightarrow B$ *genau dann, wenn* $A \to B$ und $B \to A$ für Aussagen A, B.

Ein Beispiel ist die Mächtigkeitsaussage $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, die sich mit Hilfe des Satzes von Bernstein aus zwei Injektionen $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ ergibt (Übung).

Ein weiteres fundamentales Ergebnis der Mächtigkeitstheorie ist:

Satz *(Vergleichbarkeitssatz von Cantor-Zermelo)*

Seien A, B Mengen. Dann gilt $|A| \leq |B|$ oder $|B| \leq |A|$.

Dieser Satz ist weitaus schwieriger zu beweisen als der Satz von Cantor-Bernstein. Im Endlichen ist die Aussage durch die Vergleichbarkeit natürlicher Zahlen klar: „Zähle die Elemente der Mengen und vergleiche die Ergebnisse." Ein Zählen im Unendlichen ist möglich, aber die hierzu benötigten transfiniten Zahlen sind nicht leicht zu definieren. Alternativ lässt sich der Vergleichbarkeitssatz mit Hilfe eines allgemeinen ordnungstheoretischen Maximal-Prinzips beweisen. Wir kommen bei der Diskussion des Auswahlaxioms und des Zornschen Lemmas darauf zurück.

Die Kontinuumshypothese

Den Satz von Cantor können wir ansprechend in der folgenden Mächtigkeitsform notieren:

$|A| < |\mathcal{P}(A)|$ für alle Mengen A. *(Satz von Cantor, Umformulierung)*

Denn aus dem Satz von Cantor folgt, dass $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$, und zudem gilt auch $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$, denn die Funktion $f : A \to \mathcal{P}(A)$ mit $f(a) = \{ a \}$ für alle $a \in A$ ist injektiv. Wiederholte Anwendung des Satzes auf die Menge der natürlichen Zahlen liefert

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \ldots$$

Auf den durch diese Folge definieren Unendlichkeitsstufen finden sich einige bekannte Mengen. Man kann zeigen (vgl. die Übungen):

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |{}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n| = |{}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}|,$$

$$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}|.$$

Die Menge ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ aller reellen Folgen ist also auf der Unendlichkeitsstufe $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zu finden, während die Menge ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ aller reellen Funktionen auf der größeren Stufe $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ lokalisiert ist.

Diese Überlegungen werfen die Frage auf, wie groß die Unendlichkeitssprünge in der Folge

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \ldots$$

sind. Nach der Entdeckung der Größenunterschiede im Unendlichen und den subtilen Konstruktionen von Bijektionen wird es nun noch dramatischer. Wir formulieren:

Kontinuumshypothese

Es gibt keine Menge A mit $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$ $(= |\mathcal{P}(\mathbb{N})|)$.

Allgemeine Kontinuumshypothese

Sei M eine unendliche Menge. Dann gibt es keine Menge A mit

$$|M| < |A| < |\mathcal{P}(M)|.$$

Die Kontinuumshypothese wurde von Georg Cantor 1878 formuliert. Sie besagt, dass der Schritt von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ so klein wie möglich ist. Die naheliegende Verallgemeinerung behauptet, dass der Schritt von M zur Potenzmenge von M keine Mächtigkeit überspringt, wenn M unendlich ist.

Die beiden Hypothesen sind im Rahmen der üblichen Axiome der Mengenlehre weder beweisbar noch widerlegbar (es sei denn, die Axiome der Mengenlehre sind widersprüchlich). Dass dies so ist, wurde von Kurt Gödel (1937) und

Paul Cohen (1963) bewiesen. Es handelt sich also um *Beweise der Unbeweisbarkeit einer Aussage* (innerhalb einer bestimmten Axiomatik). Da wir die Kontinuumshypothese weder beweisen noch widerlegen können, wissen wir nicht, wie groß die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist. Ein beunruhigendes Ergebnis, zumal es sich um die neben $\mathbb{N}$ wohl wichtigste Grundstruktur der Mathematik handelt. Was könnte diese unbefriedigende Situation ändern? Verschiedene Szenarien sind denkbar:

(A) Neue mengentheoretische Axiome werden gefunden, die die Frage entscheiden.

(B) Eine alternative Axiomatik wird entwickelt, in der das Diagonalargument, das zum Phänomen der Überabzählbarkeit führt, anders interpretiert wird.

(C) Ein aufgedeckter Widerspruch der mengentheoretischen Axiomatik bringt das gesamte klassische Gebäude der Mathematik zu Fall oder zumindest kurzfristig ins Wanken.

Hinsichtlich der Möglichkeit (C) ist der Extremfall denkbar, dass bereits die – letztendlich axiomatisch postulierte – Existenz der unendlichen Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen zu Widersprüchen führt. Die Mathematik müsste dann auf einem gänzlich finitären Boden neu entwickelt werden. Etwas milder wäre der Fall, dass die – ebenfalls axiomatisch postulierte – Existenz der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der natürlichen oder mengentheoretisch gleichwertig der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zu Widersprüchen führt. In diesem Fall müssten die Grundlagen der Analysis revidiert werden.

Letztendlich müssen wir mit unlösbaren Fragen und der Gefahr eines Widerspruchs leben, wenn wir nicht in einer sehr schwachen Theorie arbeiten möchten: Die Unvollständigkeitssätze von Kurt Gödel (1931) besagen, dass jede hinreichend starke widerspruchsfreie Axiomatik Fragen offen lässt, und dass konkret jede solche Axiomatik ihre eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen kann. Hinreichend stark heißt genauer, dass wir ein gewisses Maß an Zahlentheorie oder endlicher Mengenlehre in der Axiomatik entwickeln können. Im Sinne einer solchen Axiomatik gilt: Die Mathematik kann viel beweisen, aber nicht ihre eigene Widerspruchsfreiheit – es sei denn, sie ist widerspruchsvoll.

Übungen

Übung 1

Geben Sie eine konkrete Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ an.

Übung 2

Zeigen Sie, dass die Cantorsche Diagonalaufzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch die Cantorsche Paarung $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ beschrieben wird, d. h. für alle $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ ist $\pi(n, m)$ die Position von (n, m) in der Diagonalaufzählung.

Übung 3

Konstruieren Sie eine Aufzählung von $\mathbb{N}^3$ in Analogie zur Diagonalaufzählung von $\mathbb{N}^2$.

Übung 4

Geben Sie eine anschauliche Aufzählung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ an. Gewinnen Sie hieraus eine weitere Aufzählung von $\mathbb{Q}$.

Übung 5

Sei A eine abzählbar unendliche Menge, und sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung von A. Definieren Sie rekursiv die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die aus $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch Streichen von Wiederholungen hervorgeht.

Übung 6

Zeigen Sie unter Verwendung von Primzahlen und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, dass die Menge Seq aller endlicher Folgen in $\mathbb{N}$ abzählbar ist.

Übung 7

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Cantor-Bernstein, dass $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$. Betrachten Sie zur Konstruktion einer Injektion von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ reelle Zahlen in Dezimaldarstellung und mischen Sie die Nachkommastellen.

Übung 8

Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass $|\mathcal{P}(M)| = |{}^M\{0, 1\}|$.

Übung 9

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Cantor-Bernstein (und elementarer Funktionen der Analysis), dass jedes beschränkte oder unbeschränkte reelle Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht, gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist.

Übung 10

Zeigen Sie mit Hilfe von Cantor-Bernstein, dass $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

 © Oliver Deiser

Übung 11

Zeigen Sie, dass für alle Mengen A, B, C gilt:

$|{}^{C}({}^{B}A)| = |{}^{B \times C}A|$.

Übung 12

Folgern Sie unter Verwendung von $|\mathbb{R}| = |{}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}|$ und der vorangehenden Übung:

(a) $|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$,

(b) $|{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Übung 13

Seien A, B Mengen. Wir definieren

$|A| \prec |B|$ *falls* es gibt eine Injektion $f : A \to B$, die keine Bijektion ist.

Ist diese Definition äquivalent zu $|A| < |B|$? Welche Eigenschaften hat diese Relation?

Übung 14

Weisen Sie nach, dass die im Beweis des Satzes von Cantor-Bernstein konstruierte Funktion h^* bijektiv ist.

Übung 15

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Cantor-Bernstein, dass die Relation „von kleinerer Mächtigkeit" transitiv ist, d. h. für alle Mengen A, B, C gilt

(+) $|A| < |B|$ und $|B| < |C|$ *impliziert* $|A| < |C|$.

(b) Beweisen Sie umgekehrt den Satz von Cantor-Bernstein mit Hilfe der Transitivität (+).

Übung 16

Wie antworten Sie auf folgende Einwände gegen den Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$?

(a) „Ist $x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots$, gegeben und die Diagonalisierung x^* konstruiert, so können wir doch x^* an die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vorne anfügen und die Folge $x^*, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ betrachten. Dann ist x^* ein Element der Aufzählung."

(b) „Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind dicht in $\mathbb{R}$, d. h. zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl. Damit kann es nicht mehr reelle als rationale Zahlen geben. Folglich ist $\mathbb{R}$ wie $\mathbb{Q}$ abzählbar."