nicht Unkenntnis, sondern strenges Festhalten an der Definition der Zahl. Arithmos bedeutet Anzahl, also ganze Zahl. In ihrem logischen Rigorismus ließen sie nicht einmal Brüche zu, sondern ersetzten sie durch Verhältnisse von ganzen Zahlen.

Für die Babylonier stellte jede Strecke und jede Fläche ohne weiteres eine Zahl dar… Konnten sie eine Quadratwurzel nicht exakt ausziehen, so begnügten sie sich mit einer Näherung. Die Ingenieure und Naturwissenschaftler haben es zu allen Zeiten genau so gemacht. Den Griechen aber war es um exaktes Wissen zu tun, um ‚die Diagonale selbst', wie Platon es ausdrückt, nicht um eine brauchbare Näherung.

Im Bereich der Zahlen … ist $x^2 = 2$ nicht exakt lösbar. Im Bereich der Strecken … ist die Diagonale des Einheitsquadrats eine Lösung. Also muss man, wenn man quadratische Gleichungen exakt lösen will, aus dem Bereich der Zahlen in den Bereich der geometrischen Größen hinübertreten. Die geometrische Algebra gilt auch für irrationale Strecken und ist trotzdem eine exakte Wissenschaft. Ein logischer Zwang ist es also, der die Pythagoreer nötigte, ihre Algebra ins Geometrische zu übersetzen, nicht nur die Freude am Anschaulichen."

Erst viel später wird der strenge Zahlbegriff aufgegeben und die Frage erörtert, was eine Zahl ist bzw. was noch alles als Zahl gelten darf und soll. Das erfolgreiche konkrete und später algebraisch-abstrakte Rechnen drängt im Laufe einer langen Entwicklung sanft insistierend zu einer Erweiterung des Zahlbegriffs. Zahl ist nicht mehr nur ganze Zahl, Zahl ist, womit gerechnet werden kann. Die Approximierbarkeit durch „wirkliche Zahlen" wird dabei oft stillschweigend vorausgesetzt. All dies unterstützt die Entstehung des modernen atomaren arithmetischen Kontinuums: Ein Kontinuum besteht aus $\mathbb{Q}$ und allen „Zahlen", die man mit $\mathbb{Q}$ approximativ beschreiben kann. Die geometrischen Größen entsprechen dann genau den reellen Zahlgrößen, nicht mehr und nicht weniger. Der Weg bis zur heutigen Struktur $\mathbb{R}$ ist lange und verläuft über Jahrhunderte des Rechnens mit reellen Zahlen. Er kulminiert in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts in den heute oft als klassisch bezeichneten Konstruktionen.

Welche Gründe man auch immer dafür angeben mag: Bei den Griechen existiert kein arithmetisches Kontinuum und auch kein Bedürfnis danach. Das geometrische Kontinuum, die zusammenhängende Strecke, ist anschaulich gegeben. Euklid beginnt seine „Elemente" mit den Beschreibungen: „1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat. 2. Eine Linie [ist] breitenlose Länge. 3. Die Enden einer Linie sind Punkte. 4. Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt." Diese Sätze sind Eingrenzungen von Gegenständen, die beim Leser als bekannt vorausgesetzt werden. Strecken und Punkte begegnen uns in geometrischen Figuren, daher kennen wir sie. Sie sind sichtbar vorhanden. Was das Wesen des „Zusammenhängenden" ausmacht, ist Gegenstand der philosophischen Diskussion, aber für die mathematische Untersuchung von geometrischen Figuren und Streckenverhältnissen eher zweitrangig.

Mittelalter und frühe Neuzeit

Die Entwicklung der Mathematik vom Mittelalter bis in die frühe Neuzeit lässt sich als langsame und vor allem zu Beginn unsichere Liberalisierung des strengen Zahlbegriffs der Griechen zusammen mit einer Algebraisierung der

Geometrie lesen. Zunächst einmal muss das verlorene und zum Teil missachtete antike – und das heißt in diesem Fall griechische – mathematisch-naturwissenschaftliche Wissen erst wieder lebendig gemacht werden. Ende des 11. Jahrhunderts erobern die Christen Spanien von den Arabern zurück. Sie verzichten darauf, die Bibliotheken in Brand zu stecken und erhalten so Zugang zur hellenistischen Literatur in arabischen Übersetzungen. Adelard von Bath übersetzt um 1130 Euklid ins Lateinische: Er übersetzt aus dem Arabischen, vollständige Euklid-Übersetzungen aus erhaltenen griechischen Handschriften finden sich erst ab 1500. Adelard übersetzt auch Al-Khwarizmi (vgl. die Zeittafel nach Kapitel 1).

Bis ins 13. Jahrhundert dominieren dann Euklid-Bearbeitungen und Kommentare. Die Gelehrten des Mittelalters reiben sich weiter an der Auffassung des Aristoteles über das Kontinuum. Thomas Bradwardinus verfasst im 14. Jahrhundert einen „Tractatus de continuo", in dem die atomare Frage und die verschiedenen Meinungen hierüber diskutiert werden. Auch hier lautet die Schlussfolgerung, dass ein Kontinuum aus unendlich vielen Kontinua besteht, nicht aber aus Atomen. Gregor von Rimini folgt ebenfalls Aristoteles, greift aber in der Diskussion der Problematik den Unterschied zwischen Punkten und unendlich kleinen Indivisibilien mit Ausdehnung (magnitudo indivisibilis cum extensione) wieder auf; Indivisibilien mit Ausdehnung hatte Xenokrates im 4. Jahrhundert vor Chr. betrachtet und damit die Bewegungsparadoxien des Zenon untersucht. (Wir verweisen den Leser auf [Maier 1949] für eine detailierte Darstellung der Kontinuumsdiskussion der Scholastik.)

Daneben verläuft die Geschichte des praktischen Rechnens mit allen Bestandteilen: Suche nach guten Ziffern und arithmetischen Zeichen, Behandlung der Null und der negativen Zahlen, und natürlich Lösen praktischer Aufgaben samt Übungen hierzu. Bekannt wurde Adam Ries mit seinen Rechenbüchern, verfasst in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts. Zinseszinsprobleme führen auch zur Betrachtung kubischer Gleichungen, deren Lösungsformeln Scipione del Ferro 1515 findet.

Bei Michael Stifel finden wir Mitte des 16. Jahrhunderts in den „Arithmetica integra" immer noch eine Diskussion darüber, ob die irrationalen Zahlen wahre Zahlen sind oder bloße Erfindungen (Kapitel 1 hat z. B. die Überschrift „De essentia numerorum irrationalium", die Behandlung des Themas ist nicht mathematisch, sondern scholastisch-dialektisch). Simon Stevin lässt dann um 1600 ganz eindeutig irrationale Zahlen zu, den kontinuierlichen Größen der Geometrie und Natur entsprechen kontinuierliche Zahlen. Bei René Descartes, John Wallis, Leibniz und Newton wird dann präzisiert, was eine kontinuierliche Zahl ist, nämlich das Verhältnis einer Strecke zu einer beliebig gewählten Einheitsstrecke. Den geometrischen Größen entsprechen nun Zahlen, geometrischen Konstruktionen entsprechen arithmetische Operationen. Allgemeiner gilt dies für beliebige Größen, etwa physikalische. Newton schreibt 1707 in den „Arithmetica universalis": „Unter ‚Zahl' verstehen wir nicht sowohl Menge von Einheiten [wie bei den alten Griechen] sondern vielmehr das abstrakte Verhältnis irgendeiner Größe zu einer anderen Größe derselben Gattung, die als Einheit angenommen wird. Sie ist von dreifacher Art: ganz, gebrochen und irrational; ganz, wenn die Einheit sie misst, gebrochen, wenn ein Teil der Einheit, dessen Vielfaches die Einheit ist, sie misst, irrational, wenn die Einheit mit ihr inkommensurabel ist." (zitiert nach [Gericke 1970]). Damit ist eine erste Stufe in der

Arithmetisierung des Kontinuums durchgeführt. Sie mag inhaltlich mit ihrer klaren Dreiteilung in ganz, gebrochen rational und irrational nicht weit von den Erkenntnissen der Griechen entfernt zu sein scheinen. Zeitlich sind zweitausend Jahre vergangen.

Auch Leibniz beschäftigt sich mit der „atomaren Frage" und steht einem Kontinuum aus Punkten zumindest zeitweise eher skeptisch gegenüber. Philosophisch entwickelt er seine Theorie der Monaden. In Fortführung der Definition des Aristoteles beschreibt er ein Kontinuum als ein Ganzes, für das je zwei Teile, die zusammen genommen das Ganze ergeben, ein gemeinsames Stück oder eine gemeinsame Grenze aufweisen.

Eine interne mathematische Definition von „reelle Zahl" oder eine Strukturuntersuchung aller reellen Zahlen lag zur Zeit von Newton und Leibniz noch nicht vor. Eine solche sollte dann erst im 19. Jahrhundert gegeben werden, als ein Bedürfnis entstand, die Fundamente der Analysis freizulegen oder gegebenenfalls neu zu erklären.

Infinitesimale Größen

Im 17. und 18. Jahrhundert spielen die infinitesimalen Größen bei der Entwicklung der Differential- und Integralrechnung eine wichtige Rolle. Vor allem der Leibnizsche dx/dy-Kalkül hat diese Größen in der Mathematik und den Naturwissenschaften populär gemacht. Erst das 19. Jahrhundert hat dann das Unendlichkleine durch eine klare Definition des Grenzwertes und eine arithmetische Konstruktion des Kontinuums in den Bereich der Heuristik verwiesen. Der Leibnizsche Kalkül ist dabei aber nie ersetzt worden und die suggestive Kraft der infinitesimalen Größen blieb speziell in der Physik durchgehend lebendig. Heute kann man sie nach den Arbeiten von Curt Schmieden, Detlef Laugwitz und Abraham Robinson in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts als mathematische Objekte einführen, eine Analysis auf einem entsprechenden sog. hyperreellen Oberkörper von $\mathbb{R}$ begründen und dadurch uralte Rechenregeln wieder finden und rechtfertigen.

Die Verwendung der infinitesimalen Größen ist früh kritisiert worden, bekannt geworden ist die Kritik von George Berkeley in seiner polemischen Schrift „The analyst. Or a discourse addressed to an infidel mathematician" von 1734, die das Rechnen mit den unklaren dx-Größen als „religious mysterics" einstuft. Unter den Mathematikern hatten in der Nachfolge von Leibniz vor allem die Brüder Jakob und Johann Bernoulli den neuen Kalkül verwendet und intensiven Gebrauch von infinitesimalen Größen gemacht. Im 18. Jahrhundert dominiert Leonhard Euler und auch er rechnet „infinitesimal". Eine erste einflussreiche Gegenbewegung innerhalb der Mathematik ist dann die „Théorie des fonctions analytiques" von Lagrange 1797 (deutsch 1823), die im Untertitel explizit fest hält „die Hauptsätze der Differential-Rechnung, ohne die Vorstellung vom Unendlich-Kleinen" zu präsentieren.

Die Haltung von Leibniz selber, der durch seine dx-Notation infinitesimale Größen scheinbar überall verwendet, ist komplex, über die Jahre hinweg nicht konstant, und bis heute umstritten. Öffentlich zieht er sich oft auf einen formalen

Standpunkt zurück: Die dx-Notation ist eine bequeme Kurzfassung einer umständlicheren Argumentation, mit der die Resultate auch gewonnen werden könnten. Er vergleicht die infinitesimalen Größen mit den imaginären Zahlen der Algebraiker und betont ihren rechnerischen Gehalt gegenüber Streitereien über ihre Realität. Der Kalkül funktioniert. Er liefert neue Ergebnisse, die dann in jedem Einzelfall auch ohne Verwendung infinitesimaler Größen bewiesen werden könnten, indem „infinitesimal" durch „beliebig klein" ersetzt wird. In einem Brief an Pierre Varignon erklärt Leibniz seine Auffassung so ([Leibniz 1996]):

Leibniz (1702): „… meine Absicht war jedoch zu zeigen, dass man die mathematische Analysis von metaphysischen Streitigkeiten nicht abhängig zu machen braucht, also nicht zu behaupten braucht, dass es in der Natur Linien gibt, die, relativ zu unsern gewöhnlichen, in aller Strenge unendlich klein sind … Um daher diese subtilen Streitfragen zu vermeiden, begnügte ich mich, da ich meine Erwägungen allgemein verständlich machen wollte, das Unendliche durch das Unvergleichbare zu erklären, d. h. Größen anzunehmen, die unvergleichbar größer oder kleiner als die unsrigen sind. Auf diese Weise nämlich erhält man beliebig viele Grade unvergleichbarer Größen, sofern ein unvergleichlich viel kleineres Element, wenn es sich um die Feststellung eines unvergleichlich viel größeren handelt, bei der Rechnung außer Acht bleiben kann. So ist etwa ein Teilchen der magnetischen Materie, die das Gas durchdringt, einem Sandkorn, dieses wiederum der Erdkugel, die Erdkugel schließlich dem Firmament nicht vergleichbar. Daher habe ich früher in den ‚Acta Eruditorum' einige Hilfssätze für die Rechnung mit dem Unvergleichbaren aufgestellt, die man sowohl auf das Unendliche im strengen Sinne, wie auch auf Größen anwenden kann, die an anderen gemessen, nur nicht in Betracht kommen.

Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die unvergleichlich kleinen Größen, selbst in ihrem populären Sinne genommen, keineswegs konstant und bestimmt sind, dass sie vielmehr, da man sie so klein annehmen kann, wie man nur will, in geometrischen Erwägungen dieselbe Rolle wie die Unendlichkleinen im strengen Sinne spielen. Will nämlich ein Gegner unseren Sätzen die Richtigkeit absprechen, so zeigt unser Kalkül, dass der Irrtum geringer ist als irgendeine angebbare Größe, da es in unserer Macht steht das Unvergleichbarkleine – das man ja immer so klein, als man nur will, annehmen kann – zu diesem Zwecke hinlänglich zu verringern. Dies dürfte es wohl sein, was Sie mit dem Unerschöpflichen meinen, und zweifellos liegt darin der strenge Beweis unserer Infinitesimalrechnung. Ihr Vorzug liegt darin, dass sie unmittelbar und augenscheinlich und in einer Art, die den eigentlichen Quell der Entdeckung frei legt, dasjenige gibt, was die Alten, so z. B. Archimedes, auf Umwegen vermittels des indirekten Beweises erreichten. Sie konnten indes mangels eines solchen Kalküls in verwickelten Fällen nicht zur richtigen Lösung gelangen, wenngleich die Grundlage der Entdekkung ihnen bekannt war. Man kann somit die unendlichen und unendlichkleinen Linien – auch wenn man sie nicht in metaphysischer Strenge und als reelle Dinge zugibt – doch unbedenklich als ideale Begriffe brauchen, durch welche die Rechnung abgekürzt wird, ähnlich den sog. imaginären Wurzeln in der gewöhnlichen Analysis …

Man darf jedoch nicht glauben, dass durch diese Erklärung die Wissenschaft vom Unendlichen herabgewürdigt wird und auf Fiktionen zurückgeführt wird, denn es bleibt, – um mich schulmäßig auszudrücken, – immer ein synkategorematisch Unendliches bestehen; so bleibt es z. B. immer richtig, dass 2 gleich ist 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 …"

Es bleibt aber der Eindruck, dass mathematische Struktur zur Diskussion steht und nicht nur die Frage nach einem korrekten und geschmeidigen Kalkül. Erst die Nonstandardanalysis machte „den eigentlichen Quell der Entdeckung" zur Mathematik. Die Theorie der hyperreellen Zahlen ist historisch tief verwurzelt und eine Bereicherung unseres Kontinuumsbegriffs, ganz unabhängig von analytischer Notwendigkeit und Fruchtbarkeit.

Die ersten nichtarchimedischen Körper wurden bereits im 19. Jahrhundert von Veronese und Levi-Cività konstruiert, siehe hierzu [Veronese 1891], [Levi-Cività 1892] und [Hahn 1907]. Zur Nonstandardanalysis siehe [Robinson 1966], [Keisler 1976], [Nelson 1977], [Laugwitz 1978, 1986], [Cutland 1988], [Landers / Rogge 1994], [Goldblatt 1998]. Zur Diskussion des Unendlichkleinen und des Kontinuumsbegriffs bei Leibniz vgl. [Laugwitz 1992] und die Sammlung [Salanskis 1992]. Die Forschungsmonographie [Dales / Woodin 1996] untersucht allgemeinere geordnete Oberkörper von $\mathbb{R}$.

Kontinuität bei Kant

Stellvertretend für die fortdauernde philosophische Diskussion um den Kontinuumsbegriff sei hier Immanuel Kant zitiert, der ein Kontinuum aus Punkten ebenfalls ablehnt. In der „Kritik der reinen Vernunft" lesen wir [Kant 1988, S. 210f.]:

Kant (1781): „Die Eigenschaft der Größen, nach welcher an ihnen kein Teil der kleinstmögliche (kein Teil einfach) ist, heißt die Kontinuität derselben. Raum und Zeit sind quanta continua, weil kein Teil derselben gegeben werden kann, ohne ihn zwischen Grenzen (Punkten und Augenblicken) einzuschließen, mithin nur so, dass dieser Teil selbst wiederum ein Raum, oder eine Zeit ist. Der Raum besteht also nur aus Räumen, die Zeit aus Zeiten, Punkte und Augenblicke sind nur Grenzen, d. i. bloße Stellen ihrer Einschränkung; Stellen aber setzen jederzeit jene Anschauungen, die sie beschränken oder bestimmen sollen, voraus, und aus bloßen Stellen, als aus Bestandteilen, die noch vor dem Raume oder der Zeit gegeben werden könnten, kann weder Raum noch Zeit zusammengesetzt werden. Dergleichen Größen kann man auch fließende nennen, weil die Synthesis (der produktiven Einbildungskraft) in ihrer Erzeugung ein Fortgang in der Zeit ist, deren Kontinuität man besonders durch den Ausdruck des Fließens (Verfließens) zu bezeichnen pflegt."

Bolzanos unvollendete Zahlenlehre

Bolzano entwickelte zwischen 1830 – 1835, nach Fertigstellung seiner „Wissenschaftslehre", einen arithmetischen Aufbau des Zahlensystems und speziell eine Theorie der reellen Zahlen. Diese Arbeiten finden sich in seinem Nachlass, sie blieben unvollendet und ohne Wirkung auf ihre Zeit, sind aber historisch und inhaltlich von hohem Interesse. Bolzano geht es um die Behandlung endlicher und unendlicher Zahlengrößen, unter denen er die „messbaren Zahlen" auszeichnet:

Bolzano [nach Rychlik 1962]: „Was wir soeben über die *Rationalzahlen* oder diejenigen Größenausdrücke gesagt, von welchem die in dem Begriffe selbst geforderten Verrichtungen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens eine endliche Menge nie übersteigen, setzt uns in den Stand, nun auch den zweiten Fall … in Erwägung zu ziehen, wo die Menge jener Verrichtungen ins Unendliche geht…

Es sei mir erlaubt, einen jeden Zahlenbegriff, in welchem eine unendliche Menge von Verrichtungen, sei es nun des Addierens, oder Subtrahierens, oder Multiplizierens, oder Dividierens, oder aller zugleich gefordert wird, einen *unendlichen Größenbegriff*, und einen Ausdruck, durch den ein solcher Begriff dargestellt wird, einen unendlichen *Größenausdruck* zu nennen."

Als Beispiele für unendliche Größenausdrücke nennt Bolzano $1 + 2 + 3 + \ldots$, $1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + \ldots$ und $(1 - 1/2)\,(1 - 1/4)\,(1 - 1/8)\ldots$

Bolzano [nach Rychlik 1962]: „Unter den unendlichen Zahlenbegriffen gibt es auch einige, die von einer solchen Beschaffenheit sind, dass sich zu jeder beliebigen wirklichen Zahl q [$\in \mathbb{N}^+$], die wir als Nenner eines Bruches betrachten wollen, ein [ganzzahliger] Zähler p … mit dem Erfolge auffinden lässt, dass wir die beiden Gleichungen erhalten

$S = p/q + P_1$ und $S = (p + 1)/q - P_2$,

in welchen das Zeichen S den unendlichen Zahlenausdruck, die Zeichen P_1 und P_2 aber ein Paar durchaus positiver Zahlenausdrücke oder das erste zuweilen auch eine bloße Null bedeutet… [also $p/q \leq S < (p + 1)/q$].

Ein Zahlenausdruck S, in Betreff dessen es zu jedem beliebigen Werte von q ein p von der beschriebenen Beschaffenheit gibt, dass die zwei Gleichungen $S = p/q + P_1$ und $S = (p + 1)/q - P_2$ eintreten, heißt mir ein *messbarer* oder *ermesslicher* Ausdruck. Jeder andere dagegen *unmessbar* oder *unermesslich*. Den Bruch p/q nenne ich den *messenden;* und den Bruch $(p + 1)/q$ den *nächst größeren Bruch*. Da $S = p/q + P_1$, so nenne ich P_1 die *Ergänzung* des messenden Bruches. In dem besonderen Falle, dass $P_1 = 0$ ist, wo wir sonach $S = p/q$ haben, nenne ich den messenden Bruch *voll* oder … das *vollkommene Maß* von S."

Bolzano versucht nun verschiedene Abgeschlossenheitseigenschaften der messbaren Zahlen nachzuweisen, etwa, dass mit x und y auch $-x$ und $x + y$ messbar sind.

Es wurden verschiedene Versuche unternommen, den Ansatz von Bolzano zu rekonstruieren und zu modernisieren. Wir verweisen den hieran interessierten Leser neben [Rychlik 1962] und den entsprechenden Teilen der Bolzano-Edition [Berg 1975, 1976] auf [Rootselaar 1964], [Laugwitz 1964] und den Überblicksartikel [Hykšová 200?].

Schon mit seinen „Paradoxien des Unendlichen" hat Bolzano die nachfolgende Mengenlehre vorgefühlt und eingeleitet. Ebenso erweist er sich mit seiner Zahlenlehre als Vorläufer der Präzisierung des Kontinuumsbegriffs.

Die Arithmetisierung des Kontinuums: Weierstraß, Cantor, Heine, Méray und Dedekind

Die Konstruktion der reellen Zahlen im 19. Jahrhundert fällt unter ein allgemeines „arithmetisches Programm“, das Dedekind in seiner Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?“ so formuliert:

Dedekind (1888): „… Gerade bei dieser Auffassung [des stufenweisen Aufbaus des Zahlensystems] erscheint es als etwas Selbstverständliches und durchaus nicht Neues, dass jeder auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen lässt, eine Behauptung, die ich auch wiederholt aus dem Munde von Dirichlet gehört habe …

Aber ich erblicke keineswegs etwas Verdienstliches darin – und das lag auch Dirichlet gänzlich fern –, diese mühselige Umschreibung wirklich vorzunehmen und keine anderen als die natürlichen Zahlen benutzen und anerkennen zu wollen …“

Hier wird das pythagoreische Thema „alles ist Zahl“ wieder lebendig, wobei nun auch das Kontinuum arithmetisch betrachtet werden soll. Kronecker hat diese Arithmetisierung streng konstruktiv aufgefasst, Dedekind dagegen stellt die prinzipielle Möglichkeit in den Mittelpunkt.

Um analytische Sätze zumindest prinzipiell zahlentheoretisch formulieren zu können, müssen die reellen Zahlen selber erst arithmetisch eingeführt werden. Mit breiter öffentlicher Wirkung tat dies zuerst Weierstraß, der die reellen Zahlen in seinen Vorlesungen über Summen von sog. Aggregaten einführte (1860er Jahre, veröffentlicht erst durch Mitschriften von Hörern). „Aggregate“ sind hierbei Multimengen positiver rationaler Zahlen. Auf diesem Ansatz ruhen die Darstellungen von Heine und Cantor aus dem Jahre 1872, die die reellen Zahlen über Fundamentalfolgen einführen (unabhängig hiervon hat auch Méray diese Konstruktion entwickelt). Heine sieht sich angesichts der mündlich und in Notizen zirkulierenden Weierstraßschen Ideen verpflichtet, seine Darstellung als Ganzes zu rechtfertigen:

Heine (1872) „… Abgesehen von den erheblichen Schwierigkeiten, einen solchen Stoff darzustellen, trug ich Bedenken, eine Arbeit zu veröffentlichen, welche vorzugsweise die mir durch mündliche Mitteilung überkommenen Gedanken Anderer, besonders des Herrn *Weierstraß* enthält …“

Heine übernimmt die Fundamentalfolgen seiner Konstruktion von Cantor (wie er explizit festhält). Dennoch ist Heines Arbeit keine bloße Aufarbeitung „überkommener Gedanken Anderer“, sondern eine die „erheblichen Schwierigkeiten“ überwindende Darstellung, die neben einer Konstruktion von $\mathbb{R}$ auch die Hauptsätze der Analysis über stetige Funktionen entwickelt. Cantor selber verwendet Cauchy-Folgen rationaler Zahlen ab 1870 in seinen Vorlesungen. An Dedekind, der ihm im April 1872 seine Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ zuschickte, schreibt er:

Cantor (1937): „… Wie ich mich schon jetzt überzeugt habe stimmt diejenige Auffassung des Gegenstandes, welche ich, ausgehend von arithmetischen Beschäftigungen, seit einigen Jahren mir herangebildet, mit der Ihrigen sachlich überein; nur in der *begrifflichen Einführung* der Zahlgrößen findet ein Unterschied statt…“

Dedekind hat seine äquivalente Konstruktion von $\mathbb{R}$ über Schnitte bereits „im Herbst des Jahres 1858“ in Händen. In der Lehre, so berichtet er im Vorwort seines Buches, machte sich das Fehlen einer klaren Definition der reellen Zahlen besonders bemerkbar. Bemerkenswert ist, dass eine genaue Definition einer reellen Zahl zunächst eher in der Lehre vermisst wurde als in der Forschung: Auch Weierstraß’ Konstruktion findet im Hörsaal statt, und auch bei Heine, der durch seine Darstellung das „Fortschreiten der Funktionenlehre“ als Forschungsdisziplin befördern will, finden wir den Hinweis auf die Lehre des Stoffs (vgl. [Heine 1872, S. 173, Fußnote]).

Veröffentlicht hat Dedekind seine Konstruktion dann erst 1872:

Dedekind (1872): „… zu einer eigentlichen Publikation konnte ich mich nicht recht entschließen, weil erstens die Darstellung nicht ganz leicht, und weil außerdem die Sache selbst so wenig fruchtbar ist …“

Kurz zuvor erschienen die Arbeiten von Heine und Cantor, und Dedekind nimmt in seinem Buch noch Bezug darauf. Die Arbeit von Heine wird zu unrecht kritisiert, Cantors „Korrespondenzaxiom“ – dass nämlich den Fundamentalfolgen auch tatsächlich Punkte der Geraden entsprechen – lobt Dedekind dagegen als das „Wesen der Stetigkeit“ treffend.

Dedekind und Cantor stellen 1872 noch die anschaulich gegebene Gerade der arithmetischen Konstruktion zur Seite, ihre Punkte werden mit den konstruierten arithmetischen Gebilden in eine eindeutige Beziehung gebracht. Dedekind motiviert seine Schnitte aus einer offensichtlichen Eigenschaft einer stetigen Linie. In Heines Darstellung taucht dagegen – sehr modern – gar keine Gerade auf. Im Zuge der weiteren Präzisierung der Grundlagen erhebt sich die Frage, was eigentlich genau eine Gerade sein soll. In seiner zweiten Darstellung der Konstruktion von 1883 geht Cantor hierauf ein und gibt, wie heute üblich, einen „rein arithmetischen Begriff eines Punktkontinuums“ ([Cantor 1883]). Damit ist die Arithmetisierung des Kontinuums vollzogen.

Das komplexe Ergebnis und seine Kritik

Besondere Merkmale der Konstruktionen von Weierstraß, Dedekind, Cantor, Heine und Méray sind:

(1) Die mathematische Struktur $\mathbb{R}$ wird aus $\mathbb{Q}$, und damit im Wesentlichen aus $\mathbb{N}$, durch Betrachtung aller Teilmengen von $\mathbb{Q}$ oder Folgen in $\mathbb{Q}$ gewonnen. Eine reelle Zahl *ist* eine solche Teilmenge oder Folge (erst später genauer: eine Äquivalenzklasse von Folgen).

(2) Die Menge $\mathbb{R}$ wird mit einer Ordnung und arithmetischen Operationen versehen, die im 20. Jahrhundert dann selber wieder als Mengen aufgefasst werden.

(3) $\mathbb{R}$ wird zum mathematischen Modell eines Linearkontinuums, einer Geraden, erklärt. Dies geschieht durch Auszeichnung eines Nullpunktes 0 und einer Maßeinheit 1 auf der Geraden. Es gilt dann das Korrespondenzaxiom:

   (a) Jeder Strecke bzgl. 0 und 1 des Linearkontinuums entspricht ein Element von $\mathbb{R}$.

   (b) Jedem Element von $\mathbb{R}$ entspricht eine Strecke des Linearkontinuums.

   Die Gerade ist zunächst noch ein traditionell-geometrischer mathematischer Begriff, der mit dem intuitiven Kontinuumsbegriff zusammenfällt. Erst nach und nach wird die Gerade von vornherein arithmetisch begriffen und eingeführt, und das alte Linearkontinuum im Reich der Anschauung außerhalb der Mathematik angesiedelt. In der Folge spricht man dann innerhalb der Mathematik konsequent von $\mathbb{R}$ als dem Kontinuum.

(4) Infinitesimale Größen treten nicht auf, die Vollständigkeit der Struktur genügt, um mit Hilfe des Limesbegriffs die Argumente der Analysis ausdrücken zu können.

(5) Die Konstruktion erscheint als neue Stufe mathematischer Präzision. Der Begriff der irrationalen Zahl ist nun kein Grundbegriff mehr, sondern definiert.

(6) Die philosophische Tradition des Kontinuums ist in der Definition von $\mathbb{R}$ nicht wieder zu finden. $\mathbb{R}$ ist samt seiner Ordnung und Arithmetik ein Produkt aus Atomen.

Die Aussage (3) wird oft als das Cantorsche Korrespondenzaxiom bezeichnet. Cantor sieht explizit nur den Teil (b) als Axiom an, der besagt, dass die arithmetische Struktur $\mathbb{R}$ nicht überdimensioniert für das Kontinuum ist (vgl. S. 128 der unten wiedergegebenen Originalarbeit). Die Vertreibung der infinitesimalen Größen suggeriert dagegen eher eine Unterdimensionierung im Sinne von „so klein wie möglich“.

Die Konstruktion setzt sich rasch durch, spätestens mit dem Buch von Landau aus dem Jahr 1930 ist sie bereits ein im Detail etwas unwillig ausgeführter, wenn auch als wichtig und grundlegend empfundener Standard (Landau spricht von

„zum Teil langweiligen Mühen"). Heute gilt $\mathbb{R}$ generell als das adäquate mathematische Kontinuum, und den Konstruktionen des 19. Jahrhunderts wird eine große Bedeutung für die Entwicklung des Fachs zugeschrieben.

Analyse und Kritik der Konstruktion

Wir fragten oben: Ist unser $\mathbb{R}$ ein zeitverhaftetes Produkt des 19. Jahrhunderts oder die konsequente Umsetzung und endgültige Präzisierung einer allgemeinen mathematischen Idee? Die Präzisierung von „alles, was man mit $\mathbb{Q}$ approximativ beschreiben kann" lautete „alle Fundamentalfolgen in $\mathbb{Q}$" oder gleichwertig „alle Schnitte von $\mathbb{Q}$". Welche Folgen und Schnitte aber existieren? Die Antwort gehört dann schon in die Grundlagendiskussion des 20. Jahrhunderts. Sie besteht in einem Verweis auf die axiomatische Mengenlehre, die mit ihrer traditionellen Neigung zum mathematischen Platonismus die Existenzfrage noch einmal verschiebt, unter Gewinnung einer bislang unerreichten Präzision auf formaler Ebene.

Hermann Weyl hat den gravierenden Schritt, der in der Konstruktion von $\mathbb{R}$ vollzogen wurde, in seinem Buch „Das Kontinuum" klar herausgestellt:

Weyl (1918): „Während als … rationale Zahlen nur solche Mengen auftreten, die sich [aus den natürlichen Zahlen ergeben], ist es, um den Begriff der reellen Zahl in voller logischer Bestimmtheit fassen zu können, nötig, sich darüber Rechenschaft zu geben, was unter ‚*allen möglichen*' Mengen einer bestimmten Kategorie zu verstehen ist [aller Teilmengen von $\mathbb{Q}$ und damit von $\mathbb{N}$] … erst das Problem der reellen Zahlen erfordert dieses Eingehen auf das Fundament, auf die Prinzipien der logischen Urteilskombination; die Analysis der reellen Zahlen hat bis in die Tiefe ihrer logischen Wurzeln hinein einen völlig anderen Charakter als die Arithmetik der rationalen."

Weyls vorgetragene heute als „halbintuitionistisch" bezeichnete Kritik an der mengentheoretischen Fundierung der Mathematik teilen sicher nicht alle, aber diese Betonung des Herzstücks der Konstruktion von $\mathbb{R}$ ist innerhalb der Grundlagenforschung unumstritten: Es geht um „alle Teilmengen von $\mathbb{N}$", $\mathbb{R}$ ist im Wesentlichen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, und wir sind damit in einem Bereich angelangt, der eine Welt für sich ist. Wir wissen nicht, wie groß $\mathbb{R}$ ist. Die Menge $\mathbb{R}$ ist nicht absolut, sie hat in verschiedenen Modellen der klassischen Mathematik eine andere Extension und sogar eine andere Mächtigkeit. Die Menge $\mathbb{N}$ ist in jedem (guten, transitiven) Modell gleich, eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist in jedem Modell eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, aber die Gesamtheit aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist i. A. in zwei Modellen verschieden. Die platonische Haltung, zu sagen, das Universum hat alle Teilmengen von $\mathbb{N}$, einzelne Modelle aber unter Umständen nicht, lässt das gravierende Problem notgedrungen offen.

Der Schritt von der Endlichkeit zur fertigen Menge $\mathbb{N}$ ist groß, der Schritt von $\mathbb{N}$ zu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist ein zweiter, ganz anderer und mindestens ebenso großer Schritt. Der Leser verzeihe dem Autor, wenn er sich hier wiederholt, aber viele Mathematiker, die die Konstruktionen von $\mathbb{R}$ seit Jahren kennen und vorführen, sind mehr oder weniger bewusst der Meinung, dass die Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{N}$ und die Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ im Wesentlichen die gleiche logische Komplexität haben: Einmal nimmt man Paare aus natürlichen Zahlen, ein andermal Folgen aus $\mathbb{Q}$.

Später hat Weyl diesen Gedanken noch einmal aufgegriffen, und ihn sogar als Fazit der gesamten Entwicklung formuliert (zitiert nach [Weyl 1990]):

Weyl (1928): „… Das Altertum hat uns zum Problem des Kontinuums zwei wichtige Beiträge hinterlassen: a) eine weitgehende Analyse der mathematischen Frage, wodurch die einzelne Stelle im Kontinuum fixiert werden kann, und b) die Aufdeckung der philosophischen Paradoxien, welche im anschaulichen Wesen des Kontinuums liegen …

[zu a):] Erst im 19. Jahrhundert führt die moderne Mathematik das Problem zu Ende [durch die Definition von $\mathbb{R}$ durch Dedekind u. a.] … und wir können das Fazit der historischen Entwicklung des Problems a) mit den Worten ziehen:

Objekt der Zahlentheorie sind die einzelnen natürlichen Zahlen, Objekt der Kontinuumslehre die möglichen Mengen (oder die unendlichen Folgen) natürlicher Zahlen."

Auf dieses Fazit können sich sowohl die klassische Mengenlehre wie auch ihre Kritiker einigen. Die Frage ist: Was sind die möglichen Mengen natürlicher Zahlen?

Den engen Zusammenhang zwischen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ werden wir im zweiten Abschnitt des Buches noch genauer betrachten. Dort werden dann $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ im Mittelpunkt des Interesses stehen, und trotz der engen Verwandtschaft zu $\mathbb{R}$ ergibt sich eine ganz neuartige Sicht der Dinge.

Den Schritt zur abstrakten Potenzmenge von $\mathbb{N}$ haben einige Mathematiker wie etwa Brouwer und Weyl nicht mittragen wollen. Diese kritische Richtung innerhalb der Mathematik repräsentiert bereits Leopold Kronecker im 19. Jahrhundert mit seiner Kritik der Cantorschen Mengenlehre. Nicht selten wird dann auch der erste Schritt zur aktualen Unendlichkeit und weiter auch die klassische Logik des tertium non datur verworfen. Weyl lässt 1918 dieses Prinzip noch zu, argumentiert aber für einen konstruktiveren Aufbau der Mathematik. Der restriktive Ansatz führt in Bezug auf $\mathbb{R}$ zur heutigen sog. konstruktiven Analysis. Wir verweisen den hieran interessierten Leser auf die Darstellung zweier Vertreter dieser Richtung, nämlich [Bishop / Bridges 1985].

Innerhalb der Logik entwickelte sich ab den 30er-Jahren des 20. Jahrhunderts durch Arbeiten von Gödel, Turing, Church und anderen die Theorie der berechenbaren Funktionen, die eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ als rechnerisch zugänglich auszeichnet (diejenigen Zahlen, deren Dualdarstellung durch ein Computerprogramm ausgegeben werden kann). Weiter werden dort komplexere Teilmengen von $\mathbb{N}$ – und damit wieder bestimmte reelle Zahlen – untersucht, etwa die berechenbar aufzählbaren Mengen (diejenigen Teilmengen von $\mathbb{N}$, die sich durch ein Computer-Programm in beliebiger Reihenfolge auflisten lassen). Ein Grundresultat ist hier, dass es eine berechenbar aufzählbare Teilmenge von $\mathbb{N}$ gibt, deren charakteristische Funktion nicht berechenbar ist. Der Leser siehe für diese Teildisziplin der mathematischen Logik etwa [Rogers 1987] oder [Cutland 1980]. Traditionell versteht sie sich nicht als Kritik der klassischen mengentheoretischen Fundierung.