Überraschenderweise kann man nun relativ leicht zeigen, dass der zweite Spieler dieses Spiel gewinnt:

Übung

Spieler II hat eine Gewinnstrategie in diesem Spiel.

Auf der anderen Seite gelingt es zuweilen schnell zu zeigen, dass ein Spieler ein Spiel definitiv nicht gewinnen kann, ohne dass dabei unmittelbar eine Gewinnstrategie für den anderen Spieler zu Tage gefördert werden würde:

Übung

Sei A eine abzählbare Menge mit mindestens zwei Elementen.
Sei P eine Mahlo-Lusin-Menge im Folgenraum ${}^{\mathbb{N}}A$.
(Ein solches P existiert, falls wir (CH) annehmen.)
Dann existiert keine Gewinnstrategie für Spieler I in $G_A(P)$.

[Ist S eine Strategie für I, so ist [S] nirgendsdicht in ${}^{\mathbb{N}}A$.
Wegen P Mahlo-Lusin-Menge ist also $P \cap [S]$ abzählbar.
Spieler II kann dann $P \cap [S]$ wie im Beweis oben diagonalisieren.
Oder man argumentiert so: S ist ein nichtleerer perfekter Baum, also ist [S] überabzählbar. Also ist S keine Gewinnstrategie für I.]

Nichtdeterminierte Mengen

Bei perfekter Kenntnis der mathematischen Welt ist ein determiniertes Spiel eher langweilig, da einer der beiden Spieler immer gewinnt, kluges Spiel vorausgesetzt. Mit unseren Kenntnissen über nichtreguläre Mengen und den Körper [S] eines Baumes S können wir sofort ein – in diesem Sinne – interessantes Spiel P angeben:

Satz *(Bernstein-Mengen sind nicht determiniert)*

Es gibt ein $P \subseteq \mathcal{C}$, das nicht determiniert ist.
Genauer gilt: Ist $P \subseteq \mathcal{C}$ eine Bernstein-Menge, so ist P nicht determiniert.

Beweis

Sei $P \subseteq \mathcal{C}$ eine Bernstein-Menge, und sei S eine Strategie in Seq_2 für I oder II.
Dann ist $S \neq \emptyset$ ein perfekter Baum, also ist [S] nichtleer und perfekt.
Wegen P Bernstein-Menge ist also [S] keine Teilmenge von P und auch keine Teilmenge von $\mathcal{C} - P$. Also ist S keine Gewinnstrategie für Spieler I und auch keine Gewinnstrategie für Spieler II.

Das Argument funktioniert allgemein für abzählbare A mit mindestens zwei Elementen (denn dann ist ${}^{\mathbb{N}}A$ ein überabzählbarer polnischer Raum und folglich existiert eine Bernstein-Menge in ${}^{\mathbb{N}}A$). Positiv formuliert zeigt der Beweis:

Korollar *(Determiniertheit und Scheeffer-Eigenschaft)*

Sei A eine abzählbare nichtleere Menge, und sei $P \subseteq {}^{\mathbb{N}}A$ determiniert.
Dann hat P oder ${}^{\mathbb{N}}A - P$ die Scheeffer-Eigenschaft.

Diese Beobachtung liefert einen ersten Zusammenhang zwischen Determiniertheit und Regularität.

Für beliebig große Alphabete folgt die Existenz einer nicht determinierten Menge aus der folgenden Monotonie-Eigenschaft:

Satz *(Vererbung nicht determinierter Mengen auf größere Alphabete)*

Seien A, B Mengen, und sei $A \subseteq B$. Weiter sei $P \subseteq {}^{\mathbb{N}}A$ nicht determiniert.
Dann existiert eine nicht determinierte Menge $P' \subseteq {}^{\mathbb{N}}B$.

Beweis

Sei $G_B(P') = FG_B(P, \mathrm{Seq}_A)$ das zu $G_A(P)$ assoziierte freie Spiel auf B.
Dann ist $G_B(P')$ äquivalent zu $G_A(P)$, also nicht determiniert.

Damit erhalten wir nun einen allgemeinen Existenzsatz:

Korollar *(Existenz nichtdeterminierter Mengen, allgemeine Form)*

Sei A eine Menge mit mindestens zwei Elementen.
Dann existiert ein $P \subseteq {}^{\mathbb{N}}A$, das nicht determiniert ist.

Beweis

O.E. ist $\{0, 1\} \subseteq A$, und dann folgt die Behauptung aus dem Vererbungssatz und der Existenz einer nicht determinierten Teilmenge von $\mathscr{C}$.

Wir greifen hier auf die Konstruktion von Bernstein-Mengen und damit auf das Auswahlaxiom zurück. Wir halten ohne Beweis fest, dass sich die Existenz einer nichtdeterminierten Menge $P \subseteq {}^{\mathbb{N}}A$ für überabzählbare A sogar ohne Auswahlaxiom zeigen lässt.

Aufgrund der Wichtigkeit des Ergebnisses geben wir noch einen zweiten, etwas direkteren Beweis für die Existenz einer nicht determinierten Menge. Verläuft die Konstruktion einer Bernstein-Menge durch Diagonalisierung aller perfekten Mengen, so werden im folgenden Beweis alle Gewinnstrategien diagonalisiert. Die Konstruktion wiederholt aber im Wesentlichen nur die Konstruktion einer Bernstein-Menge.

Satz *(nicht determinierte Mengen aus einer Wohlordnung von $\mathscr{C}$)*

Es existiert ein $P \subseteq \mathscr{C}$, das nicht determiniert ist.
Genauer gilt: P lässt sich aus einer Wohlordnung auf $\mathscr{C}$ definieren.

Beweis

Sei $<_{\mathscr{C}}$ eine Wohlordnung von $\mathscr{C}$ minimaler Länge. Sei

$\mathscr{S} = \{ S \mid S \text{ ist Strategie für I oder II in } \mathrm{Seq}_2 \}$.

Dann gilt $|\mathscr{S} \times \{0, 1\}| = 2^{\omega}$.

Sei $h : \mathscr{C} \to \mathscr{S} \times \{ 0, 1 \}$ bijektiv, und sei $<$ die durch h induzierte Wohlordnung von $\mathscr{S} \times \{ 0, 1 \}$. Mit $<_{\mathscr{C}}$ hat dann auch $<$ minimale Länge. Wir definieren durch Rekursion über $\langle \mathscr{S} \times \{ 0, 1 \}, < \rangle$:

$f_{(S,\, i)}$ = „das $<_{\mathscr{C}}$-kleinste $f \in [S]$ mit $f \notin \{ f_{(S',\, j)} \mid (S', j) < (S, i) \}$“.

Ein solches f existiert, denn es gilt $|[S]| = 2^\omega$ für alle $S \in \mathscr{S}$ und $|\{ (S', j) \mid (S', j) < (S, i) \}| < 2^\omega$ nach minimaler Länge von $<$.

Wir setzen:

$D = \{ f_{(S,\, 0)} \mid S \in \mathscr{S} \}$.

Dann gilt:

(+) D ist nicht determiniert.

Beweis von (+)

Sei S eine Strategie für I. Dann ist $f_{(S,\, 1)} \in [S] - D$.
Also ist S keine Gewinnstrategie für I.
Sei also S eine Strategie für II. Dann ist $f_{(S,\, 0)} \in [S] \cap D$.
Also ist S keine Gewinnstrategie für II.

De facto ist $\mathscr{C} - D = \{ f_{S,\,1} \mid S \in \mathscr{S} \}$, was wir im Beweis nicht brauchen.

Die Idee des Beweises ist das sukzessive gegenseitige Ruinieren von Strategien. Eine Strategie „entsteht“ normalerweise durch Analyse eines gegebenen Spiels. Hier „entsteht“ umgekehrt ein Spiel durch eine Analyse aller möglichen Strategien. Die zugehörige Gewinnmenge D ist eine komplexe, aber keineswegs paradoxe Konstruktion. Wie für alle diagonalen Konstruktionen liegt ihrer Existenz die Auffassung zugrunde, dass wir in einer fertigen mathematischen Welt leben, in der wir auf alle Teilmengen einer Menge Zugriff haben, und nicht etwa diese Teilmengen durch unsere Beweise neu erschaffen. Die Irritation, die die Diagonalisierung zuweilen auslöst, ist oft Folge des Vergessens der Anführungszeichen um das Wort „entsteht“ für das Konstrukt eines mathematischen Arguments.

Eine Bedingung von Faust in seinem Pakt mit dem Teufel ist: „Zeig mir ein Spiel, bei dem man nie gewinnt.“ Mephisto antwortet, dass ihn ein solcher Auftrag nicht schrecke. Er kannte wohl obigen Beweis seit seinen Studientagen. Denn zweifellos ist der Teufel ein guter Mathematiker und ein Experte im Spiel mit Gewinnmenge D. Gewinnt eigentlich Gott immer gegen den Teufel in diesem Spiel? Auch er kann keine Gewinnstrategie haben. In diesem 0-1-Spiel öfter zu gewinnen als zu verlieren zeigt den wahren Könner.

Determiniertheit der offenen und abgeschlossenen Mengen

Wir beweisen nun den grundlegenden Satz der Theorie der unendlichen Zweipersonenspiele: Alle offenen und abgeschlossenen Mengen in einem Folgenraum mit beliebigem nichtleeren Zugvorrat A sind determiniert. Auf diesen Satz wird in späteren Determiniertheitsargumenten immer wieder zurückgegriffen werden.

Der Schlüssel für diese Resultate ist eine Analyse eines Spiels $G(P, T)$ durch Analyse der Startpositions-Spiele $G(P, T_t)$ für $t \in T$.

Definition *(gewonnene und verlorene Positionen)*

Sei $G(P, T)$ ein Spiel, und sei $t \in T$.
t heißt *gewonnen (verloren) für I*, falls I (II) das Spiel $G(P, T_t)$ gewinnt.
Analog heißt t *gewonnen (verloren) für II*, falls II (I) das Spiel $G(P, T_t)$ gewinnt.

Ist eine Partie noch nicht verloren, so kann man immer zumindest einen Zug machen, der „nicht schlecht" ist, d. h. einen solchen, der nicht in den Ruin führt:

Satz *(Verlustvermeidung)*

Sei $G(P, T)$ ein Spiel, und sei $t \in T$ nicht verloren für I. Dann gilt:

(i) Ist t eine Position für I, so existiert ein $s \in \mathrm{suc}_T(t)$, das nicht verloren für I ist.

(ii) Ist t eine Position für II, so ist jedes $s \in \mathrm{suc}_T(t)$ nicht verloren für I.

Eine analoge Aussage gilt für Positionen $t \in T$, die nicht verloren für II sind. Die Rollen von gerade und ungerade sind dann vertauscht.

Beweis

zu (i): Annahme nicht. Dann existiert für alle $s \in \mathrm{suc}_T(t)$ eine Gewinnstrategie S_s für II im Spiel $G(P, T_s)$.
Dann ist aber $S = \bigcup_{s \in \mathrm{suc}_T(t)} S_s$ eine Gewinnstrategie für II im Spiel $G(P, T_t)$. Also ist t verloren für I, *Widerspruch.*

zu (ii): Annahme nicht. Dann existiert ein $s \in \mathrm{suc}_T(t)$ derart, dass II eine Gewinnstrategie S in $G(P, T_s)$ hat. Dann ist aber S auch eine Gewinnstrategie für II in $G(P, T_t)$. Also ist t verloren für I, *Widerspruch.*

Diese Überlegungen motivieren die folgende Definition:

Definition *(E_I, E_{II}, S_I, S_{II})*

Sei $G(P, T)$ ein Spiel. Wir setzen:

$$E_I = E_I(P, T) = \{ t \in T \mid t \text{ ist nicht verloren für Spieler I} \},$$

$$E_{II} = E_{II}(P, T) = \{ t \in T \mid t \text{ ist nicht verloren für Spieler II} \},$$

$$S_I = S_I(P, T) = \{ t \in T \mid s \text{ ist nicht verloren für Spieler I für alle } s \leq t \},$$

$$S_{II} = S_{II}(P, T) = \{ t \in T \mid s \text{ ist nicht verloren für Spieler II für alle } s \leq t \}.$$

In der Regel sind E_I und E_{II} keine Bäume, was dann zur Definition von S_I und S_{II} Anlass gibt. S_I ist der von $\langle\,\rangle$ erreichbare Teil von E_I. Analog für S_{II}.

Übung

Geben Sie ein Spiel $G(P, \mathrm{Seq}_2)$ an, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:
$0^k \in E_I$, falls k gerade, und $0^k \in E_{II}$, falls k ungerade.