Damit ergibt sich für einen überabzählbaren polnischen Raum $\mathcal{X}$ das folgende Bild für die projektiven Mengen, wobei wir $\mathcal{X}$ weglassen:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & \Sigma^1_1 & & \Sigma^1_2 & & \dots & & \Sigma^1_n & & \Sigma^1_{n+1} & & \dots \\ \mathcal{B} = \Delta^1_1 & & & \Delta^1_2 & & \dots & & \Delta^1_n & & \Delta^1_{n+1} & & \dots & \\ & & \Pi^1_1 & & \Pi^1_2 & & \dots & & \Pi^1_n & & \Pi^1_{n+1} & & \dots \end{array}$$

Man kann zeigen, dass für alle polnischen Räume $\mathcal{X} = \langle X, \mathcal{U} \rangle$ gilt:

(i) $C(\mathcal{X}) \subset \Delta^1_2(\mathcal{X})$, falls X überabzählbar ist.

(ii) $\Pi^1_n(\mathcal{X})$, $\Sigma^1_n(\mathcal{X})$ und $\Delta^1_n(\mathcal{X})$ sind abgeschlossen unter der Suslin-Operation für alle $n \geq 2$.

Nur für den Schritt von Π^0_1 nach Σ^1_1 führen also die Suslin-Operation und die Projektion zum gleichen Ergebnis $\Pi^0_1(\mathcal{X})_{Su} = \Pi^0_1(\mathcal{X} \times \mathcal{N})_\exists$. Für $n = 1$ gilt $\Pi^1_1(\mathcal{X}) \subset \Pi^1_1(\mathcal{X})_{Su} \subset \Pi^1_1(\mathcal{X} \times \mathcal{N})_\exists$, und für $n \geq 2$ gilt $\Pi^1_n(\mathcal{X}) = \Pi^1_n(\mathcal{X})_{Su} \subset \Pi^1_n(\mathcal{X} \times \mathcal{N})_\exists$ für alle überabzählbaren polnischen Räume $\mathcal{X}$.

Beispiele

Wir stellen einige Beispiele für projektive Mengen zusammen, die keine Borel-Mengen sind.

Bäume

Sei $\langle s_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ eine festgewählte Aufzählung der Menge Seq (ohne Wiederholungen). Für ein $f \in \mathcal{C}$ setzen wir:

$$S(f) = \{ s_n \in \mathrm{Seq} \mid f(n) = 1 \},$$
$$\mathrm{Tr} = \{ f \in \mathcal{C} \mid S(f) \text{ ist ein Baum auf } \mathbb{N} \}.$$

Dieses Vorgehen können wir auch so beschreiben: Ein Baum T auf $\mathbb{N}$ ist eine Teilmenge von Seq. Wir identifizieren zunächst einen Baum T mit seiner Indikatorfunktion $\mathrm{ind}_T : \mathrm{Seq} \to \{ 0, 1 \}$. Weiter identifizieren wir dann Seq und $\mathbb{N}$ durch die Aufzählung $\langle s_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$. Dann erscheint T als ein Element von $\mathcal{C}$.

Die Menge Tr aller Bäume auf $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{C}$ (!). Wir setzen:

$$\mathrm{Tr}^* = \{ T \in \mathrm{Tr} \mid [T] \neq \emptyset \}.$$

Man kann nun zeigen, dass Tr* analytisch, aber nicht koanalytisch in $\mathcal{C}$ ist. Folglich ist Tr – Tr* koanalytisch und nicht analytisch.

Irreguläre konstruktible Mengen

In Gödels Modell existiert eine Wohlordnung von $\mathcal{N}$ der Länge ω_1. Diese Wohlordnung ist einfach definiert durch:

$f <_L g$, *falls* „f wird vor g in der L-Hierarchie konstruiert".

In einer geeignet organisierten L-Hierarchie erscheinen die konstruktiblen Mengen ja nacheinander (in einer transfiniten Rekursion), und wir können so insbesondere die konstruktiblen reellen Zahlen nach ihrem Erscheinen wohlordnen.

Eine bereits von Gödel durchgeführte Komplexitätsberechnung zeigt nun, dass $<_L \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ eine Δ^1_2-Menge in $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ ist. Wir wissen, dass eine solche Menge nicht Lebesgue-messbar ist und nicht die Baire-Eigenschaft hat. Also existiert in L eine bzgl. dieser Messbarkeitsbegriffe nichtreguläre Δ^1_2-Menge (in $\mathcal{N}^2$ und damit auch in $\mathcal{N}$). Da alle analytischen und alle koanalytischen Mengen messbar sind, ist $<_L$ ein Beispiel für eine echte Δ^1_2-Menge, d. h. eine Δ^1_2-Menge, die weder analytisch noch koanalytisch ist. $<_L$ kann auch nicht in der von den analytischen und koanalytischen Mengen erzeugten σ-Algebra liegen.

Ebenfalls von Gödel ist die (kompliziertere) Konstruktion einer Menge $P \in \Pi^1_1(\mathcal{N})$ in L, die in L die Scheeffer-Eigenschaft verletzt. Da alle analytischen Mengen die Scheeffer-Eigenschaft haben, ist P echt koanalytisch, d. h. ein Element von $\Pi^1_1(\mathcal{N}) - \Sigma^1_1(\mathcal{N})$.

Summen

Erdös und Stone haben gezeigt: Es gibt eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ und eine G_δ-Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass $A + B = \{ x + y \in \mathbb{R} \mid x \in A,\ y \in B \}$ keine Borelmenge in $\mathbb{R}$ ist. A + B ist analytisch (!) und folglich nicht koanalytisch.

Differenzen

Sierpiński hat eine G_δ-Menge $P \subseteq \mathbb{R}^2$ konstruiert derart, dass die Menge $D = \{ |x - y| \in \mathbb{R} \mid x, y \in P \}$ aller P-Abstände keine Borelmenge in $\mathbb{R}$ ist. D ist analytisch, und damit nicht koanalytisch.

Mengen stetiger Funktionen

Wir betrachten den Raum $X = C([0, 1])$ aller stetigen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Versehen mit der von der Supremumsnorm erzeugten Topologie ist dieser Raum ein polnischer Raum $\mathscr{X}$. Wir setzen:

$$\begin{aligned}
R \;=\; & \{ f \in X \mid f \text{ erfüllt den Satz von Rolle} \} \;= \\
& \{ f \in X \mid \text{für alle } a, b \in [0, 1] \text{ mit } a < b \text{ und } f(a) = f(b) \text{ existiert ein} \\
& \qquad a < c < b \text{ mit: die Ableitung } f'(c) \text{ existiert und } f'(c) = 0 \;\},\\
P \;=\; & \{ f \in X \mid f \text{ erfüllt den Mittelwertsatz} \} \;= \\
& \{ f \in X \mid \text{für alle } a, b \in [0, 1] \text{ mit } a < b \text{ existiert ein } a < c < b \text{ mit:} \\
& \qquad f'(c) \text{ existiert und } f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a) \;\}.
\end{aligned}$$

Woodin hat gezeigt, dass $R \in \Sigma^1_1(\mathscr{X}) - \Pi^1_1(\mathscr{X})$ und $P \in \Pi^1_2(\mathscr{X}) - \Sigma^1_2(\mathscr{X})$.

Ein weiteres Beispiel in diesem Raum $\mathscr{X}$ stammt von Humke und Laczkovich: Die Menge $P = \{ f \circ f \mid f \in X,\ \mathrm{rng}(f) \subseteq [0, 1] \}$ ist analytisch, aber nicht koanalytisch.

Siehe [Kechris 1994] für Beweise einiger dieser Beispiele und für andere Beispiele. Wir verweisen den Leser weiter auf [Rogers et al. 1980] und [Srivastava 1998].

Entfaltete Regularitätsspiele

Die Beweise der Regularitätsspiele des fünften Kapitels zeigen: Gilt $\mathrm{Det}(\Sigma^1_n)$ (oder gleichwertig $\mathrm{Det}(\Pi^1_n)$), so hat jede Σ^1_n-Menge $A \subseteq \mathcal{N}$ die Scheeffer-Eigenschaft, ist Baire-messbar und weiter universell messbar. Durch eine auf Solovay, Kechris und Martin zurückgehende Modifikation der Spiele können wir ein stärkeres Ergebnis erreichen.

Sei $P \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Im *entfalteten perfekten-Mengen-Spiel* $G^{\#}(P)$ spielen die Spieler I und II abwechselnd:

I	s_0, a_0		s_1, a_1		s_2, a_2		…
II		c_0		c_1		…,	

wobei $s_n \in \mathrm{Seq}_2$ und $a_n, c_n \in \{0, 1\}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Spieler I spielt also zusätzlich ein Element $\langle a_0, a_1, \dots \rangle$ des Cantorraumes.

Sei $h = \langle (s_0, a_0),\ c_0,\ (s_1, a_1),\ c_1, \dots \rangle$ eine Partie dieses Spiels. Wir setzen:

$$f_1(h) = s_0 ^\frown \langle c_0 \rangle ^\frown s_1 ^\frown \langle c_1 \rangle ^\frown \dots \in \mathcal{C}, \quad f_2(h) = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle \in \mathcal{C}.$$

Spieler I gewinnt die Partie h, falls $(f_1(h), f_2(h)) \in P$. Andernfalls gewinnt II.

Sei nun $A = p[P] \in \Sigma^1_{n+1}(\mathcal{C})$ für ein $P \in \Pi^1_n(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$. Man zeigt nun:

Satz *(über das entfaltete perfekte-Mengen-Spiel)*

Sei $P \in \Pi^1_n(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$, und sei $A = p[P]$. Dann gilt:

(i) Gewinnt I das Spiel $G^{\#}(P)$, so existiert eine nichtleere perfekte Teilmenge von A.

(ii) Gewinnt II das Spiel $G^{\#}(P)$, so ist A abzählbar.

Die Aussage (i) ist klar: Gewinnt I das Spiel $G^{\#}(P)$ mit der Strategie Σ, so gewinnt I das originale Spiel $G^*(P)$, indem er Σ folgt, aber die zusätzlichen Züge a_n ignoriert (oder nicht offen ausspielt, wenn man so will). Der Beweis der Aussage (ii) orientiert sich eng an dem entsprechenden Argument für das originale Spiel, und kann dem interessierten Leser als Übung überlassen bleiben.

Das Spiel $G^{\#}(P)$ ist nun de facto ein Spiel $G(P', T)$ mit einem $P' \in \Pi^1_n(\mathcal{N})$. Gilt also $\mathrm{Det}(\Pi^1_n)$, so haben nach dem Satz alle $\Sigma^1_{n+1}(\mathcal{C})$-Mengen (und damit auch alle $\Sigma^1_{n+1}(\mathcal{N})$-Mengen) die Scheeffer-Eigenschaft.

Ganz ähnlich ist die entfaltete Version $G^{\#\#}(P)$ des Banach-Mazur-Spiels definiert. Sei hierzu $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Spieler I und II spielen abwechselnd

I	s_0, a_0		s_2, a_1		s_4, a_2		…
II		s_1		s_3		…,	

wobei $s_n \in \mathrm{Seq} - \{\langle\rangle\}$ und $a_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $h = \langle (s_0, a_0),\ s_1, (s_2, a_1),\ s_3, \dots \rangle$ eine Partie dieses Spiels. Wir setzen:

$$f_1(h) = s_0 ^\frown s_1 ^\frown s_2 ^\frown \dots \in \mathcal{N}, \quad f_2(h) = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle \in \mathcal{N}.$$

I gewinnt die Partie h, falls $(f_1(h), f_2(h)) \in P$. Andernfalls gewinnt II. Man zeigt wieder in enger Anlehnung an die frühere Argumentation:

Satz *(über das entfaltete Banach-Mazur-Spiel)*

Sei $P \in \Pi^1_n(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$, und sei $A = p[P]$. Dann gilt:

(i) Gewinnt I das Spiel $G^{\#\#}(P)$, so existiert ein $s \in \mathrm{Seq}$ mit $N_s - A$ mager.

(ii) Gewinnt II das Spiel $G^{\#\#}(P)$, so ist A mager.

Das entfaltete Banach-Mazur-Spiel hat wieder eine Π^1_n-Gewinnmenge, und aus $\mathrm{Det}(\Pi^1_n)$ folgt dann, dass jedes $A \in \Sigma^1_{n+1}(\mathcal{N})$ die Baire-Eigenschaft besitzt.

Schließlich existieren auch entfaltete Messbarkeitsspiele, auf deren Diskussion wir hier verzichten. Insgesamt ergibt sich:

Satz *($\mathrm{Det}(\Pi^1_n)$ und Σ^1_{n+1}-Regularität)*

Sei $n \in \mathbb{N}$, und es gelte $\mathrm{Det}(\Pi^1_n)$. Dann hat jedes $A \in \Sigma^1_{n+1}(\mathcal{N})$ die Scheeffer-Eigenschaft, ist Baire-messbar und universell messbar.

Für den Fall n = 0 erscheinen bei dieser Argumentation die Regularitätseigenschaften der analytischen Teilmengen von $\mathcal{N}$ als eine Exegese des Satzes über die Determiniertheit abgeschlossener Spiele.

Determiniertheit und Regularität der projektiven Mengen

Die Determiniertheit der projektiven Mengen kann man nicht mehr in der klassischen Mathematik, d. h. innerhalb der Axiomatik ZFC, beweisen, es sei denn, die Theorie ZFC ist widerspruchsvoll – ein Zusatz, den wir fortan wieder unterdrücken. Genauer gilt dies bereits für die analytischen und koanalytischen Mengen: In Gödels Modell L existiert eine koanalytische Teilmenge P von $\mathcal{N}$, die die Scheeffer-Eigenschaft nicht besitzt. Das perfekte-Mengen-Spiel zeigt dann, dass $\mathrm{Det}(\Pi^1_1)$ und folglich auch $\mathrm{Det}(\Sigma^1_1)$ falsch in L und damit unbeweisbar in ZFC sind. (Alles, was in ZFC beweisbar ist, gilt in jedem Modell von ZFC, insbesondere also in L.)

Weiter zeigt die Existenz von P in L, dass obige Entfaltung bestmöglich ist: Aus $\mathrm{Det}(\Pi^1_0)$ kann man nicht folgern, dass alle $\Pi^1_1(\mathcal{N})$-Mengen die Scheeffer-Eigenschaft haben.

Dass in L die Determiniertheit analytischer Spiele falsch ist, relativiert für manche das Leitmotiv „alle einfachen Mengen sind determiniert". Andere halten daran fest und argumentieren, dass durch die Theorie der unendlichen Spiele und der großen Kardinalzahlen ein starkes Argument gegen die Hypothese vorliegt, dass das mengentheoretische Universum mit L zusammenfällt:

Untersuchungen von Martin, Steel, Woodin und anderen haben aber gezeigt, dass die Determiniertheit der projektiven Mengen aus der Existenz großer Kardinalzahlen folgt (die in L nicht existieren können), und weiter wurden die kleinsten hierzu notwendigen Kardinalzahlen genau bestimmt. Ein noch relativ einfach zu zeigendes Ergebnis ist der folgende Satz von Martin (1970):

Satz *(volle Maße und Determiniertheit)*

Es existiere ein 0-1-wertiges volles Maß auf einer überabzählbaren Menge M, d. h. ein Maß $\mu : \mathcal{P}(M) \to \{0, 1\}$ mit M überabzählbar.
Dann ist jede analytische und koanalytische Teilmenge von $\mathcal{N}$ determiniert.

Die Voraussetzung des Satzes ist gleichwertig zur mengentheoretischen Hypothese „es existiert eine messbare Kardinalzahl“, die bereits 1930 von Ulam untersucht wurde und heute zu den prominentesten großen Kardinalzahlaxiomen gehört. Die Voraussetzung lässt sich noch etwas abschwächen, es ist aber nach obigen Bemerkungen über L eine Hypothese notwendig, die impliziert, dass eine nichtkonstruktible Menge existiert (vgl. [Harrington 1978]).

Für die Determiniertheit der weiteren Stufen der projektiven Hierarchie müssen wesentlich stärkere Prinzipien herangezogen werden. Der nach langer Suche gefundene Hauptsatz ist hier das Martin-Steel-Theorem (bewiesen 1985, siehe [Martin / Steel 1988]):

Satz *(Satz von Martin-Steel)*

Existieren unendlich viele sog. Woodin-Kardinalzahlen, so ist jede projektive Teilmenge von $\mathcal{N}$ determiniert.
Genauer gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: Existieren n solche Zahlen, so gilt $\mathrm{Det}(\Pi^1_n)$.

Man kann weiter zeigen, dass die Existenz nur endlich vieler Woodin-Kardinalzahlen nicht genügt, um die Determiniertheit aller projektiven Mengen beweisen zu können.

Über das Axiom (AD) der Determiniertheit aller Mengen reeller Zahlen hat Woodin 1985 gezeigt:

Satz *(Satz von Woodin über das Axiom der Determiniertheit)*

Die folgenden Theorien sind äquikonsistent, d. h. die Widerspruchsfreiheit der einen Theorie impliziert die Widerspruchsfreiheit der anderen Theorie und umgekehrt:

(i) ZFC zusammen mit „es gibt unendlich viele Woodin-Kardinalzahlen“.

(ii) ZF zusammen mit (AD).

Der Leser beachte, dass der Satz von Martin und Steel eine direkte Implikation aufstellt, während im Satz von Woodin von relativer Konsistenz oder gleichwertig von der Existenz von Modellen die Rede ist.

Wir können die in diesen Sätzen auftretenden Kardinalzahlprinzipien nicht definieren und müssen den interessierten Leser auf die Forschungs- und Spezialliteratur verweisen. Wichtig und allgemein verständlich ist aber die Struktur des Ergebnisses: Große Kardinalzahlhypothesen – gewisse über ZFC substantiell hinausgehende Axiome also – implizieren die Determiniertheit von Mengen reeller Zahlen. Und sie erlauben die Konstruktion von Modellen, in denen jede Menge reeller Zahlen alle erdenklichen Regularitätseigenschaften besitzt. In diesen Modellen ist dann das Auswahlaxiom notwendig falsch, die Äquivalenzrelation von Vitali zum Beispiel kann kein vollständiges Repräsentantensystem mehr besitzen. Hinzu kommt, dass sich ein natürliches Modell ergibt, in dem (AD) gilt, nämlich das sobezeichnete Modell $L(\mathbb{R})$, das genau wie L konstruiert wird, wobei man aber auf der Stufe 0 statt mit der leeren Menge mit allen reellen Zahlen startet, die das Mengenuniversum zu bieten hat. Anders: $L(\mathbb{R})$ ist der transfinite Abschluss von $\mathbb{R}$ unter einfachen Operationen, ganz so wie L der transfinite Abschluss der leeren Menge unter einfachen Operationen ist. Existieren hinreichend große Kardinalzahlen, so ist $L(\mathbb{R})$ ein Modell von ZF und (AD). Dieses Ergebnis stammt ebenfalls von Woodin, unter Benutzung des Satzes von Martin und Steel.

Damit werden verschiedene mathematische Zweige zusammengeführt. Die Theorie der großen Kardinalzahlen wird oft als kanonische Erweiterung der klassischen Axiomatik bezeichnet, und in dieser Erweiterung kann man neue Sätze über die reellen Zahlen zeigen und insbesondere das Kontinuumsproblem für die projektiven Mengen positiv beantworten. Es ist bemerkenswert, dass erst Objekte einer sehr hohen Komplexität es gestatten, bestimmte Aussagen über Objekte einer relativ niedrigen Komplexität zu beweisen. Die Methoden der mathematischen Logik erlauben es zu zeigen, dass die Zuhilfenahme sehr großer Kardinalzahlen unvermeidlich ist. Hausdorff, Suslin, Alexandrov und Lusin konnten nicht ahnen, dass so viele Fragen über die projektiven Mengen eine derart verwickelte und verfeinerte axiomatische Umgebung benötigen würden, um ihnen eine positive Antwort geben zu können. Für negative Antworten genügt L und damit eine Erweiterung von ZFC (um das Axiom „$V = L$“ = „jede Menge ist konstruktibel“), die ohne große Kardinalzahlen auskommt.

Regularität der projektiven Mengen

Schwächer als Determiniertheits-Aussagen sind Fragen der Regularität. Die Regularitätseigenschaften der projektiven Mengen sind unabhängig von ZFC. Neben einer koanalytischen Menge ohne die Scheeffer-Eigenschaft gibt es im Modell L eine $\Delta^1_2(\mathcal{N})$-Menge, die weder Baire- noch Lebesgue-messbar ist. Andererseits hat Solovay 1970 ein Modell konstruiert, in dem jede projektive Menge die Regularitätseigenschaften von Scheeffer, Baire und Lebesgue besitzt.

Für die Konstruktion des Modells von Solovay ist wieder eine große Kardinalzahlhypothese notwendig, wie Shelah 1984 gezeigt hat; es genügt hier aber bereits eine sog. unerreichbare Kardinalzahl, was heute als eine eher milde Hypothese betrachtet wird. Diese Zahlen wurden bereits 1908 von Hausdorff untersucht. Sie lassen sich relativ einfach definieren:

Definition *(unerreichbare Kardinalzahlen)*

Sei $\langle W, < \rangle$ eine Wohlordnung einer überabzählbaren Menge W.
$\langle W, < \rangle$ hat *unerreichbare Länge*, falls gilt:

(i) Für alle $x \in W$ ist $|\mathcal{P}(W_x)| < |W|$.

(ii) Für alle $M \subseteq W$ mit $|M| < |W|$ ist M beschränkt in $\langle W, < \rangle$, d. h. es existiert ein $y \in W$ mit: $x < y$ für alle $x \in M$.

Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt *unerreichbar*, falls eine Wohlordnung $\langle W, < \rangle$ unerreichbarer Länge existiert mit $|W| = \kappa$.

Der mit Cohens Erzwingungsmethode bewiesene Satz von Solovay lautet nun (vgl. [Solovay 1965, 1970]):

Satz *(Satz von Solovay über Regularitätseigenschaften)*

Es existiere eine unerreichbare Kardinalzahl. Dann gilt:

(a) Es existiert ein Modell von ZFC, in dem jede projektive Menge reeller Zahlen die Scheeffer-Eigenschaft besitzt und Baire- und Lebesgue-messbar ist.

(b) Es existiert ein Modell von ZF, in dem jede Menge reeller Zahlen die drei Regularitätseigenschaften aus (a) besitzt (und in dem das Auswahlaxiom falsch ist).

Genauer gilt: Bereits für die Konstruktion eines Modells, in dem jedes $P \in \Sigma^1_2(\mathcal{N})$ die Scheeffer-Eigenschaft hat, wird eine unerreichbare Kardinalzahl benötigt (oder eine Hypothese dieser Stärke). Das Gleiche gilt für ein Modell, in dem jede Σ^1_3-Menge reeller Zahlen Lebesgue-messbar ist. Genauer hat Shelah gezeigt (vgl. [Shelah 1984]):

Satz *(Satz von Shelah über die Lebesgue-Messbarkeit von Σ^1_3-Mengen)*

Es sei jede Σ^1_3-Menge reeller Zahlen Lebesgue-messbar.
Sei $\kappa = \omega_1$. Dann ist κ eine unerreichbare Kardinalzahl in L.

Zwei Bemerkungen hierzu: Der Satz liefert ein konkretes Modell mit einer unerreichbaren Kardinalzahl. Er zeigt weiter, dass unter der Messbarkeitshypothese das Modell L die erste überabzählbare Kardinalzahl falsch berechnet: Die erste überabzählbare Kardinalzahl im Sinne von L ist sicher nicht unerreichbar in L, da für eine Wohlordnung $\langle W, < \rangle$ der Länge ω_1 gilt, dass $|\mathcal{P}(W_\omega)| \geq |W|$, wobei hier ω das erste Limeselement von W bezeichnet. Es folgt, dass es unter der Messbarkeitsvoraussetzung nur abzählbar viele konstruktible reelle Zahlen gibt. (Diese Möglichkeit der falschen Berechnung der ersten überabzählbaren Kardinalzahl in L war schon länger bekannt, aber Shelahs Ergebnis verbindet sie mit einer Messbarkeitshypothese projektiver Mengen reeller Zahlen. Diese Hypothese impliziert $V \neq L$ und stärker, dass der transfinite Abschluss der leeren Menge unter einfachen Operationen nur abzählbar viele reelle Zahlen erzeugt.)

Zweitens: Ein Ergebnis dieses Typs gestattet es – unter Heranziehung des zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes – zu beweisen, dass zur Konstruktion eines Modells, in dem die Voraussetzung gilt (hier also: „jede Σ^1_3-Menge ist Lebesgue-messbar“), nicht auf eine Hypothese der Stärke der Konklusion verzichtet werden kann (hier also: „es existiert ein Modell mit einer unerreichbaren Kardinalzahl“).

Für ein Modell mit Lebesgue-messbaren Σ^1_2-Mengen genügt dagegen ZFC. Und erstaunlicherweise genügt ZFC auch, um ein Modell zu konstruieren, in dem sogar jede projektive Menge reeller Zahlen die Baire-Eigenschaft besitzt. Dies hat ebenfalls Shelah gezeigt, und damit einen überraschenden logischen Unterschied zwischen den Aussagen „jede projektive Menge reeller Zahlen ist Lebesgue-messbar“ und „jede projektive Menge reeller Zahlen hat die Baire-Eigenschaft“ aufgezeigt.

Noch eine weitere Bemerkung: Man kann prinzipiell nicht ausschließen, dass in ZFC gezeigt werden kann, dass keine unerreichbare Kardinalzahl existiert. (Dies gilt für alle großen Kardinalzahlaxiome und ist kein Makel dieser Prinzipien: Große Kardinalzahlaxiome erhöhen substantiell die Stärke von ZFC, indem mit ihrer Hilfe gezeigt werden kann, dass ZFC widerspruchsfrei ist.) Damit lautet obige Behauptung genauer: Die Regularitäts-Eigenschaften der projektiven Mengen sind unabhängig von ZFC *modulo der Konsistenz einer unerreichbaren Kardinalzahl.* Der modulo-Zusatz wird der Einfachheit halber oft unterdrückt, ist aber von prinzipieller Bedeutung. Z. B. ist ein Beweis in ZFC nicht auszuschließen, dass eine nicht Lebesgue-messbare Σ^1_3-Menge reeller Zahlen existiert. Ein solcher Beweis gilt aber als ebenso unwahrscheinlich wie ein Beweis von $0 = 1$ in ZFC selbst (den man ebenfalls nicht ausschließen kann). Unerreichbare Kardinalzahlen sind gutverstandene Objekte.

Es ist bemerkenswert, dass die ganze Stärke der klassischen Mathematik nicht ausreicht, um z. B. zu entscheiden, ob die projektiven Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder allgemeiner der Räume $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, Lebesgue-messbar sind oder nicht. Diese Mengen ergeben sich aus der Menge $\mathcal{U}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^0_1(\mathbb{R}^n)$ durch die iterierte Anwendung der sehr einfachen Operationen der Komplementbildungen c_n und der Projektionen p_n, mit

$$c_n(A) \;=\; \mathbb{R}^n - A \quad \text{und}$$

$$p_n(B) \;=\; \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid (x_1, \ldots, x_n, y) \in B \text{ für ein } y \in \mathbb{R} \}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Schließt man das System $\mathcal{U}^*$ aller offenen Euklidischen Mengen unter diesen beiden Operationen ab, so erhält man genau die projektiven Mengen der Euklidischen Räume. Die Stärke der klassischen Mathematik reicht noch aus, um Fragen über die einfachsten dieser Mengen beantworten zu können. Für komplizierte projektive Mengen brauchen wir zusätzliche Prinzipien, um Antworten über die Natur dieser Mengen geben zu können: Entweder große Kardinalzahlen oder regulierende Axiome wie „V = L“ = „jede Menge ist konstruktibel“. Unter großen Kardinalzahlen sieht die Theorie wie eine Erweiterung der klassischen Ergebnisse über einfache projektive Mengen aus. Im Universum L dagegen erscheint die klassische Analyse von Cantor, Hausdorff, Suslin und anderen als bestmöglich. L liefert Gegenbeispiele knapp hinter den klassischen Sätzen, ohne dabei in irgendeiner Weise pathologisch oder künstlich zu wirken. Das Modell zeigt in schöner Weise, dass die erste Forschergeneration an die Grenzen des innerhalb ihrer Welt Möglichen gestoßen ist und nicht nur an die Grenzen individueller Verstandeskraft.

Die projektiven Mengen haben eine sehr einfache – fast möchte man sagen entwaffnend einfache – Definition: Wir starten nur mit den offenen Mengen, der Rest ist Komplementbildung und Projektion. Dass wir diesen Prozess nur mit den äußersten Methoden verstehen können, liegt nicht an der Komplexität der Operationen selbst, sondern an der Komplexität ihrer Materie. Im Reich der reellen Zahlen gibt es eine Reihe leicht zu erreichender Orte, die uns die ungeheure Weite dieses Reiches besonders klar vor Augen führen.