4. Exkurs: Mächtigkeiten

Die Entwicklung der mathematischen Sprache führte uns zu den Strukturbegriffen „injektiv, surjektiv, bijektiv“ für Funktionen. Auf der Grundlage dieser Begriffe lässt sich nun, zunächst ganz ohne die Verwendung von Zahlen, eine mathematische Theorie der Mächtigkeiten von Mengen entwickeln, und wir wollen hier die Grundzüge dieser Theorie vorstellen. Das dabei auftretende Phänomen der Größenunterschiede im Unendlichen hat eine große mathematische und philosophische Strahlkraft, und es ist darüber hinaus für jede Form der kontinuierlichen Mathematik, die auf der Menge der reellen Zahlen basiert, von großer Bedeutung.

Mächtigkeitsvergleiche

Eine Herde von weißen und schwarzen Schafen können wir vergleichen, indem wir die Schafe paarweise durch ein Tor schicken und ermitteln, ob am Ende Schafe einer Farbe übrig bleiben. Mathematisch betrachtet konstruieren wir hier injektive Funktionen. In der Tat legen die Begriffe „injektiv“ und „bijektiv“ die folgenden Größenvergleiche für beliebige Mengen nahe:

Definition *(Mächtigkeitsvergleiche)*

Seien M und N Mengen. Wir schreiben:

$|M| \leq |N|$, *falls* „es gibt ein injektives $f : M \to N$“.

$|M| = |N|$, *falls* „es gibt ein bijektives $f : M \to N$“.

$|M| < |N|$, *falls* $|M| \leq |N|$, aber $\mathrm{non}(|M| = |N|)$.

Gilt $|M| \leq |N|$, so sagen wir, dass die *Mächtigkeit* von M kleinergleich der Mächtigkeit von N ist. Analoge Sprechweisen verwenden wir für $|M| = |N|$ *(gleiche Mächtigkeit)* und $|M| < |N|$ *(kleinere Mächtigkeit)*.

Einige Eigenschaften der Mächtigkeitsvergleiche sind leicht zu zeigen. So ist die Gleichmächtigkeit zum Beispiel reflexiv, symmetrisch und transitiv auf der Klasse aller Mengen. Für jede Menge A definiert damit

$X \equiv Y$, *falls* $|X| = |Y|$ für alle $X, Y \subseteq A$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(A)$.

Der Satz von Cantor-Bernstein

Der Mächtigkeitsvergleich ist offenbar reflexiv und transitiv. Die Schreibweise suggeriert zudem die Antisymmetrie, d. h. die Gültigkeit der folgenden Implikation:

$|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$ *impliziert* $|M| = |N|$. *(Satz von Cantor-Bernstein)*

Der Beweis dieser Aussage ist eine nichttriviale Angelegenheit. Wir müssen zwei gegebene Injektionen

$f_1 : M \to N$ und $f_2 : N \to M$

zu einer Bijektion $f : M \to N$ verschmelzen. Dass dies letztendlich doch in einer relativ einfachen und dazu auch konstruktiven Art und Weise möglich ist, gehört zu den Juwelen der Mathematik. Als Korollar erhalten wir, dass der Mächtigkeitsvergleich $|M| \leq |N|$ die Strukturmerkmale einer partiellen Ordnung besitzt.

Cantor hat den Satz lange vermutet, aber keinen Beweis gesehen. Beweise wurden dann von Dedekind, Bernstein, Zermelo und anderen gefunden. Der folgende Beweis stammt von Dedekind. Es genügt für das folgende, wenn der Leser die Problemstellung des Satzes von Cantor-Bernstein zur Kenntnis nimmt. Der Beweis ist für diejenigen gedacht, die an dieser Stelle ein anspruchsvolleres Ergebnis studieren möchten.

Wir beweisen zunächst ein verwandtes Resultat, aus welchem wir dann den eigentlichen Satz leicht ableiten können.

Satz *(Satz von Cantor-Bernstein, Inklusionsform)*

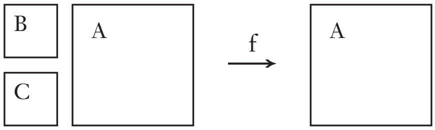
Seien A, B, C paarweise disjunkte Mengen, und sei

$f : A \cup B \cup C \to A$ bijektiv.

Dann gibt es Bijektionen

$b : A \cup B \cup C \to A \cup B$,

$b' : A \cup B \to A$.



Anders formuliert: Alle Mengen, die bzgl. der Inklusion zwischen zwei gleichmächtigen Mengen liegen, sind gleichmächtig mit diesen Mengen.

Beweis

Wir setzen:

$Z = \bigcap \{ D \subseteq A \cup C \mid C \subseteq D,\ f[D] \subseteq D \}$.

Die Menge des Schnitts ist nichtleer, da die Menge $D = A \cup C$ die geforderten Eigenschaften hat. Es gilt zudem $C \subseteq Z$, denn C ist eine Teilmenge jeder Menge D der Schnittbildung.

Weiter gilt:

(+) $f[Z] = Z - C$.

Beweis von (+)

Es gilt $f[Z] \subseteq Z$, denn ist $x \in Z$, so ist $f(x) \in D$ für alle D wie in der Schnittbildung, also $f(x) \in Z$. Wegen $\mathrm{rng}(f) \subseteq A$ ist also $f[Z] \subseteq Z - C$.

Sei nun $x \in Z - C$ beliebig. Dann ist $Z - \{x\}$ eine echte Teilmenge von Z und eine Obermenge von C. Nach Definition von Z ist also das Bild $f[Z - \{x\}]$ keine Teilmenge von $Z - \{x\}$. Wegen

$$f[Z - \{x\}] \subseteq f[Z] \subseteq Z$$

gibt es also ein $y \in Z - \{x\}$ mit $f(y) = x$. Also ist $x \in f[Z]$.

Nach (+) ist $f|Z : Z \to Z - C$ bijektiv, und damit ist

$$b = f|Z \cup \mathrm{id}_{(A \cup B) - Z}$$

eine Bijektion von $A \cup B \cup C$ nach $A \cup B$.
Schließlich ist dann $b' = f \circ b^{-1}$ eine Bijektion von $A \cup B$ nach A.

Wir erhalten hieraus ohne weitere Schwierigkeiten:

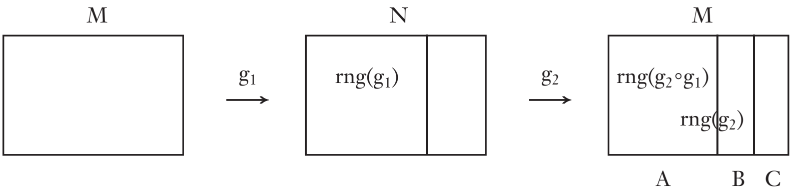
Korollar *(Satz von Cantor-Bernstein)*

Seien $g_1 : M \to N$ und $g_2 : N \to M$ injektiv.
Dann existiert eine Bijektion $g : M \to N$.

Beweis

Wir definieren:

$$A = \mathrm{rng}(g_2 \circ g_1), \quad B = \mathrm{rng}(g_2) - A, \quad C = M - \mathrm{rng}(g_2).$$



Dann sind A, B, C paarweise disjunkt, und es gilt

$$M = A \cup B \cup C.$$

Weiter ist $g_2 \circ g_1 : A \cup B \cup C \to A$ bijektiv. Nach dem Satz gibt es ein bijektives $b : M \to A \cup B$. Aber es gilt $A \cup B = \mathrm{rng}(g_2)$, und damit ist

$$g_2^{-1} \circ b \; : \; M \to N$$

bijektiv.

Als Nächstes zeigen wir den nach dem Satz von Cantor-Bernstein zweiten Hauptsatz der elementaren Mächtigkeitstheorie: Die Potenzmenge einer Menge M ist immer von größerer Mächtigkeit als die Mächtigkeit von M selbst. Dieser starke Satz hat einen überraschend kurzen und einfachen Beweis, der als *Cantor sches Diagonalverfahren* bekannt ist.

Satz *(Satz von Cantor)*

Sei M eine Menge, und sei $f : M \to \mathcal{P}(M)$ eine Funktion.
Dann ist f nicht surjektiv. Genauer gilt: Sei

$$D = \{ x \in M \mid x \notin f(x) \}.$$

Dann gilt $D \notin \mathrm{rng}(f)$.

Beweis

Annahme, $D \in \mathrm{rng}(f)$. Sei dann $x^* \in M$ mit $f(x^*) = D$. Für alle $x \in M$ gilt nach Definition von D:

$$x \in D \quad \textit{gdw} \quad x \notin f(x).$$

Speziell gilt also für x^*:

$$x^* \in D \quad \textit{gdw} \quad x^* \notin f(x^*).$$

Wegen $f(x^*) = D$ haben wir also:

$$x^* \in D \quad \textit{gdw} \quad x^* \notin D,$$

Widerspruch.

Korollar

Für alle Mengen M gilt $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis

Nach dem Satz von Cantor gilt $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$. Die injektive Funktion $f : M \to \mathcal{P}(M)$ mit $f(x) = \{ x \}$ für alle $x \in M$ zeigt, dass $|M| \leq |\mathcal{P}(M)|$.

Der Leser ist beim Studium des Beweises vielleicht an die Russell-Zermelo-Antinomie erinnert worden. In der Tat war Cantors allgemeiner Satz die Quelle für Russells Konstruktion der Klasse $R = \{ x \mid x \notin x \}$. Genaueres diskutieren wir in den Übungen.

Es gibt auch noch einen dritten Hauptsatz der elementaren Mächtigkeitstheorie: Für alle Mengen M und N gilt $|M| \leq |N|$ oder $|N| \leq |M|$. Je zwei Mengen sind also in ihrer Mächtigkeit vergleichbar. Diese Aussage ist richtig, lässt sich aber nur mit weitergehenden Hilfsmitteln beweisen, und wir können auf diesen Vergleichbarkeitssatz für Mächtigkeiten hier nicht weiter eingehen.

Unendlichkeiten

Der Begriff der Injektion dominiert die elementare Mengenlehre. Er ermöglicht uns den Vergleich der „Größe“ von beliebigen Mengen. Weiter lässt er sich auch zur Definition der Unendlichkeit verwenden:

Definition *(unendlich, endlich)*

Eine Menge M heißt *(Dedekind-) unendlich*, falls gilt:

Es gibt ein injektives $f : M \to M$ mit $\mathrm{rng}(f) \neq M$.

Weiter heißt eine Menge N *(Dedekind-) endlich*, falls N nicht unendlich ist.

Gleichwertig zur Dedekind-Unendlichkeit ist: Es existiert eine echte Teilmenge N von M und eine bijektive Funktion $f : M \to N$.

Die endlichen Mengen sind also dadurch gekennzeichnet, dass jede injektive Operation auf ihnen automatisch bijektiv ist.

Ist M unendlich, so gilt

$$|M| < |\mathcal{P}(M)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| < \dots$$

nach dem Satz von Cantor. Wir lassen uns auf ungeahnte Weiten ein, wenn wir unendliche Mengen und Potenzmengen unendlicher Mengen zulassen: Es gibt Größenunterschiede im Unendlichen!

Wir versuchen nun, die Struktur des Unendlichen etwas genauer zu beschreiben, indem wir Stufen der Unendlichkeit einführen. Hierzu definieren wir:

Definition *(abzählbar, überabzählbar)*

Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich* oder *von der ersten unendlichen Mächtigkeit*, falls gilt:

(a) M ist unendlich.

(b) Jede Teilmenge von M ist endlich oder gleichmächtig zu M.

Wir schreiben dann symbolisch auch $|M| = \aleph_0$ [Aleph-0].
Weiter heißt eine Menge A *abzählbar*, falls A endlich oder abzählbar unendlich ist, und *überabzählbar*, falls A nicht abzählbar ist.

Eine analoge Definition isoliert eine weitere Stufe des Unendlichen:

Definition *(von der zweiten unendlichen Mächtigkeit)*

Eine Menge M heißt *von der zweiten unendlichen Mächtigkeit*, falls gilt:

(i) M ist überabzählbar.

(ii) Jede Teilmenge von M ist abzählbar oder gleichmächtig zu M.

Wir schreiben dann symbolisch auch $|M| = \aleph_1$ [Aleph-1].

Ist M unendlich, so ist $\mathcal{P}(M)$ überabzählbar nach dem Satz von Cantor. Es stellt sich dann die Frage, wie groß der Sprung von M zu $\mathcal{P}(M)$ ist. Wir formulieren hierzu:

Kontinuumshypothese

Sei M abzählbar unendlich. Dann ist $\mathcal{P}(M)$ von der zweiten unendlichen Mächtigkeit.

Diese Aussage ist als Hypothese formuliert. Es ist nicht gelungen, sie zu beweisen oder zu widerlegen. Dagegen ist es aber gelungen zu zeigen, dass sie im Rahmen der üblichen, als widerspruchsfrei vorausgesetzten mengentheoretischen Axiomatik tatsächlich weder beweisbar noch widerlegbar ist. Die Kontinuumshypothese ist, wie man sagt, unabhängig von dieser Axiomatik.

Hat man die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zur Verfügung, so lassen sich die Begriffe „endlich", „abzählbar" und „Kontinuumshypothese" weiter erläutern und motivieren. Denn eine Menge M ist, wie man zeigen kann, genau dann Dedekind-endlich, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $|M| = |\{0, \ldots, n-1\}|$. Weiter lässt sich zeigen, dass eine Menge M genau dann abzählbar unendlich ist, wenn $|M| = |\mathbb{N}|$ gilt. Die Abzählbarkeit einer unendlichen Menge B bedeutet also, dass wir die Elemente von B vollständig in der Form $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots,$ auflisten können, mit Indizes n aus den natürlichen Zahlen. Für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gilt weiter die fundamentale Mächtigkeitsbeziehung

(#) $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|,$

die wir in den Übungen ausgehend von einem Grundverständnis der reellen Zahlen diskutieren. Damit folgt aus dem Satz von Cantor, dass die reellen Zahlen überabzählbar sind. Anders formuliert: Ist $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen, so gibt es eine reelle Zahl x mit $x \neq x_n$ für alle n. Die Kontinuumshypothese besagt dann, dass die reellen Zahlen von der zweiten unendlichen Mächtigkeit sind, oder, anders formuliert, dass gilt:

„Ist P eine unendliche Menge reeller Zahlen, so existiert entweder eine Bijektion zwischen P und $\mathbb{N}$ oder eine Bijektion zwischen P und $\mathbb{R}$."

Diese Aussage ist, im verschärften Sinne der nachgewiesenen Unabhängigkeit, offen.

Wir haben die Sprache der Mathematik nun recht genau kennen gelernt, und dabei im Umfeld von Mengen und Bijektionen sogar eine unerwartet reichhaltige und subtile Theorie entdeckt. Als Nächstes wollen wir nun aber die Zahlen nicht mehr nur naiv in Übungsaufgaben und Beispielen verwenden, sondern im Rahmen unserer Sprache einführen und untersuchen.

Übungen

Übung 1 *(Mächtigkeitsvergleiche, I)*

Sei A eine Menge. Für $X, Y \subseteq A$ setzen wir:

$X \equiv Y$, *falls* „es gibt ein bijektives $f : X \to Y$“.

Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(A)$ ist.

Übung 2 *(Mächtigkeitsvergleiche, II)*

Für eine Menge M sei ${}^M\{0, 1\} = \{ f \mid f : M \to \{0, 1\} \}$.
Zeigen Sie, dass $|\mathcal{P}(M)| = |{}^M\{0, 1\}|$.

Übung 3 *(Mächtigkeitsvergleiche, III)*

Seien A, B Mengen mit $|A| = |B|$. Zeigen Sie, dass $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

Übung 4 *(Der Satz von Cantor-Bernstein, I)*

Sei A eine Menge, und sei $\equiv$ die Äquivalenzrelation der Gleichmächtigkeit auf $\mathcal{P}(A)$. Für $X, Y \subseteq A$ setzen wir:

$X/\equiv \ \leq \ Y/\equiv$, *falls* „es gibt ein injektives $f : X \to Y$“.

Zeigen Sie, dass $\leq$ eine wohldefinierte partielle Ordnung auf $\mathcal{P}(A)/\equiv$ ist.

Übung 5 *(Der Satz von Cantor-Bernstein, II)*

Seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ injektiv. Zeigen Sie, dass es Mengen $S \subseteq M$ und $T \subseteq \mathrm{rng}(g)$ mit $S \cap T = \emptyset$ und $S \cup T = M$ gibt, sodass die Funktion

$h = f|S \cup g^{-1}|T$

eine Bijektion von M nach N ist.

Übung 6 *(Der Satz von Cantor-Bernstein, III)*

Leiten Sie die Inklusionsform des Satzes von Cantor-Bernstein aus dem Satz von Cantor-Bernstein ab.

Übung 7 *(Der Satz von Cantor-Bernstein, IV)*

Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen und $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Cantor-Bernstein:

(a) $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$,

(b) $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$,

(c) $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$.

Übung 8 *(Der Satz von Cantor-Bernstein, V)*

Zeigen Sie:

(i) $|\mathbb{N}| = |(\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\})|$.

(ii) Sind A, B disjunkt, so ist $|\mathcal{P}(A \cup B)| = |\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)|$.

(iii) Geben Sie mit Hilfe von (i) und (ii) einen neuen Beweis für die Existenz einer Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$.

[Argumentieren Sie für (iii) etwa wie folgt:
$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\{0\}\cup\mathbb{N}\times\{1\})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\{0\}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\{1\})| = |\mathbb{R}\times\mathbb{R}|$.]

Übung 9 *(Der Satz von Cantor-Bernstein, VI)*

Wir definieren Mengen A, B, C durch

$A = \{0, 2, 4, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}, \quad C = \{1\},$

$B = \{3, 5, 7, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}, n \geq 3\}.$

Sei $f : \mathbb{N} \to A$ die Bijektion mit $f(n) = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bestimmen Sie die Bijektionen $b : \mathbb{N} \to A \cup B$ und $b' : A \cup B \to A$, die im Beweis der Inklusionsform des Satzes von Cantor-Bernstein für den vorliegenden Fall konstruiert werden. Bestimmen Sie hierzu die Menge Z und überzeugen Sie sich noch einmal von der Aussage (+).

Übung 10 *(Unendlichkeiten, I)*

Sei $f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$ die folgende Funktion:

$f(0) = \{0, 1, 2\},$ $\qquad f(3) = \{3\},$

$f(1) = \{2, 4\},$ $\qquad f(4) = \emptyset,$

$f(2) = \{0, 1, 3, 4, 5\},$ $\qquad f(5) = \{0, 2, 3, 4, 5\}.$

Bestimmen Sie die Diagonalmenge D dieser Funktion wie im Beweis des Satzes von Cantor. Visualisieren Sie die Funktion f durch ein Quadrat mit 36 Feldern und D als eine Diagonale.

Übung 11 *(Unendlichkeiten, II)*

Wie kann man die Antinomie von Russell-Zermelo aus dem Satz von Cantor gewinnen?

[Betrachten Sie als Funktion die Identität auf $V = \{x \mid x \text{ ist Menge}\}$.]

Übung 12 *(Unendlichkeiten, III)*

Zeigen Sie direkt, dass $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ gilt, indem Sie die Diagonalmethode des Beweises des Satzes von Cantor auf reelle Zahlen in Dezimaldarstellung anwenden.

