

4. 2D-Aufgaben der Elastizitätslehre

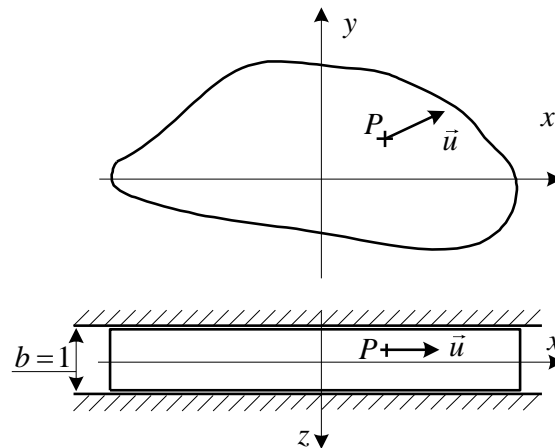
2D – zwei dimensional.

Die 2D-Aufgaben:

- Ebener Verzerrungszustand (EVZ).
- Verallgemeinerter ebener Spannungszustand (ESZ).
- Rotationssymmetrische / Axialsymmetrische Aufgabe (RSA/ASA).

4.1.1. Ebener Verzerrungszustand (EVZ)

Definition: Der Körper hat eine herausgehobene Ebene. Die Formänderung in den Ebenen, die zur herausgehobenen Ebenen parallel sind, ist dieselbe und auch der Abstand der Ebenen ändert sich nicht.



Hier ist die herausgehobene Ebene die Ebene $z = 0$.

In den Ebenen $z = \text{konstant}$ ist die Formänderung dieselbe und der Abstand der Ebenen ist konstant.

Die Formänderung des Körpers kann mit der Formänderung einer einzigen Ebene $z = \text{konstant}$ gekennzeichnet werden.

Das Verschiebungsfeld:

$$\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z, \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w \equiv 0.$$

Der Verzerrungszustand:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0,$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \equiv 0, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \equiv 0.$$

Der Verzerrungstensor:

$$[\underline{A}] = [\underline{A}(x, y)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Der Spannungszustand:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1-2\nu} \nu \right), \quad \sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1-2\nu} \nu \right),$$

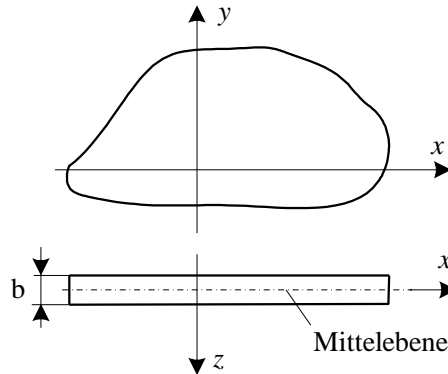
$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Die unabhängigen Kenngrößen: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

4.1.2. Verallgemeinerter ebener Spannungszustand (ESZ)

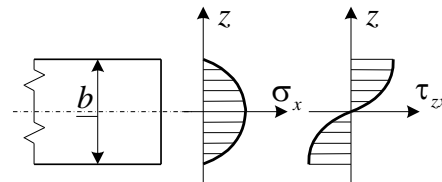
Bezeichnung: verallgemeinerter ebener Spannungszustand = Scheibenaufgabe = in eigener Ebene belastete Platte.

Scheibe: Ein Körper, bei dem die eine Dimension wesentlich kleiner ist als die beiden anderen, man kann eine Mittelebene definieren und die resultierende Belastung / Kraft entlang der Dicke liegt in der Mittelebene.



Annahmen:

- $b \ll$ als die anderen Dimensionen der Körper.
- Die Mittelfläche $z = 0$ ist eine Ebene.
- In der äußeren Belastung gibt es keine Kräfte in Richtung z.
- Die Resultierende der zur Ebene xy parallelen Kräfte liegt in der Ebene xy.
- Die Oberflächen $z = \pm \frac{b}{2}$ sind unbelastet $\Rightarrow \sigma_z \Big|_{z=\pm \frac{b}{2}} = 0$.
- Wenn die Dicke b klein ist, dann $\sigma_z = 0$ gilt nicht nur an den Oberflächen $z = \pm \frac{b}{2}$, sondern auch innerhalb des Körpers.



- $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ sind gerade Funktionen von z.
- τ_{zx}, τ_{zy} sind ungerade Funktionen von z.

Durchschnittsspannungen:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_x dz, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_y dz, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{xy} dz, \quad \bar{\sigma}_x - \text{Sigma x Quer.}$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{b} \int_{(b)} \sigma_z dz = 0, \quad \bar{\tau}_{zx} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{zx} dz = 0, \quad \bar{\tau}_{zy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \tau_{zy} dz = 0.$$

Tensor der Durchschnittsspannungen: $[F] = [\underline{F}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{yx} & 0 \\ \bar{\tau}_{xy} & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

Mechanisches Modell: Der Körper (die Scheibe) wird mit seiner (ihrer) Mittelebene modelliert / ersetzt und die mechanischen Kenngrößen (die Durchschnittswerte) werden zur Mittelebene gebunden.

Stoffgesetz mit Durchschnittswerten:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_x + \nu \bar{\varepsilon}_y), \quad \bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_y + \nu \bar{\varepsilon}_x),$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}, \quad \sigma_z = 0 \Rightarrow \bar{\varepsilon}_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y),$$

$$\bar{\tau}_{xz} = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}_{xz} = 0, \quad \bar{\tau}_{yz} = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}_{yz} = 0.$$

Durchschnittsverzerrungen:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{b} \int_{(b)} \varepsilon_x dz, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{b} \int_{(b)} \varepsilon_y dz, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{b} \int_{(b)} \gamma_{xy} dz.$$

Tensor der Durchschnittsverzerrungen: $[\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{A}}(x, y)] = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x & \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{yx} & 0 \\ \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xy} & \bar{\varepsilon}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_z \end{bmatrix}.$

Die kinematischen Gleichungen:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x},$$

Durchschnittsverchiebungen:

$$\bar{u} = \frac{1}{b} \int_{(b)} u dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{b} \int_{(b)} v dz, \quad \bar{w} = \frac{1}{b} \int_{(b)} w dz \equiv 0,$$

$$\bar{\vec{u}}(x, y) = \bar{u}(x, y) \vec{e}_x + \bar{v}(x, y) \vec{e}_y.$$

4.1.3. Rotationssymmetrische / Axialsymmetrische Aufgaben (RSA / ASA)

Definition: Sowohl die Geometrie, als auch die Belastung des Körpers ist axialsymmetrisch / rotationssymmetrisch.

Folge der Definition: - Weder die Geometrie, noch die Belastung des Körpers hängt von der Koordinate φ ab.

- Die Punkte des Körpers verschieben sich in der Meridianebene. Die Meridianebene ist die Ebene Rz in Zylinderkoordinaten.

Die rotationssymmetrische Aufgabe wird in zylindrischem Koordinaten-system R, z, φ formuliert / aufgeschrieben.

Die Koordinaten des Verschiebungsfeldes:

$$u = u(R, z),$$

$$v = v(R, z),$$

$$w \equiv 0.$$

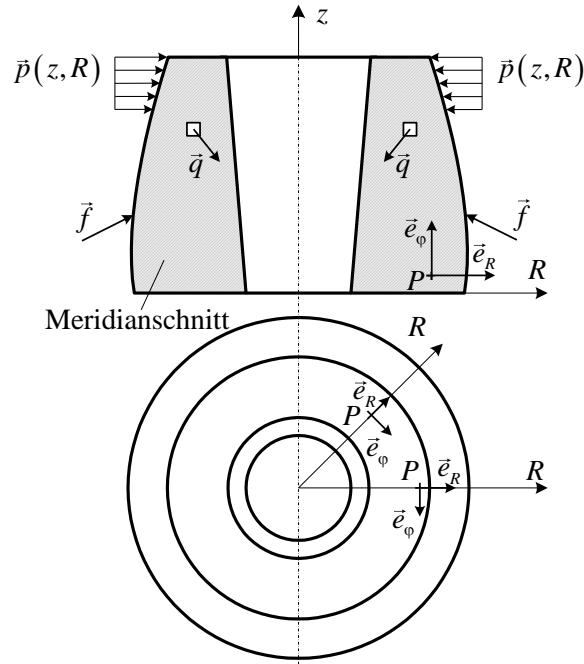
Das Verschiebungsfeld: $\vec{u}(R, z) = u(R, z) \vec{e}_R + v(R, z) \vec{e}_z.$

Jeder Punkt verschiebt sich in eigener Meridianebene.

Der Verzerrungszustand:

$$\varepsilon_R(R, z) = \frac{\partial u}{\partial R}, \quad \varepsilon_z(R, z) = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{Rz}(R, z) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R},$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{2(R+u)\pi - 2R\pi}{2R\pi} = \frac{u}{R}, \quad \gamma_{\varphi z} = \gamma_{R\varphi} = 0.$$



Der Verzerrungstensor: $\left[\underline{\underline{A}} \right]_{Rz\varphi} = \left[\underline{\underline{A}}(R, z) \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\varphi \end{bmatrix},$

Der Spannungszustand:

Das allgemeine Hookesche Gesetz: $\sigma_R(R, z) = 2G \left(\varepsilon_R + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right), \quad A_I = \varepsilon_R + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi,$
 $\sigma_z(R, z) = 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right),$
 $\sigma_\varphi(R, z) = 2G \left(\varepsilon_\varphi + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \right),$
 $\tau_{Rz} = G\gamma_{Rz}, \quad \tau_{\varphi z} = \tau_{R\varphi} = 0.$

Der Spannungstensor: $\left[\underline{\underline{F}} \right]_{Rz\varphi} = \left[\underline{\underline{F}}(R, z) \right] = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{Rz} & 0 \\ \tau_{zR} & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varphi \end{bmatrix},$

Die unabhängigen Veränderlichen: $\varepsilon_R, \varepsilon_z, \varepsilon_\varphi, \gamma_{Rz} \cdot \quad \sigma_R, \sigma_z, \sigma_\varphi, \tau_{Rz}.$

4.1.4. Ähnlichkeiten und Unterschiede der 2D-Aufgaben

a) Ähnlichkeiten:

- Alle mechanischen Kenngrößen hängen bei allen drei 2D-Aufgaben nur von zwei Ortskoordinaten ab.
- Es gibt bei allen drei 2D Aufgaben nur zwei unabhängige Verschiebungsfelder.

$$\left. \begin{array}{l} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \bar{u} = \bar{u}(x, y) \\ \bar{v} = \bar{v}(x, y) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} u = u(R, z) \\ v = v(R, z) \end{array} \right\}$$

EVZ ESZ RSA

- Alle mechanischen Kenngrößen des Körpers können aus den zwei unabhängigen Verschiebungsfeldern abgeleitet werden.

b) *Unterschiede:*

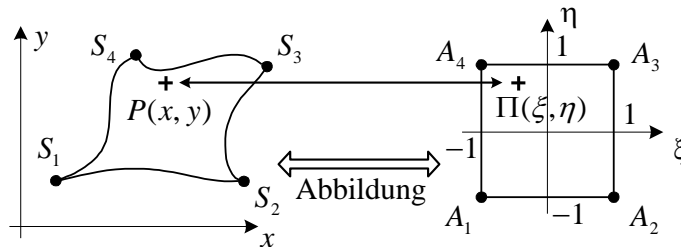
- Die Festigkeitszustände (Verzerrungen, Spannungen) sind aufgabenabhängig.
- Die Form des Materialgesetzes.

4.2. Die isoparametrische Näherung / Interpolation

Definition: Eine Näherung isoparametrisch ist, wenn sowohl die Formulierung, die Beschreibung der Geometrie des Elementes als auch die Näherung des Verschiebungsfeldes mit denselben Funktionen geschieht.

Die Beschreibung der Geometrie des Elementes / Isoparametrische Abbildung / Zuordnung

Ein Rechteckbereich wird auf ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 2 abgebildet.



Zu jedem Punkt P wird gegenseitig ein Punkt Π zugeordnet: $P \Leftrightarrow \Pi$.

Die Abbildung muß gegenseitig (hin und zurück) funktionieren.

Die Formulierung:

$$\left. \begin{array}{l} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m h_i(\xi, \eta) y_i \end{array} \right\}.$$

m - die Anzahl der Punkte S_i ($i = 1, 2, \dots, m$), die die Grenzen des Rechteckbereiches angeben.

$x_i, y_i, (i = 1, 2, \dots, m)$ - die Ortskoordinaten der Punkte S_i .

$h_i(\xi, \eta)$ - Formfunktionen / Approximationsfunktionen / Ansatzfunktionen.

Die Erstellung der Formfunktionen

Anforderung: die Zuordnung / Abbildung muß auch für die Punkte $S_i \leftrightarrow A_i$ gültig sein.

Deshalb haben die Formfunktionen die folgenden Eigenschaften: $h_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j, \\ 0, & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$

Die Gegenseitigkeit der Abbildung, Ableitungen:

Folgende Funktionen sind bekannt: $\left. \begin{array}{l} f(x, y) \\ x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{array} \right\},$

Man soll die partiellen Ableitungen von f nach ξ, η , beziehungsweise x, y aufschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \right\}$$

In Matrizenform geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}(\xi, \eta)} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

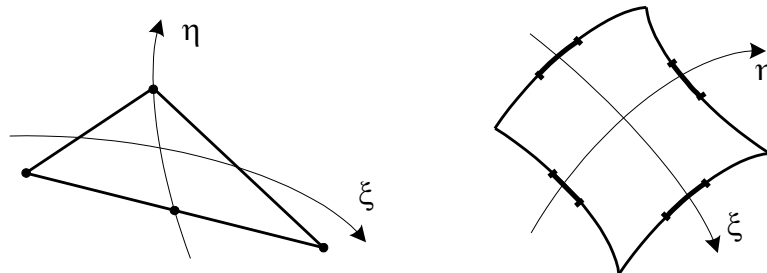
die *Jacobische*
Funktion-Matrix

Die Abbildung ist gegenseitig eindeutig, wenn die Jacobische-Matrix invertierbar ist.
Voraussetzung der Invertierbarkeit ist: $\det|\underline{\underline{J}}(\xi, \eta)| \neq 0$.

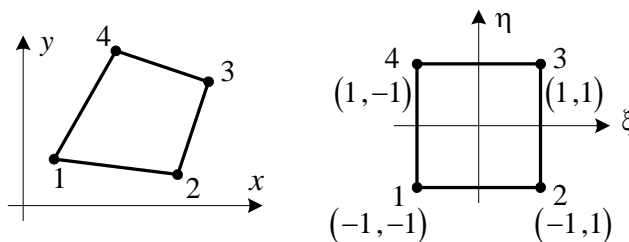
Die inverse Jacobische Matrix: $\underline{\underline{J}}^{-1} = \frac{1}{\det|\underline{\underline{J}}(\xi, \eta)|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$.

Das Element ist nicht degeneriert (die Abbildung ist gegenseitig eindeutig), wenn:

- die Form des Bereiches konvex ist (der gerade Fall im Bild ist noch erlaubt),
- die Punkte mit gerader Numerierung (an der Seitenmitte) müssen in das mittlere Drittel der Seiten bei quadratischen Elementen liegen.



a) Lineares Rechteckelement



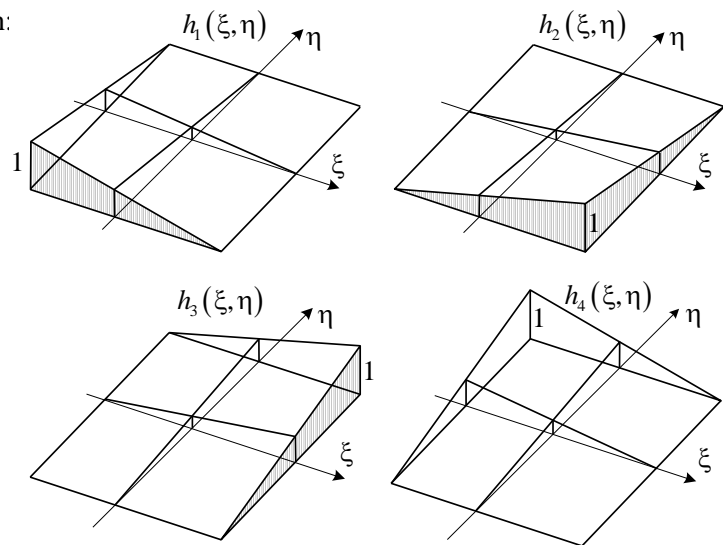
Formfunktionen:

$$h_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad h_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

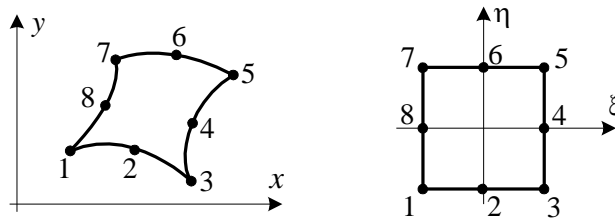
$$h_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad h_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$

Bemerkung: Jede Formfunktion enthält auch ein quadratisches Glied.
Die Formfunktionen / die Flächen in Richtung ξ, η bestehen aus geraden Linien.

Veranschaulichung der Formfunktionen:



b) *Quadratisches Rechteckelement:*

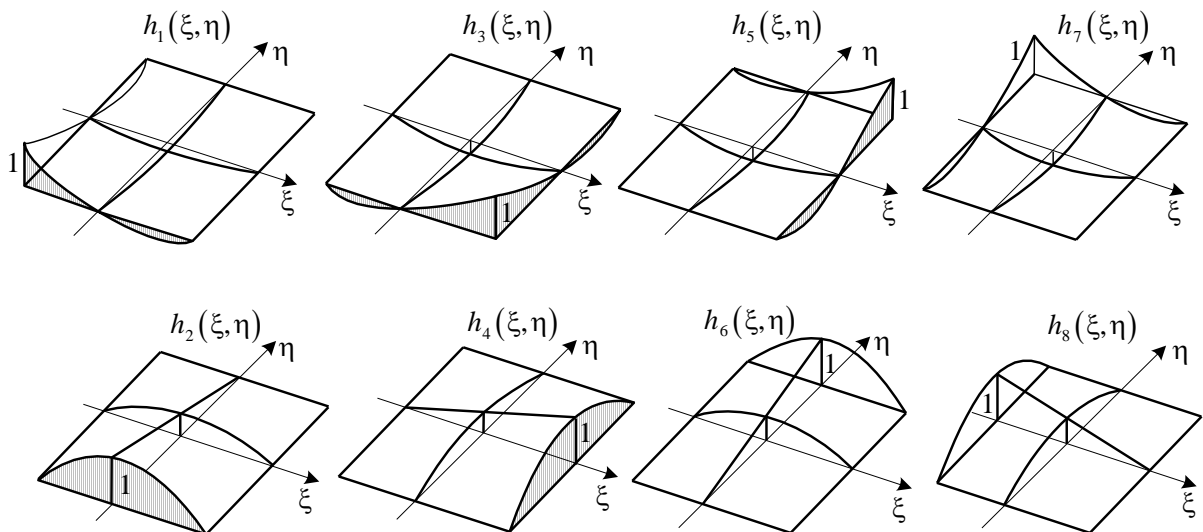


Die Formfunktionen:

$$\begin{aligned}
 h_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1), & h_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \\
 h_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), & h_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2), \\
 h_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), & h_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \\
 h_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), & h_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2).
 \end{aligned}$$

Jede Formfunktion enthält auch ein Glied dritten Grades.

Veranschaulichung der Formfunktionen:



c) Erstellung von Dreieckelementen aus Viereckelementen mittels Degeneration

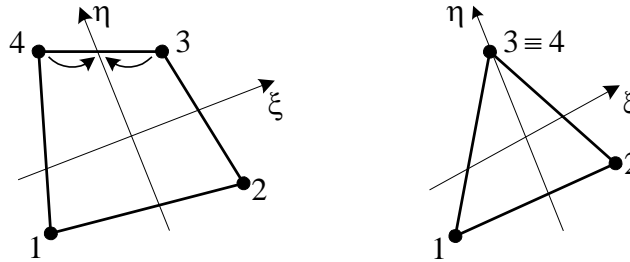
Es kann vorkommen, daß man den untersuchten Bereich / Körper mit Viereckelementen nicht gut / nicht entsprechend vernetzen kann.

Es ist möglich, daß man auch die Anwendung von Dreieckelementen benötigt.

Degeneration: Ausgehend aus einem Viereckelement erstellt man ein Dreieckelement durch die Einigung von zwei Eckpunkten (durch die Schrumpfung einer Seite auf Null).

Folge: Man muß die Formfunktionen modifizieren.

- Lineares Dreieckelement



Die Abbildung (mit den Formfunktionen des linearen Viereckelementes):

$$x(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_4,$$

$$y(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_4.$$

Degeneration: $x_3 = x_4, \quad y_3 = y_4.$

$$x(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_2 + \frac{1}{2}(1+\eta)x_3,$$

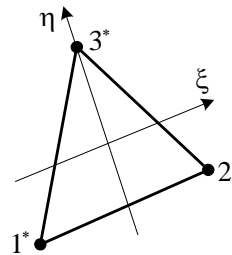
$$y(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_2 + \frac{1}{2}(1+\eta)y_3.$$

Die Formfunktionen des Dreieckelementes:

$$h_1^*(\xi, \eta) = h_1(\xi, \eta),$$

$$h_2^*(\xi, \eta) = h_2(\xi, \eta),$$

$$h_3^*(\xi, \eta) = h_3(\xi, \eta) + h_4(\xi, \eta).$$



- Quadratisches Dreieckelement

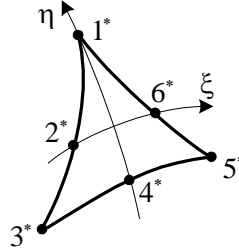
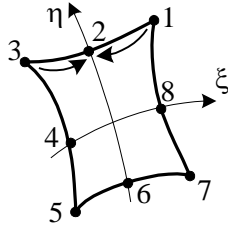
Die Formfunktionen des Viereckelementes:

$$h_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1), \quad i = 1, 3, 5, 7,$$

$$h_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \left[1 - (\xi\eta_i)^2 - (\xi_i\eta)^2 \right], \quad i = 2, 4, 6, 8.$$

Degeneration: $\left. \begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_3 \\ y_1 = y_2 = y_3 \end{array} \right\}$

Veranschaulichung der Degeneration:



Die Formfunktionen des Dreieckelementes:

$$h_1^*(\xi, \eta) = h_1(\xi, \eta) + h_2(\xi, \eta) + h_3(\xi, \eta),$$

$$h_3^*(\xi, \eta) = h_5(\xi, \eta) + \Delta h(\xi, \eta),$$

$$h_5^*(\xi, \eta) = h_7(\xi, \eta) + \Delta h(\xi, \eta),$$

$$h_2^*(\xi, \eta) = h_4(\xi, \eta),$$

$$h_4^*(\xi, \eta) = h_6(\xi, \eta) - 2\Delta h(\xi, \eta),$$

$$h_6^*(\xi, \eta) = h_8(\xi, \eta),$$

Die Korrektionsfunktion: $\Delta h(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$.

Mit der Korrektionsfunktion kann man die Isotropie der Verschiebungsfelder gewährleisten.

Isotropie der Verschiebungen: die Verschiebungsfelder hängen nicht davon ab, wo wir mit der Numerierung der Knotenpunkte beginnen.

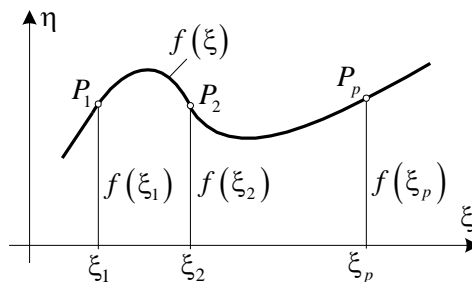
4.3. Interpolationsmethoden

Interpolation: Wir wollen eine Funktion erstellen, die eine diskrete gegebene Menge von Punkten (von Funktionswerten) oder daneben noch in diesen Punkten die Ableitungen der diskreten Funktion enthält.

Mit der Interpolation kann man die Funktionswerte und die Ableitungen zwischen den gegebenen diskreten Punkten annähern.

4.3.1. Die Lagrangesche Interpolation

Bekannt: Die Funktionswerte einer Funktion $f(\xi)$ in den Punkten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$.



Aufgabe: Erstellung einer Funktion $\eta(\xi)$, die die gegebenen Punkte P_i ($i=1, 2, \dots, p$) enthält, und die Funktion $f(\xi)$ annähert.

$$\eta(\xi) \approx f(\xi).$$

Die Näherungsfunktion: $\eta(\xi) = \sum_{j=1}^p L_j(\xi) f(\xi_j)$.

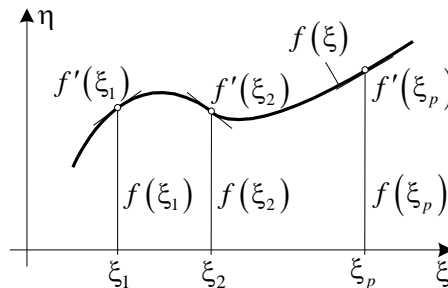
p ist die Anzahl der Punkte, wo die Funktionswerte zur Verfügung stehen.

Die allgemeine Form der *Lagrangeschen* Interpolationspolynome:

$$L_j(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_p)}{(\xi_j - \xi_1)(\xi_j - \xi_2) \dots (\xi_j - \xi_p)}.$$

4.3.2. Die *Hermitesche* Interpolation

Bekannt sind: Die Funktionswerte $f(\xi_1), f(\xi_2) \dots f(\xi_p)$ und die ersten Ableitungen $f'(\xi_1), f'(\xi_2), \dots, f'(\xi_p)$ in den gegebenen Punkten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$.



Aufgabe: Die Erstellung einer Funktion $\eta(\xi)$, die nicht nur die gegebenen Funktionswerte enthält, sondern auch in diesen Punkten die vorgeschriebenen Ableitungen hat.

Die Näherungsfunktion:
$$\eta(\xi) = \sum_{j=1}^p H_{0j}(\xi) f(\xi_j) + \sum_{j=1}^p H_{1j}(\xi) f'(\xi_j).$$

p – die Anzahl der Punkte, wo die Funktionswerte $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_p)$ und die Ableitungswerte $f'(\xi_1), f'(\xi_2), \dots, f'(\xi_p)$ zur Verfügung stehen.

Die *Hermiteschen* Interpolationspolynome:
$$H_{0j}(\xi) = [1 - 2(\xi - \xi_j)L_j'(\xi_j)]L_j^2(\xi),$$

$$H_{1j}(\xi) = (\xi - \xi_j)L_j^2(\xi).$$

4.4. Vergleich der „traditionellen“ und der isoparametrischen finiten Elemente

Die Eigenschaften der „traditionellen“ finiten Elemente

- Die Elementgrenzen sind gerade Linien, oder ebene Flächen.
- Zur Integration benutzt man ein zum Element gebundenes, lokales Koordinatensystem
- Das Verschiebungsfeld wird in dem lokalen KS mit einer Potenzreihe / mit einem Polynom angenähert. Die Koeffizienten der Reihe haben keinen physischen Inhalt.
- Die Koeffizienten der Reihe werden mit den Knotenpunktparametern im lokalen Koordinatensystem ausgedrückt. An der Elementebene muß man ein lineares Gleichungssystem lösen.
- Die Steifigkeitsmatrix und der Knotenbelastungsvektor werden im lokalen Koordinatensystem erstellt. (Die Integration in geschlossener Form ist auch bei geraden / ebenen Seiten nicht einfach.)
- Zur Kopplung der Elemente müssen die Steifigkeitsmatrizen und die Knotenpunkt-Belastungsvektoren in ein globales KS transformiert werden.

Zielstellung:

- Wir wollen die Lösung eines Gleichungssystems in Elementebene vermeiden.
- Wir wollen auch die Koordinatentransformation eliminieren.
- Wir wollen die Integration vereinfachen.

Die Eigenschaften der isoparametrischen Elemente

- Die Elementgrenzen können auch gekrümmte Linien, oder gekrümmte Flächen sein.
- Die Beschreibung der Elementgeometrie geschieht mit einer Abbildung. Damit nehmen wir ein elementgebundenes „natürliches“ Koordinatensystem ξ, η auf.

- Die Näherung der Verschiebungsfelder erfolgt elementweise in dem globalen KS x,y,z .
- In den Ansatzfunktionen erscheinen unmittelbar die Knotenpunktparameter im globalen Koordinatensystem.
- Die Integration wird nach den natürlichen Koordinaten ξ,ζ,η für einen Quadratbereich durchgeführt.
- Die Integration wird numerisch vorgenommen.