

de Gruyter Lehrbuch

tom Dieck · Topologie

Tammo tom Dieck

Topologie

2., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage



Walter de Gruyter
Berlin · New York 2000

Tammo tom Dieck
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Bunsenstr. 3–5
D-37073 Göttingen

Mathematics Subject Classification 2000: 55-01; 57-01

♻ Gedruckt auf säurefreiem Papier, das die US-ANSI-Norm über Haltbarkeit erfüllt.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

TomDieck, Tammo:
Topologie / Tammo tom Dieck. – 2., völlig neu bearb. und
erw. Aufl. – Berlin ; New York : de Gruyter, 2000
(De-Gruyter-Lehrbuch)
ISBN 3-11-016236-9

© Copyright 2000 by Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 10785 Berlin.

Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Printed in Germany.

Druck und Bindung: WB-Druck GmbH & Co., Rieden am Forggensee.

Umschlagentwurf: Hansbernd Lindemann, Berlin.

Vorwort

Das vorliegende Lehrbuch bietet eine Einführung in das Gesamtgebiet der algebraischen und geometrischen Topologie. Der Text der ersten Auflage wurde vollständig umgearbeitet und durch Kapitel zur algebraischen Topologie ergänzt.

Durch das Studium der Topologie lernt man eine mathematische Denkweise, die von grundsätzlicher Bedeutung für die gesamte Mathematik ist: die Denkweise der globalen (geometrischen) Strukturen. Eine globale Struktur ist qualitativer Natur. Sie läßt sich daher nur durch entsprechende globale Begriffssysteme erfassen.

Die Topologie ist kein „primäres“ mathematisches Gebiet. Grundkenntnisse aus der Analysis (einschließlich der mengentheoretischen Topologie) und der Algebra (einschließlich der Kategoriensprache) werden benutzt. Die wesentlichen Methoden der Topologie sind die Quintessenz jahrzehntelanger Forschungen und daher nicht im ersten Anlauf vollständig zu meistern.

Traditionell beginnt man daher mit einem Kurs über Fundamentalgruppe und Überlagerungen (Kapitel I) und Flächen (Kapitel II). Die Flächentheorie liefert die wünschenswerte Anschauung und ist durch Verzicht auf technische Perfektion auch direkt zugänglich. Die Fundamentalgruppe ist der Prototyp eines Überganges von der „kontinuierlichen“ Geometrie zur „diskreten“ Algebra. Es versteht sich, daß diese traditionellen Gegenstände weitverzweigte Anwendungen in anderen Gebieten haben (etwa in der Funktionentheorie und der Differentialgeometrie) und schon darum zur mathematischen Allgemeinbildung zählen.

Eine Fortsetzung (oder auch ein fortgeschrittener Einstieg) ist auf dreierlei Weise möglich: Homologie und Kohomologie, Homotopie, Differentialtopologie. Der Homologiekurs wird durch die Kapitel IV, V, VII und X bereitgestellt. Der Homotopiekurs beginnt mit den Kapiteln III, VI, VII. Die geometrische Topologie wird hier in den Kapiteln VIII, IX und natürlich auch II präsentiert. Das achte Kapitel wurde im Vertrauen darauf verfaßt, daß aus der Analysis ein Grundverständnis über differenzierbare Mannigfaltigkeiten vorhanden ist.

Ein Text muß eine lineare Anordnung haben, und interessierte Leserinnen und Leser werden dieses Buch auch von vorn bis hinten studieren. Von dieser Idealvorstellung ausgehend wurde der Text verfaßt. Zwischen den drei genannten Kursen und der Einführung in die Topologie gibt es eine Fülle von Querverbindungen. Die grundlegenden Gegenstände der Topologie — Zellenkomplexe, Mannigfaltigkeiten und Bündel — muß man ja auf jeden Fall kennenlernen. Die Wirklichkeit läßt sich nicht linear anordnen, sie hat selbst eine (topologische?) globale Struktur.

Damit die Mühe des Bergsteigens lohnt, öffnet sich im elften Kapitel ein Ausblick mit Panorama.

Das Buch ist eingeteilt in Kapitel (römisch) und Abschnitte (arabisch). Auf (4.9) im zweiten Kapitel wird durch II (4.9) verwiesen; innerhalb des Kapitels fällt die II aber weg. Durch \square wird das Ende eines Beweises (oder sein Fehlen) markiert; durch \diamond das Ende einer anderen nummerierten Einheit (Beispiel, Bemerkung). Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis.

Der Text enthält zahlreiche Beispiele. Diese haben auch die Funktion von Aufgaben, denn fast immer erfordern sie weitere Überlegungen oder Lektüre. Wegen zusätzlicher Aufgaben konsultiere man auch die erste Auflage (sie wird trotz ihrer Umarbeitung nicht als „Jugendsünde“ verworfen).

Über jedes Kapitel des Buches gibt es eigene Lehrbücher — das möge man bedenken. Es ist daher leicht, etwas Elementares und Wichtiges zu benennen (zum Beispiel den Lefschetzschen Fixpunktsatz oder die Spanier-Whitehead-Dualität), das sich hier nicht findet.

Ich bedanke mich für die vielen Anregungen und Ratschläge, die ich zu diesem Buchprojekt erhalten habe; insbesondere haben mich Gespräche mit Theodor Bröcker, Wolfgang Lück und Volker Puppe beeinflusst.

Ich bedanke mich beim Verlag Walter de Gruyter für die gute Zusammenarbeit und die Bereitwilligkeit, das Buch in der von mir konzipierten Form zu veröffentlichen. Ich danke Frau Zimmermann, die meinen Text wiederum sehr gründlich durchgesehen und etliche Verbesserungen eingearbeitet hat, und Herrn Karbe, der das Projekt vom Verlag aus betreut und mit vielen Anregungen und Ermunterungen gefördert hat.

Göttingen, im August 2000

Tammo tom Dieck

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Vorwort | v |
| I Fundamentalgruppe und Überlagerungen | 1 |
| 1 Homotopie | 1 |
| 2 Zusammenhang | 5 |
| 3 Faserungen und Kofaserungen | 8 |
| 4 Die Fundamentalgruppe | 13 |
| 5 Die Fundamentalgruppe des Kreises | 17 |
| 6 Windungszahl | 22 |
| 7 Der Satz von Seifert und van Kampen | 26 |
| 8 Überlagerungen | 32 |
| 9 Fasertransport. Automorphismen | 37 |
| 10 Transformationsgruppen | 40 |
| 11 Prinzipalbündel | 44 |
| 12 Klassifikation von Überlagerungen | 47 |
| 13 Ein Dualitätssatz für die Ebene | 53 |
| II Flächen | 57 |
| 1 Beispiele für Flächen | 57 |
| 2 Simpliziale Komplexe | 62 |
| 3 Flächenkomplexe | 67 |
| 4 Klassifikation von Flächen | 70 |
| 5 Die Euler-Charakteristik | 75 |
| 6 Flächen und Euler-Charakteristik | 77 |
| 7 Ausschöpfung von Flächen | 80 |
| 8 Die Fundamentalgruppe von Flächen | 83 |
| 9 Verzweigte Überlagerungen | 87 |
| III Homotopiegruppen | 91 |
| 1 Homotopiegruppen | 91 |
| 2 Der Ausschneidungssatz | 102 |
| 3 Der Einhängungssatz | 106 |
| 4 Der Abbildungsgrad | 111 |
| 5 Anhang: Abbildungsräume | 111 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| IV | Axiomatische Homologie und Kohomologie | 118 |
| 1 | Die Axiome von Eilenberg und Steenrod | 119 |
| 2 | Kohomologie | 123 |
| 3 | Einfache Folgerungen | 124 |
| 4 | Reduzierte Homologie und Kohomologie | 127 |
| 5 | Homologie von Sphären | 129 |
| 6 | Der Abbildungsgrad | 131 |
| 7 | Der Brouwersche Fixpunktsatz | 134 |
| 8 | Die Mayer-Vietoris-Sequenz | 137 |
| 9 | Einhängung | 142 |
| 10 | Kofaserungen | 144 |
| 11 | Kolimites | 148 |
| 12 | Limites | 151 |
| V | Singuläre Homologie und Kohomologie | 156 |
| 1 | Kettenkomplexe | 156 |
| 2 | Singuläre Homologie | 161 |
| 3 | Kontrahierbare Räume | 164 |
| 4 | Das Kreuzprodukt | 164 |
| 5 | Baryzentrische Unterteilung | 166 |
| 6 | Kleine Simplexe. Ausschneidung | 168 |
| 7 | Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten | 171 |
| 8 | Mayer-Vietoris-Sequenzen | 174 |
| 9 | Gebiete und ihre Ränder | 174 |
| 10 | Das Orientierungsbündel einer Mannigfaltigkeit | 176 |
| 11 | Die Dimensionen größergleich n | 179 |
| 12 | Die Fundamentalklasse | 182 |
| 13 | Mannigfaltigkeiten mit Rand | 183 |
| 14 | Abbildungsgrad | 184 |
| 15 | Simpliziale Objekte | 185 |
| VI | Homotopie | 187 |
| 1 | Angereicherte Homotopiekategorien | 187 |
| 2 | Kofaserungen | 192 |
| 3 | Faserungen | 200 |
| 4 | Exakte Sequenzen | 202 |
| 5 | Spektren | 211 |
| 6 | Anhang: Kompakt erzeugte Räume | 218 |

| | |
|--|-----|
| VII Komplexe | 227 |
| 1 CW-Komplexe | 227 |
| 2 Homotopietheorie von CW-Komplexen | 233 |
| 3 CW-Approximation | 237 |
| 4 Homologie und Kohomologie von CW-Komplexen | 242 |
| 5 Einfache Anwendungen | 248 |
| 6 Die Euler-Charakteristik | 251 |
| 7 Der Satz von Hurewicz | 254 |
| 8 Homotopieklassifikation | 260 |
| 9 Eilenberg-MacLane-Räume | 262 |
| 10 Hopf-Räume | 263 |
| VIII Mannigfaltigkeiten | 266 |
| 1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten | 266 |
| 2 Untermannigfaltigkeiten | 268 |
| 3 Mannigfaltigkeiten mit Rand | 269 |
| 4 Einige Beispiele | 270 |
| 5 Tangentialraum und Differential | 272 |
| 6 Transversalität | 273 |
| 7 Isotopie | 277 |
| 8 Orientierung | 279 |
| 9 Der analytische Abbildungsgrad | 281 |
| 10 Der Satz von Hopf | 284 |
| 11 Randverheftungen | 286 |
| 12 Einbettungen | 290 |
| 13 Die Homologietheorie der Bordismen | 293 |
| 14 Vektorfelder | 299 |
| 15 Isotopien | 300 |
| 16 Tubulare Umgebungen | 303 |
| 17 Der Satz von Pontrjagin und Thom | 309 |
| 18 Projektive Räume | 314 |
| 19 Eigentliche Abbildungen | 317 |
| 20 Eigentliche Operationen | 319 |
| 21 Glatte Operationen. Quotienten | 323 |
| IX Bündel | 330 |
| 1 Prinzipalbündel. Faserbündel | 330 |
| 2 Vektorraumbündel | 334 |
| 3 Tangentialbündel und Normalenbündel | 343 |
| 4 Universelle Bündel | 344 |
| 5 Lokale Beschreibung von Bündeln | 357 |
| 6 Bestimmung von Tangentialbündeln | 361 |

| | | |
|-----------|--|-----|
| X | Dualität. Produkte | 367 |
| 1 | Paarungen | 367 |
| 2 | Dualität | 370 |
| 3 | Euklidische Räume | 373 |
| 4 | Multiplikative Kohomologietheorien | 376 |
| 5 | Paarungen multiplikativer Theorien | 380 |
| 6 | Produkte in der singulären Theorie | 381 |
| 7 | Produkte für punktierte Theorien | 386 |
| 8 | Mannigfaltigkeiten mit Rand | 389 |
| 9 | Die Schnittform. Signatur | 391 |
| 10 | Die Künneth-Formel | 392 |
| 11 | Einfach zusammenhängende ebene Gebiete | 394 |
| 12 | Algebraische Topologie der Flächen | 396 |
| XI | Charakteristische Klassen | 402 |
| 1 | Thom-Klassen und Euler-Klassen | 402 |
| 2 | Der Thom-Isomorphismus | 406 |
| 3 | Projektive Räume | 407 |
| 4 | Projektive Bündel | 410 |
| 5 | Chern-Klassen | 412 |
| 6 | Spaltprinzip und Chern-Charakter | 419 |
| 7 | Multiplikative Thom-Klassen | 423 |
| 8 | Stiefel-Whitney-Klassen | 424 |
| 9 | Thom-Spektren | 425 |
| 10 | Die Gysin-Sequenz | 426 |
| 11 | Pontrjagin-Klassen | 427 |
| 12 | Charakteristische Zahlen | 429 |
| 13 | Schnittzahlen. Eulerzahl | 430 |
| | Literatur | 437 |
| | Index | 447 |

I Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Viele geometrisch-topologische Fragen können als die Frage nach stetigen Abbildungen mit geeigneten Eigenschaften formuliert werden. Die gewünschten Eigenschaften sind oft so robust, daß sie durch kleine Änderungen der Abbildung nicht zerstört werden. Das bringt die analytische Idee der Approximation und die geometrische Idee der Deformation ins Spiel. Die Idee der Deformation wird durch den Begriff der Homotopie präzisiert. Wir beginnen deshalb mit dem für alles Weitere grundlegenden Homotopiebegriff. Mit ihm beginnt die qualitative Geometrie, und er ist der Ausgangspunkt für die Algebraisierung der Topologie.

Die Fundamentalgruppe eines Raumes wurde 1895 von Poincaré eingeführt. Sie ist ein Modell für alle weiteren algebraischen Invarianten, die Räumen zugeordnet werden. Der Betrachtung von Wegen in Räumen liegt die Idee zugrunde, daß man geometrische Information von einem Punkt zu einem anderen transportieren möchte. Im allgemeinen hängt aber das Ergebnis des Transports vom Weg ab. Soweit nur die Homotopieklasse des Weges relevant ist, tritt die Fundamentalgruppe auf.

Durch die Theorie der Überlagerungen wird die Fundamentalgruppe ihrer formalen Natur enthoben und als Symmetriegruppe erkannt. Es ist im weiteren Verlauf grundsätzlich wichtig, geometrische Invarianten mit zusätzlicher Symmetriestruktur zu betrachten. Die Klassifikation der Überlagerungen eines Raumes durch Untergruppen seiner Fundamentalgruppe ist analog zur Galois-Theorie der Körpererweiterungen. Die universelle Überlagerung ist für alle globalen geometrischen Untersuchungen von Mannigfaltigkeiten wichtig.

1 Homotopie

Das Einheitsintervall $[0, 1]$ werde mit I bezeichnet, X und Y sind beliebige topologische Räume. Eine *Homotopie* ist eine stetige Abbildung $f: X \times I \rightarrow Y$, $(x, t) \mapsto f(x, t) = f_t(x)$; wir nennen sie eine Homotopie von f_0 nach f_1 . Wenn wir eine Homotopie in der Form $(x, t) \mapsto f_t(x)$ notieren, so unterstellen wir, daß sie in beiden Variablen (x, t) simultan stetig ist. Eine Homotopie f ist eine parametrisierte Schar f_t von stetigen Abbildungen mit *Anfang* f_0 und *Ende* f_1 . Wir nennen f_0 und f_1 *homotop*, in Zeichen $f: f_0 \simeq f_1$, wenn es eine Homotopie f von f_0 nach f_1 gibt. Ist f eine Homotopie von f_0 nach f_1 , so ist $f^-: X \times I \rightarrow Y$, $(x, t) \mapsto f(x, 1-t)$ eine Homotopie von f_1 nach f_0 , genannt die zu f *inverse Homotopie*. Ist $g: X \times I \rightarrow Y$

eine Homotopie von f_1 nach f_2 , so wird durch

$$h(x, t) = \begin{cases} f(x, 2t) & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(x, 2t - 1) & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine stetige Abbildung $X \times I \rightarrow Y$ definiert, die eine Homotopie von f_0 nach f_2 ist und *Produkt* $f * g$ von f, g heißt. Eine Homotopie f_t heißt *konstant* oder *neutral*, wenn für alle $t \in I$ die Gleichheit $f_t = f_0$ gilt. Aus diesen Bemerkungen entnimmt man, daß „homotop“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$ ist. Wir bezeichnen die Menge der *Homotopieklassen* (das heißt der Äquivalenzklassen nach dieser Relation) mit $[X, Y]$ und mit $[f]$ die Klasse von f .

(1.1) Notiz. Seien $f, g: X \rightarrow Y$ und $k, l: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Aus $f \simeq g$ und $k \simeq l$ folgt $kf \simeq lg$.

Beweis. Sei $H: f \simeq g$ gegeben. Dann ist $lH: X \times I \rightarrow Z$ eine Homotopie von lf nach lg . Sei $G: k \simeq l$ gegeben. Dann ist $G(f \times \text{id}): X \times I \rightarrow Z$ eine Homotopie von kf nach lf . Insgesamt folgt $kf \simeq lf \simeq lg$. \square

Eine stetige Abbildung $f: Y \rightarrow Z$ induziert nach (1.1) Abbildungen

$$f_*: [X, Y] \rightarrow [X, Z], \quad [h] \mapsto [fh], \quad f^*: [Z, X] \rightarrow [Y, X], \quad [k] \mapsto [kf]$$

zwischen Homotopiemengen. Sind f und g homotop, so gilt $f_* = g_*$ und $f^* = g^*$.

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *Homotopieäquivalenz* (h-Äquivalenz), wenn es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, für die $gf \simeq \text{id}(X)$ und $fg \simeq \text{id}(Y)$ ist. Eine solche Abbildung g nennt man *homotopieinvers* (h-invers) zu f . Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent* (h-äquivalent) oder vom *gleichen Homotopietyp*, wenn es eine Homotopieäquivalenz von X nach Y gibt. „Homotopieäquivalent“ ist eine Äquivalenzrelation. Ein Raum X heißt *zusammenziehbar* oder *kontrahierbar*, wenn er zu einem einpunktigen Raum homotopieäquivalent ist. Eine Homotopie von f zu einer konstanten Abbildung heißt *Nullhomotopie* von f ; gibt es eine solche, so heißt f *nullhomotop*.

Topologische Räume und stetige Abbildungen bilden eine Kategorie TOP. Topologische Räume und Homotopieklassen von Abbildungen bilden wegen (1.1) die *Homotopiekategorie* h-TOP, wenn die Komposition von Morphismen darin durch die Komposition der Vertreter definiert wird. Der bessere Standpunkt ist aber: TOP ist eine Kategorie mit einer Zusatzstruktur „Homotopie“. Kategorien mit einer derartigen Zusatzstruktur sind sehr viel komplizierter als blanke Kategorien. Weitere Untersuchungen zum Homotopiebegriff finden sich im Kapitel über Homotopie.

Ist $A \subset X$ und erfüllt eine Homotopie $f: X \times I \rightarrow Y$ für $a \in A$ immer $f(a, t) = f(a, 0)$, so heißt f auf A *konstant* oder *stationär*. Wir sagen in diesem Fall, Anfang f_0 und Ende f_1 seien *relativ A homotop* und schreiben $f: f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A$.

Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist *sternförmig* in Bezug auf $k_0 \in K$, wenn die Verbindungsstrecke von k_0 zu einem beliebigen $k \in K$ in K enthalten ist. Ist K sternförmig, so ist $H: K \times I \rightarrow K$, $(k, t) \mapsto (1-t)k + tk_0$ eine Nullhomotopie der Identität (Homotopie durch lineare Verbindung).

Wir verwenden in diesem Text häufig die Standardräume

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}, \quad D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Darin ist $\|x\|$ die euklidische Norm des Vektors x . Wir nennen S^n die n -dimensionale Sphäre und D^n die n -dimensionale Zelle.

(1.2) Beispiel. Die Inklusion $i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ ist eine Homotopieäquivalenz. Ein Homotopieinverses ist die radiale Projektion (Normierung)

$$N: \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \rightarrow S^n, \quad x \mapsto N(x) = \|x\|^{-1}x.$$

Eine Homotopie von $i \circ N$ nach id ist $H(x, t) = (1-t)iN(x) + tx$. Es gilt $N \circ i = \text{id}$. \diamond

(1.3) Beispiel. Die Nullhomotopien von $f: S^n \rightarrow X$ entsprechen den Erweiterungen $F: D^{n+1} \rightarrow X$ von f . Ist nämlich F gegeben, so ist $(x, t) \mapsto F(tx)$ eine Nullhomotopie von f . Ist andererseits h eine Nullhomotopie, so faktorisiert h über die Identifizierung $p: S^n \times I \rightarrow D^{n+1}$, $(x, t) \mapsto tx$ und liefert auf diese Weise eine Erweiterung F von f mit $Fp = h$.

Der *Kegel* CA über dem Raum A entsteht aus $A \times I$, indem $A \times 0$ zu einem Punkt identifiziert wird. Die Abbildung $A \times 1 \subset A \times I$ induziert eine Einbettung $A \rightarrow CA$, vermöge der A als Unterraum von CA angesehen wird. Eine Abbildung $f: A \rightarrow X$ ist genau dann nullhomotop, wenn sie sich auf den Kegel CA stetig erweitern läßt. \diamond

(1.4) Beispiel. Die Inklusion $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$ der orthogonalen Gruppe in die allgemeine lineare Gruppe der invertierbaren reellen (n, n) -Matrizen ist eine Homotopieäquivalenz. Sei nämlich $P(n)$ der Raum der positiv definiten reellen (n, n) -Matrizen. Die Polarzerlegung $O(n) \times P(n) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, $(X, P) \mapsto XP$ ist ein Homöomorphismus. Der Raum $P(n)$ ist zusammenziehbar (sternförmig in Bezug auf die Einheitsmatrix). Ebenso ist die Inklusion der unitären Gruppe in die Gruppe der invertierbaren komplexen (n, n) -Matrizen $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ eine Homotopieäquivalenz. \diamond

(1.5) Beispiele. Ein Raum ist genau dann kontrahierbar, wenn die identische Abbildung nullhomotop ist. Ist X oder Y kontrahierbar, so sind alle Abbildungen $X \rightarrow Y$ zueinander homotop. Sei $y \in S^n$. Dann ist $S^n \setminus y$ vermöge stereographischer Projektion mit dem Pol y homöomorph zu \mathbb{R}^n und folglich kontrahierbar. Ist Y kontrahierbar, so ist die Projektion $X \times Y \rightarrow X$ eine h -Äquivalenz. Sind f und g h -Äquivalenzen,

so ist auch deren Produkt $f \times g$ eine h -Äquivalenz. Überhaupt ist die Produktbildung von Abbildungen mit der Homotopierelation verträglich. \diamond

Es ist im allgemeinen nicht leicht, zwei Räume als h -äquivalent nachzuweisen. Der nächste Satz zeigt wenigstens, daß es sich um ein lokales Problem handelt. Wir erinnern daran, daß eine Überdeckung numerierbar heißt, wenn sie eine untergeordnete Partition der Eins besitzt.

(1.6) Satz. *Seien X und Y Räume und $(X_j \mid j \in J)$ und $(Y_j \mid j \in J)$ numerierbare Überdeckungen von X und Y . Die stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ bilde X_j nach Y_j ab. Für jede endliche Teilmenge $E \subset J$ sei die induzierte Abbildung $f: \bigcap_{j \in E} X_j \rightarrow \bigcap_{j \in E} Y_j$ eine Homotopieäquivalenz. Dann ist f eine Homotopieäquivalenz. [59] \square*

Der Satz besagt insbesondere, daß ein Raum X mit einer numerierbaren Überdeckung (X_j) zusammenziehbar ist, wenn alle endlichen Durchschnitte der X_j zusammenziehbar sind. Siehe dazu Beispiel (7.9). Ein überraschendes Beispiel für einen zusammenziehbaren Raum wird durch den folgenden Satz von Kuiper geliefert.

(1.7) Satz. *Sei H ein unendlich-dimensionaler (reeller, komplexer, quaternionaler) Hilbert-Raum mit abzählbarer topologischer Basis. Dann ist die Gruppe $GL(H)$ der linearen und die Gruppe der unitären Automorphismen von H in der Norm-Topologie zusammenziehbar. [157] \square*

Ein topologischer Raum Y heiße *gleichmäßig lokal zusammenziehbar*, wenn es zu jeder Umgebung V der Diagonale $D(Y)$ in $Y \times Y$ eine Umgebung U von $D(Y)$ und eine Homotopie $H: U \times I \rightarrow V$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- (1) $H(u, 0) = u$ fur $u \in U$
- (2) $H(u, t) = u$ fur $u \in D(Y)$, $t \in I$
- (3) $H(u, 1) \in D(Y)$ fur $u \in U$
- (4) $\text{pr}_2 H(u, t) = \text{pr}_2(u)$ fur $u \in U$.

Abbildungen $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ heißen *U -benachbart*, wenn $(f_0, f_1): X \rightarrow Y \times Y$ ein in U gelegenes Bild hat.

(1.8) Satz. *Sei Y gleichmäßig lokal zusammenziehbar. Zu jeder Umgebung V von $D(Y)$ in $Y \times Y$ gibt es eine Umgebung U von $D(Y)$, so daß gilt: Sind $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ U -benachbart, so gibt es eine Homotopie $f_t: X \rightarrow Y$ von f_0 nach f_1 mit den Eigenschaften:*

- (1) $(f_t(x), f_1(x)) \in V$ fur $(x, t) \in X \times I$.
- (2) $t \mapsto f_t(x)$ ist konstant, sofern $f_0(x) = f_1(x)$ ist.

Beweis. Eine geeignete Homotopie wird mit einem H wie in der obigen Definition durch $\text{pr}_1 \circ H \circ (f_0, f_1) \times \text{id}: X \times I \rightarrow U \times I \rightarrow V \rightarrow Y$ geliefert. \square

Grob gesprochen besagt der letzte Satz, daß genügend benachbarte Abbildungen homotop sind und die Homotopie zwischen ihnen sich nicht weit von einer der Abbildungen entfernt.

(1.9) Satz. Sei $Y \subset \mathbb{R}^p$ Retrakt einer Umgebung. Dann ist Y gleichmäßig lokal zusammenziehbar.

Beweis. Sei $r: W \rightarrow Y$ Retraktion einer offenen Umgebung, das heißt eine Abbildung, die auf Y die Identität ist. Die Abbildung

$$\phi: Y \times Y \times I \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad (y, z, t) \mapsto (1-t)y + tz$$

ist stetig. Die offene Menge $\phi^{-1}(W)$ enthält $D(Y) \times I$ und deshalb auch eine Menge der Form $U_0 \times I$ mit einer offenen Umgebung U_0 von $D(Y)$. Wir betrachten

$$H: U_0 \times I \rightarrow Y \times Y, \quad (y, z, t) \mapsto (r((1-t)y + tz), z)$$

und wählen eine offene Umgebung $U \subset U_0$ von $D(Y)$, so daß $H(U \times I) \subset V$ ist. Die durch Einschränkung entstehende Abbildung $H: U \times I \rightarrow V$ hat die in der Definition von „gleichmäßig lokal zusammenziehbar“ verlangten Eigenschaften. \square

In dem letzten Satz genügt es vorauszusetzen, daß Y Retrakt einer Umgebung in einem topologischen Vektorraum ist. Mannigfaltigkeiten sind gleichmäßig lokal zusammenziehbar, siehe VII(3.10).

(1.10) Beispiele. Sei $X = \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x \neq y\}$. Die Abbildung $j: S^n \rightarrow X$, $x \mapsto (x, -x)$ ist eine Homotopieäquivalenz.

Sei $k \leq n$ und seien H_1, \dots, H_k Hyperebenen im \mathbb{C}^n in allgemeiner Lage, das heißt, für $E \subset \{1, \dots, k\}$ habe $\bigcap_{j \in E} H_j$ in \mathbb{C}^n die Kodimension $|E|$. Dann ist $\mathbb{C}^n \setminus \{H_1 \cup \dots \cup H_k\}$ zu einem k -dimensionalen Torus $\prod_1^k S^1$ homotopieäquivalent.

Der Konfigurationsraum $C(2)$ der zwei-elementigen Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^3$ (das heißt der Paare ununterscheidbarer Teilchen) entsteht aus $X(2) = \{x, y \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq y\}$ durch die Äquivalenzrelation $(x, y) \sim (y, x)$ als Quotientraum. Der Raum $C(2)$ ist zur reellen projektiven Ebene P^2 (siehe II.1) homotopieäquivalent. \diamond

2 Zusammenhang

Eine stetige Abbildung $w: [a, b] \rightarrow U$ des abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ in den Raum U heißt Weg in U mit Parameterintervall $[a, b]$, Anfangspunkt $w(a)$ und Endpunkt $w(b)$. Ein Weg w läuft von $w(a)$ nach $w(b)$ und verbindet $w(a)$ mit $w(b)$. Ist $w(a) = w(b)$, so ist der Weg geschlossen. Zwei Punkte x und y eines Raumes U sind verbindbar, wenn es einen Weg $w: [a, b] \rightarrow U$ von x nach y gibt. Mit w ist auch $u: [0, 1] \rightarrow U$, $t \mapsto w(a + t(b - a))$ ein Weg von x nach y . Es genügt

deshalb meist, das Parameterintervall $[0, 1]$ zu betrachten. Ist $w: I \rightarrow U$ gegeben, so heißt $w^-: t \mapsto w(1-t)$ der zu w inverse Weg. Sind $v: I \rightarrow U$ und $w: I \rightarrow U$ zwei Wege mit $v(1) = w(0)$, so heißt der durch $(v * w)(t) = v(2t)$ für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ und $(v * w)(t) = w(2t-1)$ für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ definierte Weg $v * w$ das *Produkt* von v und w . Diese Begriffsbildungen sind Spezialfälle des Homotopiebegriffs. Ist P ein Punktraum, so können wir nämlich einen Weg $I \rightarrow U$ als eine Homotopie $P \times I \rightarrow U$ ansehen.

Aus den voranstehenden Bemerkungen folgt, daß die Relation „verbindbar“ eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklassen von U nach dieser Relation heißen die *Wegekomponenten* von U . Mit $\pi_0(U)$ bezeichnen wir die Menge der Wegekomponenten von U . Ein Raum heißt *wegweise zusammenhängend*, wenn je zwei seiner Punkte verbindbar sind. Ist P ein einpunktiger Raum, so ist $[P, U] = \pi_0(U)$. Später werden wir in den Homotopiegruppen $\pi_n(U)$, $n \geq 1$ eine Serie von Homotopieinvarianten kennenlernen; deshalb die Bezeichnung π_0 .

Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig. Mit $w: [a, b] \rightarrow X$ ist auch fw ein Weg. Indem wir der Komponente $[x]$ von x die Komponente $[f(x)]$ zuordnen, erhalten wir deshalb eine wohldefinierte Abbildung $\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$. Aus $f \simeq g$ folgt $\pi_0(f) = \pi_0(g)$. Damit wird π_0 ein Funktor von h-TOP in die Kategorie der Mengen.

Die Größe der Menge $\pi_0(X)$ betrachten wir als eine grobe qualitative Information über die Gestalt des Raumes X .

Neben dem durch Verbindbarkeit je zweier Punkte definierten Zusammenhangsbegriff gibt es noch einen weiteren: Ein Raum, der aus zwei getrennten Stücken besteht, ist nicht zusammenhängend zu nennen. Wir definieren deshalb: Eine *Zerlegung* eines Raumes X ist ein Paar U, V offener, nichtleerer Teilmengen, die disjunkt sind und X als Vereinigung haben:

$$X = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset, \quad U \neq \emptyset \neq V.$$

Ein Raum heißt *zusammenhängend*, wenn er keine Zerlegung besitzt. In einer Zerlegung sind die Mengen U und V als Komplemente offener Mengen auch abgeschlossen.

Die zweipunktige Teilmenge $\{0, 1\}$ von \mathbb{R} ist nicht zusammenhängend. Ein Raum X ist genau dann unzusammenhängend, wenn es eine surjektive stetige Abbildung $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ gibt; die Zerlegungen U, V sind durch $f^{-1}(0) = U$ und $f^{-1}(1) = V$ gegeben. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ ist auf einem zusammenhängenden Unterraum konstant. Aus der Analysis ist bekannt (Zwischenwertsatz):

(2.1) Satz. *Eine Teilmenge A von \mathbb{R} ist genau dann zusammenhängend, wenn A ein Intervall ist.* □

Ist $f: X \rightarrow Y$ stetig und X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend, denn eine Zerlegung U, V von $f(X)$ liefert eine Zerlegung $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ von X . Ist X wegweise zusammenhängend, so auch zusammenhängend,

denn ist U, V eine Zerlegung von X und $w: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von $x \in U$ nach $y \in V$, so ist $w^{-1}(U), w^{-1}(V)$ eine Zerlegung von $[0, 1]$, die es nach (2.1) aber nicht gibt. Wie üblich bezeichne \bar{A} die abgeschlossene Hülle von A .

(2.2) Satz. *Sei $(A_j \mid j \in J)$ eine Familie zusammenhängender Teilmengen von X mit nichtleerem Durchschnitt. Dann ist die Vereinigung Y der A_j zusammenhängend. Ist A eine zusammenhängende Teilmenge von X und $A \subset B \subset \bar{A}$, so ist B zusammenhängend.*

Beweis. Eine stetige Abbildung $f: Y \rightarrow \{0, 1\}$ ist auf allen A_j konstant und, da die A_j nichtleeren Durchschnitt haben, überhaupt konstant.

Seien U, V offene Teilmengen von X , für die $B \subset (U \cup V)$, $B \cap U \cap V = \emptyset$ gilt. Da A zusammenhängend ist, so gilt etwa $U \cap A = \emptyset$; also $A \subset X \setminus U$, $\bar{A} \subset X \setminus U$, $U \cap \bar{A} = \emptyset$. \square

Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen A von X , die $x \in X$ enthalten, heißt *Zusammenhangskomponente* $X(x)$ von x . Nach (2.2) sind die Zusammenhangskomponenten von X zusammenhängende abgeschlossene Teilmengen von X . Wir sprechen auch kurz von *Komponenten*. Ist $y \in X(x)$, so gilt $X(x) = X(y)$. Eine Komponente ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von X . Ein Raum ist disjunkte Vereinigung seiner Komponenten. Bestehen alle Komponenten nur aus einem Punkt, so heißt der Raum *total unzusammenhängend*. Bezeichne $\pi(X)$ die Menge der Komponenten von X . Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert $\pi(f): \pi(X) \rightarrow \pi(Y)$, indem der Komponente von $x \in X$ diejenige von $f(x) \in Y$ zugeordnet wird. Damit liefert π einen Funktor von h-TOP in die Kategorie der Mengen.

Ein Raum X heißt *lokal (wegweise) zusammenhängend*, wenn zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine (wegweise) zusammenhängende Umgebung V existiert, die in U enthalten ist. Beide Eigenschaften werden auf offene Teilmengen vererbt. Die Komponenten einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}$ sind offene Intervalle; U hat höchstens abzählbar viele Komponenten. Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ hat abzählbar viele Wegekomponenten und diese sind offen.

(2.3) Satz. *Die Komponenten eines lokal zusammenhängenden Raumes X sind offen. Die Wegekomponenten eines lokal wegweise zusammenhängenden Raumes Y sind offen und stimmen mit den Komponenten überein.*

Beweis. Sei K eine (Wege-)Komponente von x . Sei V eine zusammenhängende Umgebung von x . Dann ist $K \cup V$ zusammenhängend. Also ist $K \cup V \subset K$. Das zeigt, daß K offen ist.

Sei Y zusammenhängend und K eine Wegekomponente. Dann ist $Y \setminus K$ eine Vereinigung von Wegekomponenten, also offen. Im Fall $Y \neq K$ erhielten wir eine Zerlegung von Y . \square

(2.4) Beispiel. Die Menge $\{(0, t) \mid t \in [-1, 1]\} \cup \{(x, \sin(x^{-1})) \mid x > 0\}$ ist zusammenhängend aber nicht wegweise zusammenhängend. \diamond

Wir stellen noch zwei Sätze über die mengentheoretische Topologie des Zusammenhangs bereit.

(2.5) Satz. (1) Sei die offene Menge A Komponente der offenen Menge B in X . Dann gilt für die Ränder $\text{Rd}(A) \subset \text{Rd}(B)$.

(2) Ist A offen in X und zusammenhängend, so ist A eine Komponente von $X \setminus \text{Rd}(A)$.

Beweis. (1) A ist abgeschlossen in B , also gilt $A = B \cap \bar{A}$. Es folgt

$$\text{Rd}(A) = \bar{A} \setminus A = \bar{A} \setminus (X \cap \bar{A}) = \bar{A} \cap (X \setminus B) \subset \bar{B} \cap (X \setminus B) = \text{Rd}(B).$$

(2) Sei B die Komponente von $X \setminus \text{Rd}(A)$, die A enthält. Wäre $A \neq B$, so träfe B sowohl A als auch $X \setminus A$. Da $B \cap \text{Rd}(A) = \emptyset$ ist, enthielte B auch Punkte von $X \setminus \bar{A}$, und $A \cap B$ und $(X \setminus \bar{A}) \cap B$ wäre eine Zerlegung von B . \square

(2.6) Satz. Sei X zusammenhängend und $A \subset X$ ein zusammenhängender Teilraum. Sei ferner C eine Komponente von $X \setminus A$. Dann gilt:

(1) Ist V offen und abgeschlossen in $X \setminus C$, so ist $C \cup V$ zusammenhängend.

(2) $X \setminus C$ ist zusammenhängend.

Beweis. Sei U_1, U_2 eine Zerlegung von $C \cup V$. Dann ist das zusammenhängende C etwa in U_1 enthalten und deshalb U_2 in V . Es ist U_2 folglich offen und abgeschlossen in V und (da V offen und abgeschlossen in $X \setminus C$ ist) in $X \setminus C$, insgesamt also offen und abgeschlossen in $(X \setminus C) \cup (C \cup V) = X$, was dem Zusammenhang von X widerspricht.

(2) Sei U_3, U_4 eine Zerlegung von $X \setminus C$. Wir zeigen, daß dann $A \cap U_3, A \cap U_4$ eine Zerlegung von A ist. Angenommen $A \cap U_3 = \emptyset$. Dann ist nach (1) $C \cup U_3$ zusammenhängend und in $X \setminus A$ enthalten. Da C eine echte Teilmenge von $C \cup U_3$ ist, widerspricht das der Festlegung von C als Komponente von $X \setminus A$. Also ist $A \cap U_3 \neq \emptyset$, und ebenso ist $A \cap U_4 \neq \emptyset$. \square

3 Faserungen und Kofaserungen

Wir kommen nun zu den beiden in der Überschrift genannten, für die gesamte Homotopietheorie fundamentalen Begriffen.

Sind $p: E \rightarrow B$ und $f: X \rightarrow B$ Abbildungen, so heißt $F: X \rightarrow E$ eine *Hochhebung* von f entlang p , wenn $pF = f$ gilt. Wir sagen, $p: E \rightarrow B$ hat die *Homotopiehochhebungseigenschaft* (= HHE) für den Raum X , wenn gilt: Zu jeder Homotopie $h: X \times I \rightarrow B$ und jeder Abbildung $a: X \rightarrow E$ mit $pa(x) = h(x, 0)$ für

alle $x \in X$ gibt es eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow E$ mit $pH = h$ und $H(x, 0) = a(x)$. Wir veranschaulichen die Situation in dem folgenden kommutativen Diagramm mit $j(x) = (x, 0)$:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{a} & E \\
 \downarrow j & \nearrow H & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{h} & B.
 \end{array}$$

Wir sagen: H liegt über h , oder h wird zu H hochgehoben mit der Anfangsbedingung a . Wir nennen $p: E \rightarrow B$ Faserung, wenn p die HHE für jeden Raum hat. Für eine Faserung hat also mit $f: X \rightarrow B$ auch jede dazu homotope Abbildung eine Hochhebung.

(3.1) Beispiel. Eine Projektion $p: B \times F \rightarrow B$ ist eine Faserung. Sei nämlich $a(x) = (a_1(x), a_2(x))$. Die Bedingung $pa = h$ besagt $a(x) = h(x, 0)$. Setzen wir $H(x, t) = (h(x, t), a_2(x))$, so ist H eine Hochhebung von h mit Anfang a . \diamond

Seien $i: A \rightarrow X$ und $f: A \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Eine stetige Abbildung $F: X \rightarrow Z$, die $Fi = f$ erfüllt, heißt *Erweiterung* von f über i . Die typische Situation ist der Fall einer Inklusion $i: A \subset X$.

Sei $i: A \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Wir sagen, i habe die *Homotopieerweiterungseigenschaft* (= HEE) für den Raum Y , wenn zu jeder Abbildung $f: X \rightarrow Y$ und jeder Homotopie $h: A \times I \rightarrow Y$ mit $h(i(a), 0) = f(a)$ eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow Y$ existiert, die $H(x, 0) = f(x)$ und $H(i(a), t) = h(a, t)$ erfüllt ($a \in A, x \in X, t \in I$). Wir sagen, i sei eine *Kofaserung*, wenn i die HEE für alle Räume hat. Wir veranschaulichen die Situation wieder durch ein Diagramm mit $j(x) = (x, 0)$:

$$\begin{array}{ccc}
 A \times I & \xrightarrow{h} & Y \\
 \downarrow i \times \text{id} & \nearrow H & \uparrow f \\
 X \times I & \xleftarrow{j} & X.
 \end{array}$$

Sei $i: A \subset X$. Eine Abbildung $r: X \rightarrow A$, die auf A die Identität ist, heißt *Retraktion* von X auf A . Gibt es eine Retraktion, so nennen wir A einen *Retrakt* von X . Die Teilmenge A heißt *Deformationsretrakt* von X , wenn es eine Retraktion $r: X \rightarrow A$ gibt, so daß ir homotop zur Identität ist. Ist sogar ir relativ A homotop zur Identität, so sprechen wir von einem *starken Deformationsretrakt*.

(3.2) Notiz. Ist $A \subset X$ eine Kofaserung und A Deformationsretrakt, so ist A starker Deformationsretrakt.

Beweis. Wir wenden die HEE auf die Identität von X und eine Homotopie von ir zur Identität an. \square

(3.3) Notiz. Sei $i: A \subset X$ die Inklusion einer abgeschlossenen Teilmenge. Dann sind äquivalent:

- (1) i ist eine Kofaserung.
- (2) Es gibt eine Retraktion $r: X \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$.

Beweis. (1) \Rightarrow (2). Sei $Y = X \times 0 \cup A \times I$, $f(x) = (x, 0)$ und $h(a, t) = (a, t)$. Wir wenden die HEE an und erhalten in H eine Retraktion. (Hier muß A nicht als abgeschlossen vorausgesetzt werden.)

(2) \Rightarrow (1). Wir definieren $g: X \times 0 \cup A \times I \rightarrow Y$ durch $g(x, 0) = f(x)$ und $g(a, t) = h(a, t)$. Da A abgeschlossen ist, so ist g stetig. Ein geeignetes H wird durch gr gegeben. \square

(3.4) Notiz. $\partial I^n \subset I^n$ ist eine Kofaserung.

Beweis. Wegen (3.3) genügt es, eine Retraktion $r: I^n \times I \rightarrow I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I$ anzugeben. Sei $e = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ und $|y_1, \dots, y_n| = \max |y_i|$. Dann ist

$$r(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{2-t}(x - e) + e, 0 \right) & |x - e| \leq \frac{2-t}{4} \\ \left(\frac{x - e}{2|x - e|} + e, 2 - \frac{2-t}{2|x - e|} \right) & |x - e| \geq \frac{2-t}{4} \end{cases}$$

eine geeignete Retraktion. (Im Fall $n = 2$ verfolge man die Definition von r durch eine Skizze. Man kann diese Notiz auch ohne explizite Formeln formaler beweisen, indem man Verträglichkeit von Kofaserungen und Produkten benutzt.) \square

(3.5) Satz. Sei

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow j & & \downarrow J \\ X & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

ein Pushout-Diagramm. Ist j eine Kofaserung, so auch J . Wir nennen J die durch f von j induzierte Kofaserung.

Beweis. Seien $h: B \times I \rightarrow Z$ und $\varphi: Y \rightarrow Z$ so gegeben, daß $h(b, 0) = \varphi J(b)$ für $b \in B$. Wir verwenden, daß das Produkt mit I aus einem Pushout wieder eines macht; das folgt zum Beispiel daraus, daß Abbildungen $Y \times I \rightarrow Z$ den Abbildungen

$Y \rightarrow Z^I$ entsprechen, wobei Z^I der Abbildungsraum mit der Kompakt-Offen-Topologie ist. (Siehe dazu III.5.) Da j eine Kofaserung ist, existiert eine Homotopie $K_t: X \rightarrow Z$, so daß $K_0 = \varphi F$ und $K_t j = h_t f$. Wegen der Pushout-Eigenschaft des mit I multiplizierten Diagrammes gibt es eine Homotopie $H_t: Y \rightarrow Z$, so daß $H_t F = K_t$ und $H_t J = h_t$ ist. Es gilt $H_0 = \varphi$, da beiden Abbildungen dieselbe Komposition mit F und mit J haben. \square

(3.6) Folgerung. Sei $A \subset X$ eine Kofaserung. Sei X/A der Raum, der aus X durch Identifikation von A zu einem Punkt $*$ entsteht. Dann ist $\{*\} \subset X/A$ eine Kofaserung. \square

Der vorstehende Satz ist formaler Natur. Er hat ein ähnlich zu beweisendes Analogon für Faserungen.

(3.7) Satz. Sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

ein Pullback. Hat q die HHE für Z , so auch p . Ist also q eine Faserung, so auch p , genannt die von q durch f induzierte Faserung. \square

Der Prozeß in (3.7) wird auch als *Basiswechsel* bezeichnet und demgemäß (3.5) als *Kobasiswechsel*.

Wir geben noch einige Beispiele zu den Begriffen dieses Abschnittes. In der Überlagerungstheorie werden wir zeigen, daß die Abbildung p des folgenden Satzes eine Faserung ist. Wir leiten die etwas schwächere Aussage (3.8) aber jetzt schon auf möglichst direktem Weg her, weil das Resultat interessante geometrische Anwendungen hat.

(3.8) Satz. Die Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi i t)$ hat die HHE für alle I^n .

Beweis. Sei $Y = I^n$ und $h: Y \times I \rightarrow S^1$ gegeben. Wir nehmen zunächst noch $h(0) = 1$ an. Sei $\psi: S^1 \setminus \{-1\} \rightarrow]-1/2, 1/2[$ eine stetige Umkehrung zu dem Homöomorphismus $p:]-1/2, 1/2[\rightarrow S^1 \setminus \{-1\}$. Da Y kompakt ist, so ist h gleichmäßig stetig. Es gibt also ein $\delta > 0$, so daß $\|y - z\| < \delta$ die Ungleichung $|h(y) - h(z)| < 1$ impliziert. Aus der letzten Ungleichung entnehmen wir $h(y)/h(z) \neq -1$. Deshalb ist $\psi(h(y)/h(z))$ definiert. Sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $\|y\| < N\delta$ für alle $y \in Y$. Dann sind die Werte

$$\left\| \frac{k}{N}y - \frac{k-1}{N}y \right\|, \quad 1 \leq k \leq N$$

kleiner als δ , und demnach ist

$$H(y) = \sum_{j=0}^{N-1} \psi \left(\frac{h((N-j)/N \cdot y)}{h((N-j-1)/N \cdot y)} \right)$$

definiert und stetig von y abhängig. Da p ein Homomorphismus ist und $p\psi = \text{id}$ ist, gilt

$$pH(y) = \prod_{j=0}^{N-1} \frac{h((N-j)/N \cdot y)}{h((N-j-1)/N \cdot y)} = \frac{h(y)}{h(0)} = h(y).$$

Folglich ist H eine Hochhebung von h . Ist nun $h: Y \times I \rightarrow S^1$ beliebig und a eine Anfangsbedingung, so betrachten wir

$$k(y, t) = \frac{h(y, t)}{pa(y)}.$$

Dann ist $k(y, 0) = 1$. Wir heben k zu K nach dem schon Bewiesenen hoch. Es ist $K(0, 0) = 0$, und wegen Stetigkeit und $pK(y, 0) = 1$ ist $K(y, 0) = 0$. Dann ist $H(y, t) = a(y) + K(y, t)$ eine Hochhebung von h mit Anfang a . \square

(3.9) Satz. Die komplexe Exponentialabbildung $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \exp(2\pi iz)$ hat die HHE für die Räume I^n .

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß mit $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ auch das Produkt $p \times \text{id}$ die HHE für die Räume I^n hat. Mit den Homöomorphismen

$$\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x + iy \mapsto (x, y), \quad \varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}, \quad re^{i\alpha} \mapsto (e^{i\alpha}, -\frac{1}{2\pi} \log r)$$

wird wegen $(p \times \text{id}) \circ \Phi = \varphi \circ P$ das Hochhebungsproblem von P auf $p \times \text{id}$ zurückgespielt. \square

Wir erinnern an den Erweiterungssatz von Tietze-Urysohn aus der mengentheoretischen Topologie.

(3.10) Satz. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge des normalen Raumes X . Jede stetige Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat eine stetige Erweiterung $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$. \square

(3.11) Notiz. Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines normalen Raumes und $f: A \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es eine Umgebung U von A in X und eine Erweiterung $g: U \rightarrow S^n$ von f .

Beweis. Wir betrachten f als Abbildung nach \mathbb{R}^{n+1} und wählen nach (3.10) eine Erweiterung $F: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ von f . Sei $U = F^{-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$. Dann ist U offen, und wir erhalten in $g(x) = \|F(x)\|^{-1} F(x)$ eine geeignete Erweiterung. \square

(3.12) Satz. Seien X und $X \times I$ normal und sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X . Dann hat (X, A) die HEE für S^n .

Beweis. Nach (3.11) gibt es eine offene Umgebung U von $A \times I \cup X \times 0$ in $X \times I$ sowie eine Erweiterung K von h auf U . Wir wählen eine stetige Abbildung $\tau: X \times I \rightarrow I$, die auf $A \times I$ den Wert 1 und auf dem Komplement von U den Wert 0 hat. Die Funktion s

$$s(x) = \min\{\tau(x, t) \mid t \in I\}$$

ist stetig. Für alle $(x, t) \in X \times I$ ist $(x, s(x)t) \in U$, denn $(x, s(x)t) \in X \setminus U$ würde $\tau(x, s(x)t) = 0$, $s(x) \leq \tau(x, s(x)t) = 0$ implizieren, im Widerspruch zu $(x, 0) \in X \times 0 \subset U$. Wir erhalten in $H(x, t) = K(x, s(x)t)$ eine geeignete Erweiterung. \square

(3.13) Notiz. Sei $h_t: (X, A) \rightarrow (X, A)$ eine Homotopie von der Identität $h_0 = \text{id}$ zu einer Abbildung, so daß $h_1|_A$ konstant ist. Dann ist die kanonische Projektion $p: X \rightarrow X/A$ eine h -Äquivalenz. Ist $i: A \rightarrow X$ eine Kofaserung und A zusammenziehbar, dann gibt es ein h mit diesen Eigenschaften.

Beweis. Da $h_1(A)$ ein Punkt ist, induziert h_1 eine Abbildung $q: X/A \rightarrow X$ mit $qp = h_1$, und nach Voraussetzung ist diese Komposition homotop zur Identität. Um einzusehen, daß auch qp homotop zur Identität ist, verwenden wir

$$(p \times \text{id}) \circ h: X \times I \rightarrow X/A$$

und bemerken, daß diese Homotopie über $X/A \times I$ faktorisiert und die gewünschte Homotopie induziert. \square

4 Die Fundamentalgruppe

Zwei Wege $u_0, u_1: I \rightarrow X$ mit gleichem Anfang $u_0(0) = u_1(0) = x$ und gleichem Ende $u_0(1) = u_1(1) = y$ heißen *homotop*, wenn es eine Homotopie $H: I \times I \rightarrow X$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

$$\begin{aligned} H(s, i) &= u_i(s) && \text{für } s \in I, i \in \{0, 1\} \\ H(0, t) &= x && \text{für } t \in I \\ H(1, t) &= y && \text{für } t \in I. \end{aligned}$$

Für jedes t ist also $s \mapsto H(s, t) = H_t(s)$ ein Weg mit Anfang x und Ende y . Wir schreiben $H: u_0 \simeq u_1$ für die Homotopie. Wir verwenden das in I.2 eingeführte Produkt $*$ von Wegen. Die Äquivalenzklasse von w bezüglich der Relation „homotop“ wird mit $[w]$ bezeichnet. Es sei betont, daß eine Homotopie von Wegen die Anfangs- und Endpunkte immer festlassen soll, sofern nichts anderes gesagt wird. Wir sprechen auch von Homotopie relativ ∂I , wobei ∂I die Menge $\{0, 1\}$ der Randpunkte von I ist.

(4.1) Satz. *Das Produkt von Wegen hat die folgenden Eigenschaften:*

- (1) Sei $\alpha: I \rightarrow I$ stetig und gelte $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$. Für jeden Weg w in X sind w und $w\alpha$ homotop.
- (2) Sind w_1, w_2, w_3 Wege in X und ist $w_1(1) = w_2(0)$ sowie $w_2(1) = w_3(0)$, so gilt $w_1 * (w_2 * w_3) \simeq (w_1 * w_2) * w_3$.
- (3) Gilt $w_1 \simeq w'_1$, $w_2 \simeq w'_2$, so ist $w_1 * w_2 \simeq w'_1 * w'_2$ (falls die Verknüpfung definiert ist).
- (4) $w * w^-$ ist immer definiert und homotop zum konstanten Weg.
- (5) Für $x \in X$ sei k_x der konstante Weg mit Anfang x . Für jeden Weg w in X gilt $k_{w(0)} * w \simeq w \simeq w * k_{w(1)}$.

Beweis. (1) $H: I \times I \rightarrow X$, $(s, t) \mapsto w(s(1-t) + t\alpha(s))$ ist eine Homotopie von w nach $w\alpha$.

(2) Es gilt $(w_1 * (w_2 * w_3))\alpha = (w_1 * w_2) * w_3$, wenn $\alpha(t): I \rightarrow I$ definiert wird durch $\alpha(t) = 2t$ für $t \leq \frac{1}{4}$, $\alpha(t) = t + \frac{1}{4}$ für $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$, $\alpha(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}$ für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Nun wendet man (1) an.

(3) Ist F_i eine Homotopie von w_i nach w'_i , so wird durch $G: I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie von $w_1 * w_2$ nach $w'_1 * w'_2$ gegeben, wenn G durch $G(s, t) = F_1(2s, t)$ für $0 \leq s \leq 1/2$ und $G(s, t) = F_2(2s - 1, t)$ für $1/2 \leq s \leq 1$ definiert wird.

(4) Die Abbildung $F: I \times I \rightarrow X$, definiert durch $F(s, t) = w(2s(1-t))$ für $0 \leq s \leq 1/2$ und $F(s, t) = w(2(1-s)(1-t))$ für $1/2 \leq s \leq 1$, ist eine Homotopie von $w * w^-$ zum konstanten Weg.

(5) folgt wiederum mittels (1). □

Wir definieren ein *Produkt* von Homotopieklassen durch $[u][v] = [u * v]$. Es ist nur dann definiert, wenn $u(1) = v(0)$ ist. Wegen (4.1) ist es wohldefiniert. Übersetzen wir (4.1) in Aussagen über Homotopieklassen, so sehen wir: Das Produkt ist, soweit definiert, assoziativ, hat rechts- und linksneutrale Elemente sowie Inverse.

Damit wir ein immer definiertes Produkt erhalten, betrachten wir einen festen Punkt $x_0 \in X$, in diesem Zusammenhang *Grundpunkt* oder *Basispunkt* genannt, und geschlossene Wege mit Anfang und Ende x_0 , auch *Schleifen* in X mit Grundpunkt x_0 genannt. Es ist in der Homotopietheorie oft nötig, Grundpunkte auszuzeichnen und als Strukturdatum den Räumen hinzuzufügen. Wir verwenden dazu eine angepaßte Terminologie.

Wir nennen (X, x_0) einen *punktierten Raum*. Eine *punktierte Abbildung* $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, die den Grundpunkt auf den Grundpunkt abbildet. Eine Homotopie $h: X \rightarrow Y$ heißt *punktiert*, wenn h_t für alle $t \in I$ punktiert ist. Wir bezeichnen mit $[X, Y]^0$ die Menge der punktierten Homotopieklassen (gegebene Grundpunkte sind unterstellt und nicht notiert). Entsprechend gibt es dann Begriffe wie *punktierte Homotopieäquivalenz* und dergleichen. Einen nicht weiter spezifizierten Grundpunkt notieren wir oft durch $*$. Wir

erhalten so die Kategorie TOP^0 der punktierten Räume und die zugehörige Homotopiekategorie h-TOP^0 .

Das Produkt von Homotopieklassen definiert auf der Menge $\pi_1(X, x_0)$ der Homotopieklassen von Schleifen mit Grundpunkt x_0 eine Verknüpfung, die nach (4.1) die Gruppenaxiome erfüllt. Diese Gruppe heißt *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x_0)$ von X zum Grundpunkt x_0 . Wir lassen x_0 in der Bezeichnung weg, wenn der Grundpunkt aus dem Kontext gegeben ist. Ein Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er wegweise zusammenhängend ist und $\pi_1(X, x_0)$ nur aus dem neutralen Element besteht. Die Fundamentalgruppe wurde 1895 von Poincaré [200, §12] als *groupe fondamentale* eingeführt.

Ist u ein Weg in X von x_0 nach x_1 , so ist die Abbildung

$$t(u): \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad [w] \mapsto [u][w][u^-]$$

ein Homomorphismus mit Inversem $t(u^-)$, wie unmittelbar mittels (4.1) nachgeprüft wird. Grundpunkte innerhalb derselben Wegekomponente liefern also isomorphe Fundamentalgruppen. Sie sind allerdings nicht kanonisch isomorph; deshalb sollte man Gruppen zu verschiedenen Grundpunkten in derselben Wegekomponente nicht einfach identifizieren.

Sei $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine punktierte Abbildung und $w: I \rightarrow X$ eine Schleife mit Grundpunkt x_0 . Dann ist fw eine Schleife mit Grundpunkt y_0 . Die Zuordnung

$$\pi_1(f): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad [w] \mapsto [fw]$$

ist ein Homomorphismus. Statt $\pi_1(f)$ schreiben wir auch f_* und nennen f_* die durch f induzierte Abbildung. Auf diese Weise wird π_1 ein Funktor von der Kategorie der punktierten Räume in die Kategorie der Gruppen.

Wir werden sogleich zeigen: Homotopieäquivalente Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen. Man sagt deshalb, die Fundamentalgruppe ist eine Homotopieinvariante. Zur Vorbereitung dienen der nächste Satz und Hilfssatz.

(4.2) Hilfssatz. Sei $F: I \times I \rightarrow Y$ stetig. Seien Wege a, b, c und d durch $a(t) = F(0, t)$, $b(t) = F(1, t)$, $c(t) = F(t, 0)$ und $d(t) = F(t, 1)$ definiert. Dann ist $d \simeq (a^- * c) * b$.

Beweis. Es genügt, den Fall $F = \text{id}$ zu betrachten und die dabei gewonnene Homotopie mit F zusammensetzen. Je zwei Wege in $I \times I$ mit gleichem Anfang und Ende sind aber durch lineare Verbindung homotop. \square

(4.3) Satz. Sei $H: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$. Sei $w: I \rightarrow X$, $t \mapsto H(x_0, t)$ für ein $x_0 \in X$. Dann gilt die Gleichheit $t(w)g_* = f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$.

Beweis. Sei $u: I \rightarrow X$ eine Schleife mit Anfang x_0 . Wir wenden (4.2) auf $F = H(u \times \text{id})$ an und erhalten $gu \simeq (w^- * fu) * w$. \square

(4.4) Satz. *Ist $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist die induzierte Abbildung $f_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus. Speziell ist ein kontrahierbarer Raum einfach zusammenhängend.*

Beweis. Wir wählen stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ und Homotopien $H: gf \simeq \text{id}(X)$, $K: fg \simeq \text{id}(Y)$. Aus (4.3) erhalten wir $g_* f_* = (gf)_* = t(w)(\text{id}_*) = t(w)$ mit $w(t) = H(x_0, t)$. Es ist $t(w)$ ein Isomorphismus, also $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f x_0)$ injektiv und $g_*: \pi_1(Y, f x_0) \rightarrow \pi_1(X, g f x_0)$ surjektiv. Ebenso folgt $(fg)_* = t(v)$ mit $v(t) = K(y_0, t)$. Für $y_0 = f(x_0)$ speziell erkennen wir deshalb g_* auch als injektiv, folglich als bijektiv. Demnach ist auch f_* ein Isomorphismus. \square

Will man sich von der Wahl eines Grundpunktes befreien, so betrachtet man das *Fundamentalgruppoid* $\Pi(X)$. Ein *Gruppoid* ist eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. Die Objekte von $\Pi(X)$ sind die Punkte von X . Ein Morphismus in $\Pi(X)$ von x nach y ist eine Homotopieklasse $[v]$ von Wegen v von x nach y . Die Komposition von Morphismen $[v]: x \rightarrow y$, $[w]: y \rightarrow z$ wird durch $[w] \circ [v] = [v * w]$ definiert. Das Fundamentalgruppoid ist das universelle Objekt für alle Transportphänomene entlang Wegen, die nur von der Homotopieklasse des Weges abhängen.

Wir werden später zeigen, daß jede Gruppe als Fundamentalgruppe eines Raumes realisiert werden kann.

Nun noch einige Bemerkungen zur Rolle des Grundpunktes. Ist $w: I \rightarrow X$ eine Schleife, so faktorisiert w über den Quotientenraum $I/\partial I$ (Identifikation von ∂I zu einem Punkt), und diese Faktorisierung ist mit der Homotopierelation verträglich. Deshalb können wir $\pi_1(X, *)$ auch als die punktierte Homotopiemenge $[I/\partial I, X]^0$ ansehen, oder, da $I/\partial I$ zu S^1 homöomorph ist, mit dem punktierten Raum $(S^1, 1)$ als die punktierte Homotopiemenge $[S^1, X]^0$. Wir untersuchen zunächst etwas genauer die Rolle des Grundpunktes. Indem wir den Grundpunkt vergessen, erhalten wir eine Abbildung

$$(4.5) \quad \varphi: [S^1, X]^0 \rightarrow [S^1, X], \quad [f]^0 \mapsto [f].$$

Unter gewissen Voraussetzungen ist sie bijektiv (4.7).

Sei X ein Raum mit einer stetigen Multiplikation $m: X \times X \rightarrow X$, die den Grundpunkt e als neutrales Element hat, das heißt $m(e, x) = x = m(x, e)$. Zum Beispiel kann (X, m) eine topologische Gruppe sein. Wir setzen aber im Augenblick nicht voraus, daß m assoziativ oder kommutativ ist. Auf einer punktierten Homotopiemenge $[Y, X]^0$ definieren wir eine Verknüpfung, genannt das m -Produkt, durch $[f], [g] \mapsto [f \cdot g]$; darin ist $f \cdot g: y \mapsto m(f(y), g(y))$, also die übliche punktweise Multiplikation. Auf der Menge $\pi_1(X, e) = [S^1, X]^0$ haben wir jetzt zwei Verknüpfungen: Das m -Produkt und das $*$ -Produkt der Fundamentalgruppe.

(4.6) Satz. Sei (X, e) ein Raum mit einer stetigen Multiplikation m , die e als neutrales Element hat. Dann stimmen das $*$ -Produkt und das m -Produkt auf $\pi_1(X, e)$ überein, und das Produkt ist kommutativ.

Beweis. Sei k die konstante Schleife. Es gilt für zwei Schleifen u und v

$$u * v = (u * k) \cdot (k * v) \simeq u \cdot v.$$

Das zeigt die Übereinstimmung der Produkte. Wegen $(u * k) \cdot (k * v) = (k * v) \cdot (u * v)$ ist $\pi_1(X, e)$ abelsch. \square

(4.7) Satz. Sei X wegzusammenhängend. Dann ist φ aus (4.5) surjektiv. Ist $\pi_1(X, e)$ abelsch, so ist φ sogar bijektiv.

Beweis. Um die Surjektivität von φ zu zeigen, müssen wir $f: S^1 \rightarrow X$ homotop in eine punktierte Abbildung deformieren. Zu diesem Zweck sei $w: I \rightarrow X$ ein Weg von $f(1)$ nach e . Wir benutzen, daß $\{1\} \subset S^1$ eine Kofaserung ist; das ist eine direkte Konsequenz von (3.4) und (3.6) im Falle des homöomorphen Raumes $I/\partial I$. Es gibt dann eine Homotopie von f , die auf $\{1\}$ mit w übereinstimmt.

Ist $h: I \times I \rightarrow X$ eine (unpunktierte) Homotopie zwischen den Schleifen h_0 und h_1 und $w: t \mapsto h(1, t)$, so ist nach (4.2) $h_0 \simeq w * (h_1 * w^-)$. Ist aber $\pi_1(X, e)$ abelsch, so sind h_0 und h_1 auch punktiert homotop. Also ist φ injektiv. \square

Wir kommen später in einem allgemeineren Kontext noch einmal auf die vergessende Abbildung (4.5) zurück. Es ist aber jetzt schon eine lehrreiche Übung, sich zu überlegen, daß φ die Konjugationsklassen von $\pi_1(X, e)$ für jeden Raum X injektiv abbildet.

5 Die Fundamentalgruppe des Kreises

Nach den Erläuterungen des letzten Abschnittes behandeln wir die Fundamentalgruppe des Kreises S^1 in der unpunktieren Form: Wir haben einen Isomorphismus $\pi_1(S^1, 1) \cong [S^1, S^1]$, und in der letzteren Gruppe können wir die Verknüpfung durch die Multiplikation in S^1 definieren. Wir benutzen die Sätze (3.8) und (3.9).

Sei $p_0: I \rightarrow S^1$, $t \mapsto \exp(2\pi it)$. Ist $f: S^1 \rightarrow S^1$ gegeben, so ist für eine Hochhebung g von $f p_0$ entlang $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die ganze Zahl $g(1) - g(0)$ unabhängig von der Auswahl von g , da sich je zwei Hochhebungen um eine additive Konstante aus \mathbb{Z} unterscheiden. Diese Zahl heiße *Abbildungsgrad* von f und werde mit $d(f)$ bezeichnet.

(5.1) Satz. Über den Abbildungsgrad gelten die folgenden Aussagen:

- (1) Sind f_0 und f_1 homotop, so ist $d(f_0) = d(f_1)$.

(2) Die nach (1) wohldefinierte Abbildung $d: [S^1, S^1] \rightarrow \mathbb{Z}$, $[f] \mapsto d(f)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. (1) Sei $f: S^1 \times I \rightarrow S^1$ eine Homotopie von f_0 nach f_1 und $h = f(p_0 \times \text{id})$. Wir wählen eine Hochhebung $H: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ von h (mit irgendeiner Anfangsbedingung). Es gilt $d(f_t) = H(1, t) - H(0, t)$. Die Abbildung $t \mapsto H(1, t) - H(0, t)$ ist als stetige Abbildung in die ganzen Zahlen konstant. Damit ist d wohldefiniert.

(2) Homomorphie: Sind $f, \tilde{f}: S^1 \rightarrow S^1$ gegeben und $g, \tilde{g}: I \rightarrow \mathbb{R}$ Hochhebungen von $f p_0, \tilde{f} p_0$, so ist $g + \tilde{g}$ eine Hochhebung von $(f \cdot \tilde{f}) p_0$. Deshalb gilt

$$d(f \cdot \tilde{f}) = (g + \tilde{g})(1) - (g + \tilde{g})(0) = g(1) - g(0) + \tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = d(f) + d(\tilde{f}).$$

Surjektiv: $q_n: S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^n$ hat den Grad n , da $t \mapsto tn$ eine Hochhebung von $q_n p_0$ ist.

Injektiv: Sei $d(f) = 0$. Eine Hochhebung g von $f p_0$ erfüllt $g(1) = g(0)$. Es gibt deshalb eine Abbildung $F: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F p_0 = g$ und $p F = f$. Durch

$$S^1 \times I \rightarrow S^1, \quad (z, t) \mapsto p((1-t)F(z) + t)$$

wird eine Homotopie von f zu einer konstanten Abbildung gegeben. Eine nullhomotope Abbildung repräsentiert das neutrale Element von $[S^1, S^1]$. Also ist der Kern von d trivial. \square

Der Satz (5.1) läßt sich leicht auf andere Situationen übertragen. Sei $x \in \mathbb{C}$. Ist $S_r^1(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$, so ist $k_{a,r}: S^1 \rightarrow S_r^1(a)$, $z \mapsto rz + a$ ein Homöomorphismus. Wir erhalten deshalb eine Bijektion

$$d: [S_r^1(a), S_s^1(b)] \rightarrow \mathbb{Z}, \quad [f] \mapsto d(k_{b,s}^{-1} \circ f \circ k_{a,r}).$$

Auch hier nennen wir $d(f)$ wieder den Grad von f .

Wir benutzen den Grad dazu, andere Gruppen der Form $[X, S^1]$ zu berechnen. Die Gruppenstruktur darin wird wieder durch die Multiplikation in S^1 definiert. Im Vorgriff auf spätere Entwicklungen verwenden wir auch die Bezeichnung

$$H^1(X) = [X, S^1]$$

und nennen diese Gruppe die erste Kohomologiegruppe von X . In der Variablen X ist $H^1(X)$ ein homotopieinvarianter, kontravarianter Funktor von Räumen in die Kategorie der abelschen Gruppen (Hom-Funktor).

Seien $D_j = D_{r(j)}(a_j)$, $1 \leq j \leq t$, paarweise disjunkte Kreisscheiben. Sei $D_{r(0)} = D_0$ so beschaffen, daß alle D_j im Innern D_0° von D_0 liegen. (Also $|a_i - a_j| > r_i + r_j$ für $1 \leq i < j \leq t$ und $|a_0 - a_j| + r_j < r_0$ für $1 \leq j \leq t$.) Sei $M = D_0 \setminus \bigcup_{j=1}^t D_j^\circ$. Sei $f: M \rightarrow S^1$ gegeben. Durch Einschränkung von f auf den Rand S_j von D_j erhalten wir den zugehörigen Grad $d_j(f)$ von $f|_{S_j}$.

(5.2) Satz. Die Zuordnung $[f] \mapsto (d_1(f), \dots, d_t(f))$ ist ein Isomorphismus $\gamma: [M, S^1] \rightarrow \prod_{j=1}^t \mathbb{Z}$. Es gilt $d_0(f) = \sum_{j=1}^t d_j(f)$.

Beweis. (1) γ ist injektiv. Ist $d_j(f) = 0$, so läßt sich $f|_{S_j}$ auf D_j erweitern (1.3). Ist $\gamma[f] = 0$, so hat also f eine Erweiterung F auf D_0 und ist damit nullhomotop. Dann ist auch die Einschränkung auf M nullhomotop.

(2) γ ist surjektiv. Die Abbildung

$$\varepsilon_1: z \mapsto \frac{z - a_1}{|z - a_1|}$$

ist für alle $z \neq a_1$ definiert und liefert insbesondere eine Abbildung $\varepsilon_1: M \rightarrow S^1$. Nach Konstruktion ist $d_1(\varepsilon_1) = 1$. Ferner läßt sich $\varepsilon_1|_{S_j}$, $j \geq 2$ auf D_j erweitern, ist damit also nullhomotop. Also ist $d_j(\varepsilon_1) = 0$ für $j \geq 2$. Damit ist $\gamma(\varepsilon_1)$ der Einheitsvektor $(1, 0, \dots, 0)$. Ebenso lassen sich die anderen Einheitsvektoren realisieren.

(3) Die Relation. Durch

$$(z, t) \mapsto \frac{z - ta_0 - (1-t)a_1}{|z - ta_0 - (1-t)a_1|}$$

wird eine Homotopie von $\varepsilon_1|_{S_0}$ nach einer Abbildung vom Grad 1 gegeben. Also ist die fragliche Relation für ε_1 erfüllt. Ebenso für alle anderen Basiselemente und damit überhaupt immer. \square

Die Retraktion $r_x: \mathbb{C} \setminus \{x\} \rightarrow S^1$, $z \mapsto (z-x)/|z-x|$ ist eine Homotopieäquivalenz (1.2) und folglich

$$[S^1, \mathbb{C} \setminus \{x\}] \rightarrow [S^1, S^1], \quad [f] \mapsto [r_x f]$$

eine Bijektion. Der Grad von $r_x f$ heißt *Umlaufzahl* von f bezüglich x , auch $\text{Um}(f, x)$ bezeichnet. Abbildungen $f_0, f_1: S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x\}$ sind also genau dann homotop, wenn sie dieselbe Umlaufzahl haben. Das Komplement $\mathbb{C} \setminus f(S^1)$ zerfällt in offene Wegkomponenten, und die Umlaufzahl bezüglich x ist konstant, solange x in einer Komponente bleibt.

Sei $w: I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x\}$ eine Schleife. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x\}$ mit $f \circ p_0 = w$. Die Umlaufzahl von f nennen wir die Umlaufzahl von w und schreiben dafür $\text{Um}(w, x)$.

(5.3) Notiz. Sei $W: I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Hochhebung von w entlang P , siehe (3.9). Dann ist $\text{Um}(w, 0) = W(1) - W(0)$.

Beweis. Der Realteil $\text{Re}W(t) = F(t)$ ist eine Hochhebung von $t \mapsto w(t)/|w(t)|$. Nun wende man die Definitionen an, sowie $W(1) - W(0) = \text{Re}(W(1) - W(0)) = F(1) - F(0)$. \square

Die Umlaufzahl tritt in der Funktionentheorie auf, zum Beispiel beim Residuensatz. Sie mißt, wie oft bei einer Integration über einen geschlossenen Weg ein bestimmter Punkt umlaufen wird. Die Beziehung zur Analysis wird durch den folgenden Satz hergestellt.

(5.4) Satz. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein stetig differenzierbarer Weg mit Anfang 1. Dann ist

$$\Gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma|_{[0,t]}} \frac{dz}{z}$$

eine stetig differenzierbare Hochhebung von γ entlang P mit Anfang 0.

Beweis. Es gibt eine Hochhebung $W: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ von γ mit Anfang 0. Sie ist stetig differenzierbar, da P ein lokaler Diffeomorphismus ist. Definitionsgemäß ist

$$\int_{\gamma|_{[0,s]}} \frac{dz}{z} = \int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

In das rechte Integral wird $\gamma(t) = \exp(2\pi i W(t))$ eingesetzt und das gewünschte Resultat ergibt sich. \square

(5.5) Folgerung. Ist $w: I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x\}$ eine stetig differenzierbare Schleife, so ist

$$\text{Um}(w, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_w \frac{dz}{z - x}$$

eine Integraldarstellung der Umlaufzahl. \square

(5.6) Notiz. Sei $A \in GL(2, \mathbb{R})$. Dann hat $l_A: S^1 \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus 0, x \mapsto Ax$ bezüglich Null als Umlaufzahl das Vorzeichen der Determinante von A .

Beweis. Die Umlaufzahl hängt nur von der Wegekomponekte von A ab. Sicherlich hat $l_I = \text{id}$ den Grad 1. Im zweiten Fall haben wir es etwa mit $z \mapsto \bar{z}$ zu tun, und diese Abbildung hat den Grad -1 . \square

(5.7) Satz. Sei $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^1 -Abbildung mit $\psi(0) = 0$ aus einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$. Sei das Differential $D\psi(0)$ invertierbar. Dann gibt es nach dem Umkehrsatz der Differentialrechnung ein $\varepsilon > 0$, so daß $\psi: U_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein C^1 -Diffeomorphismus der ε -Umgebung $U_\varepsilon(0)$ auf ihr Bild ist. Für $\delta < \varepsilon$ hat die resultierende Abbildung $\psi: S_\delta^1(0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ als Umlaufzahl um Null das Signum der Determinante von $D\psi(0)$.

Beweis. Da ψ eine C^1 -Abbildung ist, gibt es eine Darstellung [31, p. 37]

$$\psi(x) = x_1 g_1(x) + x_2 g_2(x)$$

mit stetigen Funktionen g_j und $\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(0) = g_j(0)$. Die Jacobi-Matrix $D\psi(0)$ hat also die Spalten $g_1(0)$ und $g_2(0)$. Wir betrachten die Homotopie

$$H(x, t) = x_1 g_1(tx) + x_2 g_2(tx).$$

Für $t > 0$ ist $H_t(x) = t^{-1}\psi(tx)$ und für $t = 0$ ist $H_0(x) = D\psi(0)$. Demnach liegt eine Homotopie von $\psi: S^1_\delta \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ nach $D\psi(0): S^1_\delta \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ vor. Nun wende man (5.6) an. \square

(5.8) Bemerkung. Der Satz (5.2) gilt genauso für Abbildungen $M \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus x$ und Umlaufzahlen um x . \diamond

Der nächste Satz besagt, grob gesprochen, daß man mit der Umlaufzahl Nullstellen (mit Vielfachheiten) zählen kann.

(5.9) Satz. Sei $f: D_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, die im Innern von $D_r(0)$ stetig differenzierbar ist. Sei $f(S_r(0)) \subset \mathbb{R}^2 \setminus 0$. In jedem Punkt $x \in f^{-1}(0)$ sei das Differential $Df(x)$ regulär und $\varepsilon(x) \in \{\pm 1\}$ das Vorzeichen der Determinante von $Df(x)$. Dann ist $f^{-1}(0)$ eine endliche Menge und

$$\text{Um}(f, 0) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \varepsilon(x).$$

Diese Summe ist Null, falls $f^{-1}(0)$ leer ist.

Beweis. Eine Kombination aus (5.2), (5.7) und (5.8). \square

(5.10) Beispiel. Wir skizzieren einen topologischen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra: Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$; dann gibt es $z_0 \in \mathbb{C}$, das der Gleichung $a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_{n-1} z_0^{n-1} + z_0^n = f(z_0) = 0$ genügt. Man zeigt: Für $|z| > \max(1, |a_0| + \dots + |a_{n-1}|) = r$ und $0 \leq t \leq 1$ ist

$$H(z, t) = z^n + t a_{n-1} z^{n-1} + \dots + t a_0 \neq 0.$$

Deshalb definiert H für $R > r$ eine Homotopie

$$H: S_R \times I \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0, \quad S_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\},$$

zwischen $z \mapsto z^n$ und $z \mapsto f(z)$. Hätte $z \mapsto f(z)$ keine Nullstelle z_0 , $|z_0| \leq R$, so ließe sich $z \mapsto f(z)$ auf $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ durch dieselbe Formel als Abbildung nach $\mathbb{C} \setminus 0$ erweitern, wäre also nullhomotop. Dann wäre auch $S_R \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$, $z \mapsto |z|^{-n} z^n$ nullhomotop. Widerspruch, da diese Abbildung den Grad n hat. \diamond

(5.11) Eigenschaften des Grades. Es gilt immer $d(f \circ g) = d(f)d(g)$. Ein Homöomorphismus $S^1 \rightarrow S^1$ hat den Grad ± 1 . Hat $f: S^1 \rightarrow S^1$ den Grad $d(f) \neq 1$, so gibt es ein $x \in S^1$ mit $f(x) = x$. Die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ hat den Grad -1 .

Sei $u = \exp(2\pi i/n)$ eine n -te Einheitswurzel. Sei $h: S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung, die der Funktionalgleichung $h(uz) = h(z)$ genügt. Dann gilt $d(h) \equiv 0 \pmod n$.

Seien k und j zu n teilerfremde ganze Zahlen. Sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung, die der Funktionalgleichung $f(u^k z) = u^j f(z)$ genügt. Dann gilt für ihren Grad die Kongruenz $k d(f) \equiv j \pmod n$. Ist umgekehrt mit einer ganzen Zahl $d(f)$ diese Kongruenz erfüllt, so gibt es eine Abbildung vom Grad $d(f)$, die der Funktionalgleichung genügt.

Die Abbildung $f: S^1 \rightarrow S^1$ erfülle die Funktionalgleichung $f(-z) \neq f(z)$; dann hat f einen ungeraden Grad. Für $f, g: S^1 \rightarrow S^1$ gelte immer $f(z) \neq g(z)$; dann ist $d(f) = d(g)$. Gelte $d(g) \equiv 0 \pmod n$ für ein $n > 0$; dann gibt es $h: S^1 \rightarrow S^1$, so daß $g = h^n$. \diamond

6 Windungszahl

Eine Abbildung $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt C^k -Abbildung, wenn die zugehörige Abbildung $\tilde{f} = f \circ p_0: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ k -mal stetig differenzierbar ist und die Ableitungen an den Stellen 0 und 1 übereinstimmen. Wir setzen $f'(\exp(2\pi i t)) = \tilde{f}'(t)$, wobei rechts die übliche Ableitung steht. Ist f eine C^1 -Abbildung und $f'(z)$ immer ungleich Null, so nennen wir f eine C^1 -Immersion. Die Umlaufzahl der Abbildung $f': S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *Windungszahl* von f . Eine *reguläre Homotopie* von C^1 -Immersionen ist eine stetige Abbildung $h: S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$, so daß für jedes $t \in I$ die Einschränkung h_t eine C^1 -Immersion ist. „Regulär homotop“ ist eine Äquivalenzrelation. Eine reguläre Homotopie liefert eine gewöhnliche Homotopie der Ableitungen. Also haben regulär homotope C^1 -Immersionen dieselbe Windungszahl. Die geometrische Bedeutung der Windungszahl erhellt sich aus dem nächsten Satz von Graustein und Whitney [271]. Der Satz steht allerdings schon 1901 in der Dissertation von Boy und ist in [26] in einer Fußnote auf Seite 155 erwähnt. Siehe auch [236].

(6.1) Satz. *Zwei C^1 -Immersionen $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind genau dann regulär homotop, wenn sie dieselbe Windungszahl haben.*

Beweis. Seien zwei Immersionen mit derselben Windungszahl gegeben. Um sie als regulär homotop zu erkennen, dürfen wir sie zunächst durch reguläre Homotopie in eine Normalform überführen. Dazu dienen die folgenden Schritte (1) – (3) über eine Immersion $h: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(1) Sei $d: S^1 \rightarrow S^1$ eine Drehung. Dann sind h und hd regulär homotop.

(2) Sei $a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein affiner Automorphismus, der aus einer Translation und einer linearen Abbildung mit positiver Determinante zusammengesetzt ist. Dann sind h und ah regulär homotop.

Wenn man statt h die Immersion $h_\lambda: s \mapsto \lambda h(s)$ für $\lambda > 0$ betrachtet, so gilt für die Bogenlänge $\text{Länge}(h_\lambda) = \lambda \text{Länge}(h)$. Wegen (2) können wir uns deshalb auf Kurven der Länge 1 beschränken. Statt Abbildungen $h: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ betrachten wir stetig differenzierbare Abbildungen (ebenfalls reguläre Immersionen genannt) $g: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit den folgenden Eigenschaften: $g(0) = g(1)$, $g'(0) = g'(1)$, $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Indem wir jedem h die Abbildung $g: t \mapsto h(\exp(2\pi i t))$ zuordnen, erhalten wir eine Entsprechung zwischen den g und den h . Die letzte Vorüberlegung ist:

(3) g ist regulär homotop zu einer Abbildung $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, deren Ableitung $f'(t)$ immer den Betrag 1 hat (Bogenlänge als Parameter).

Wir gehen nunmehr von folgender Situation aus: $g_0, g_1: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind C^1 -Immersionen derselben Windungszahl. Die Ableitungen $f_i = g'_i$ können als Abbildungen $I \rightarrow S^1$ aufgefaßt werden. Es gilt $f_0(0) = 1 = f_1(0)$. Da die Immersionen g_0 und g_1 dieselbe Windungszahl haben, gibt es eine Homotopie $f: I \times I \rightarrow S^1$, $(s, t) \mapsto f_t(s) = f(s, t)$ relativ zu $\{0, 1\}$ zwischen f_0 und f_1 . Eine reguläre Homotopie g_t konstruieren wir durch Integration von f_t . Wir setzen

$$g_t(s) = \int_0^s f(\zeta, t) d\zeta - s \int_0^1 f(\zeta, t) d\zeta.$$

Das ist stetig in (s, t) , differenzierbar in s für festes t , und es gilt $g_t(0) = 0 = g_t(1)$. Es ist

$$\int_0^1 f(\zeta, 0) d\zeta = \int_0^1 g'_0(\zeta) d\zeta = 0,$$

und das liefert zunächst $g'_t(0) = g'_t(1)$, so daß auch die Ableitungen wieder geschlossene Kurven sind, das heißt, g_t ist eine C^1 -Schleife. Wenn wir noch zeigen, daß g'_t immer ungleich Null ist, so ist g eine reguläre Homotopie, denn wegen

$$\int_0^1 f(\zeta, 0) d\zeta = \int_0^1 g'_0(\zeta) d\zeta = 0$$

ergibt sich für $t = 0$ die ursprüngliche Abbildung (analog für $t = 1$).

Es ist $|f(s, t)| = 1$; ferner ist $|\int_0^1 f(\zeta, t) d\zeta| < 1$, falls $s \mapsto f(s, t)$ nicht konstant ist. Also wollen wir f so wählen, daß f_t für kein t konstant ist. Sicherlich sind f_0 und f_1 nicht konstant. Wir wählen Hochhebungen $F_0, F_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ von f_0, f_1 mit $F_0(0) = 0 = F_1(0)$. Damit definieren wir $F_t(s) = (1-t)F_0(s) + tF_1(s)$, $f_t(s) = \exp(2\pi i F_t(s))$. Es ist f_t genau dann konstant, wenn F_t konstant ist. Ist die Windungszahl $n = F_0(1) = F_1(1)$ von Null verschieden, so ist F_t nicht konstant. Ist $n = 0$, so sind F_0 und F_1 Schleifen, die deshalb auch zu einem anderen Zeitpunkt begonnen werden können. Nach (1) und (2) können wir die Ausgangskurven so modifizieren, daß $F_0(s) \geq 0$, $F_1(s) \geq 0$, $F_0(0) = F_1(0) = 0$ gilt, und dann ist kein F_t konstant. \square

Die Windungszahl kann geometrisch durch die Selbstüberkreuzungen der Bildkurve bestimmt werden, vorausgesetzt, die Kreuzungen sind transvers. Wir betrachten deshalb *generische* Immersionen $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Das heißt: $f^{-1}(x)$ hat immer höchstens zwei Elemente, und für $z_1 \neq z_2$ mit $f(z_1) = f(z_2)$ sind die Tangentialvektoren $f'(z_1)$ und $f'(z_2)$ linear unabhängig. Ein Punkt P mit zwei Urbildern bei f heiße *Doppelpunkt* der Kurve.

Wir wählen einen Anfangspunkt, der kein Doppelpunkt ist, und durchlaufen von dort die Kurve, das heißt wir stellen uns die Kurve als durch $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben vor, und $g(0) = g(1)$ tritt für $t \neq 0, 1$ nicht als Funktionswert auf. Ist $t_1 < t_2$ und $P = g(t_1) = g(t_2)$, so sei $\epsilon(P) \in \{\pm 1\}$ das Vorzeichen der Determinante $\det(g'(t_2), g'(t_1))$. Den folgenden Satz und seinen Beweis entnehmen wir [126].

(6.2) Satz. *Sei $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine generische C^1 -Immersion, die in der oberen Halbebene verläuft. Ferner sei $g(0) = 0$, und $g'(0)$ habe die Richtung der positiven x -Achse. Dann ist $1 + \sum \epsilon(P)$ die Windungszahl von g ; summiert wird dabei über die Doppelpunkte P von g .*

Beweis. Sei $T = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1\}$. Die Seiten des Dreiecks T seien mit $H = \{(t, t) \in T\}$, $S_1 = \{(t_1, 1) \in T\}$ und $S_2 = \{(0, t_2) \in T\}$ bezeichnet. Wir setzen $l(t_1, t_2) = \min(t_2 - t_1, 1 - (t_2 - t_1))$ und definieren $\psi: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned}\psi(t_1, t_2) &= \frac{g(t_2) - g(t_1)}{l(t_1, t_2)}, \quad \text{falls } l(t_1, t_2) \neq 0, \\ \psi(t, t) &= g'(t), \\ \psi(0, 1) &= -g'(0).\end{aligned}$$

Dann ist ψ stetig und im Innern des Dreiecks T stetig differenzierbar, und es gilt $\psi(t_1, t_2) = 0$ genau dann, wenn $t_1 < t_2$, $(t_1, t_2) \neq (0, 1)$ und $g(t_1) = g(t_2)$, das heißt genau dann, wenn $g(t_1)$ ein Doppelpunkt ist. Man bestätigt, daß 0 ein regulärer Wert von ψ ist und $D\psi(t_1, t_2)$ dasselbe Vorzeichen wie $\epsilon(P)$ hat, wenn $g(t_1) = g(t_2) = P$ ein Doppelpunkt ist. Wegen Satz (5.9) bleibt zu überlegen, daß die Umlaufzahl von $\psi|_{\partial T}$ bezüglich Null gleich $W - 1$ ist, wenn W die Windungszahl von g ist. Das Stück H von ∂T liefert wegen $\psi(t, t) = g'(t)$ den Beitrag W zur Umlaufzahl. Ferner stellt man fest: Entlang S_1 liefert ψ eine Kurve von $g'(1)$ nach $-g'(0)$, die bis auf die Endpunkte in der unteren Halbebene verläuft; entlang S_2 liefert ψ eine Kurve von $-g'(0)$ nach $g'(0)$, die bis auf die Endpunkte in der oberen Halbebene verläuft. Also liefert ψ entlang $S_1 \cup S_2$ eine Schleife mit der Umlaufzahl -1 , da $g'(0)$ auf der positiven x -Achse liegt. \square

Durch Wahl eines geeigneten Koordinatensystems und eventuelle Änderung des Durchlaufsinns läßt sich der vorstehende Satz auf jede generische Immersion $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ anwenden.

(6.3) Folgerung. Eine glatte Einbettung $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ hat die Windungszahl ± 1 . \square

(6.4) Folgerung. Eine generische Immersion $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Windungszahl $n > 0$ hat mindestens $n - 1$ Doppelpunkte (Kreuzungen). \square

Die Windungszahl wurde schon von Gauß betrachtet. Eine der ersten Überlegungen zur Topologie oder, wie man damals sagte, zur Geometria Situs, findet sich in den Notizbüchern von Gauß, die aus dem Nachlaß in den gesammelten Werken herausgegeben wurden. Gauß schreibt [92, p. 271]:

Theorem aus der Geometria Situs

Es sei die Amplitudo einer ganzen in sich selbst zurückkehrenden Curve = $\pm n \cdot 360^\circ$. Sie hat wenigstens Knoten [= Kreuzungspunkte]

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{für } n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7. \end{array}$$

Der Beweis scheint nicht leicht zu sein; wahrscheinlich wird dazu dienen, dass man die Curve ihrem Laufe nach in Theile abtheilt, deren Grenzen die Punkte sind, in denen ihre Richtung = $90^\circ(2n + 1)$, dann eine unendliche gerade Linie, deren Richtung = 90° , in der Richtung 0° durch die Fläche schiebt und die Folge der Stücke gehörig beachtet . . .

Der nächste Eintrag in das Notizbuch zeigt, daß auch Gauß dem Alles oder Nichts der mathematischen Forschung unterlag, denn er beginnt [loc.cit., p. 272] „Der Beweis ist doch leicht“. Im weiteren Verlauf der Notiz schreibt er:

Interessant wird es in Beziehung auf diesen Gegenstand sein, zu untersuchen

1) Die Resultate des Durchschneidens der Knoten, in so fern man



wodurch dann lauter getrennte Grenzlinien entstehen. Zählt man dann für jede Grenzlinie, die [die] +Seite innen hat, +1, und für jede, die die -Seite innen hat, -1, so ist das Aggregat $\times 360^\circ$ die ganze Amplitudo.

Allgemeiner stellt sich Gauß die Frage, die möglichen Lagen einer geschlossenen Kurve in der Ebene zu bestimmen.

Die hier Aggregat genannte Zahl ist die Windungszahl. Gauß unterstellt, daß eine Kurve ohne Kreuzungen die Windungszahl ± 1 hat (6.3).

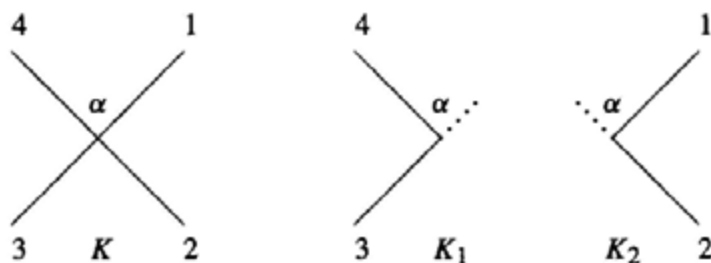
Nachdem man die Gauß-Modifikationen durchgeführt hat, bleibt ein System von eingebetteten Gauß-Kreisen übrig. Davon mögen P Stück positiven und N Stück negativen Drehsinn haben. Dann gilt der Satz von Gauß:

(6.5) Satz. Die Windungszahl der ursprünglichen Kurven ist $P - N$.

Beweis. Zum Beweis ist es zweckmäßig, zwei Erweiterungen der Definition der Windungszahl vorzunehmen. Einmal „Kurven“ zu betrachten, die aus mehreren Stücken bestehen: Die Windungszahl sei einfach die Summe der Windungszahlen der Stücke. Zum anderen stückweise stetig differenzierbare Kurven zuzulassen, also Kurven mit Ecken. Für irgendeine stetig differenzierbare Abbildung $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f'(t) \neq 0$ werde die Windungszahl durch $W(b) - W(a)$ definiert, wenn $W: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von $t \mapsto |f'(t)|^{-1} f'(t)$ ist; es ist jetzt natürlich $W(b) - W(a)$ im allgemeinen keine ganze Zahl mehr. Ist nun $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf den Stücken $[t_{i-1}, t_i]$ einer Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ stetig differenzierbar, so hat man die Windungszahlen aller dieser Stücke. An jeder Ecke $f(t_i)$ betrachtet man jetzt noch den Außenwinkel $\alpha_i \in] -\pi, \pi[$, um den man die Tangente gegen den Uhrzeigersinn drehen muß, um vom Anfang des Sprungs zu seinem Ende zu gelangen, und addiert zur Summe der Windungszahlen der Stücke die Summe $\frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i$, um damit definitionsgemäß die Windungszahl der Kurve mit Ecken zu erhalten. Durch Abrundung der Ecken zeigt man, daß die so definierte Windungszahl in der Tat eine ganze Zahl ist.

Mit diesen Vorbemerkungen zeigt man nun den Satz durch die Überlegung, daß sich die Windungszahl bei Gauß-Modifikationen nicht ändert. Wir betrachten noch einmal die Gauß-Modifikation (siehe die folgende Figur).

Wenn man neben dem Kreuzungspunkt einen Durchlauf auf dem Ast Nummer 1 startet, sind zwei Fälle denkbar: Entweder 2 oder 3 ist der nächste Ast, auf dem man wieder beim Kreuzungspunkt ankommt. Im ersten Fall gehört diese Kreuzung zu einer einzigen Kurve unseres Systems, die dann nach der Modifikation in die beiden Stücke K_1 und K_2 zerfällt. Im zweiten Fall überkreuzen sich zwei Kurven mit den Ästen 13 und 24. Nach der Modifikation ist daraus eine einzige Kurve geworden.



Was passiert mit den Windungszahlen in beiden Fällen? Im ersten Fall ist die Windungszahl von K_1 gleich $x + \alpha$, von K_2 gleich $y - \alpha$ und von K gleich $x + y$, wenn x und y die Windungszahlen der entsprechenden Stücke sind. Im zweiten Fall hat die Kurve $K_1 K_2$ die Windungszahl $u + \alpha + v - \alpha$, wobei u zum Stück 13 und v zum Stück 24 gehört. Man sieht, in beiden Fällen ändert sich die Windungszahl nicht.

Man beendet den Beweis mit der Folgerung (6.3). □

7 Der Satz von Seifert und van Kampen

Die Fundamentalgruppe ist leicht zu definieren, aber schwer zu bestimmen. Im weiteren Verlauf werden zwei Berechnungsmethoden entwickelt: Die Theorie der Überlagerungen und der Satz von Seifert und van Kampen.

Der Satz (7.3) von Seifert [231] und van Kampen [142] gestattet es, die Fundamentalgruppe von $Z = X \cup X'$ aus den Fundamentalgruppen von X , X' und $X \cap X'$ zu berechnen. Um den Satz formulieren zu können, erinnern wir an einen kategorientheoretischen Begriff. Ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\ G_2 & \xrightarrow{j_2} & G \end{array}$$

aus Gruppen und Homomorphismen heißt *Pushout* in der Kategorie der Gruppen, wenn es die folgende *universelle Eigenschaft* hat: Zu jedem Paar $h_i: G_i \rightarrow H$ von Homomorphismen mit $h_1 i_1 = h_2 i_2$ gibt es genau einen Homomorphismus $f: G \rightarrow H$ mit $f j_i = h_i$. Sind in einem Pushout i_1 und i_2 Inklusionen von Untergruppen, so nennt man G das *freie Produkt* von G_1 und G_2 mit *amalgamierter Untergruppe* G_0 und verwendet dafür die Bezeichnung $G = G_1 *_{G_0} G_2$.

Ist $G_0 = \{1\}$, so heißt G das *freie Produkt* von G_1 und G_2 , in Zeichen $G = G_1 * G_2$. Das freie Produkt $G_1 * G_2$ ist die kategorielle Summe von G_1 und G_2 in der Kategorie der Gruppen. Das direkte Produkt $G_1 \times G_2$ ist das kategorielle Produkt. Sind i_1 und i_2 gegeben, so sind j_1 und j_2 durch die universelle Eigenschaft bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt.

(7.1) Satz. Zu jedem Paar $i_1: G_0 \rightarrow G_1$ und $i_2: G_0 \rightarrow G_2$ von Homomorphismen gibt es eine Ergänzung $j_1: G_1 \rightarrow G$ und $j_2: G_2 \rightarrow G$ zu einem Pushout. \square

Für einen Beweis des Satzes konsultiere man Lehrbücher der Algebra. In unseren geometrischen Anwendungen wird sich die Existenz von Pushout-Diagrammen von selbst ergeben.

(7.2) Beispiel. Sei $i: G_0 \rightarrow G$ ein Homomorphismus und sei $N \subset G$ der von Bild i erzeugte Normalteiler von G . Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow i & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{p} & G/N \end{array}$$

mit der Quotientabbildung $p: G \rightarrow G/N$ ein Pushout. \diamond

Die Konstruktion des freien Produkts verläuft etwa folgendermaßen. Die Elemente von $G_1 * G_2$ sind „Worte“ der Form $x_1 x_2 \dots x_r$, in denen x_i aus $G_1 \setminus \{1\}$ oder aus $G_2 \setminus \{1\}$ ist und benachbarte Elemente nicht in derselben Gruppe liegen.

Außerdem gibt es noch das Einselement. Man multipliziert diese Worte, indem man sie hintereinander schreibt. Wenn an der „Nahtstelle“ zwei Elemente aus derselben Gruppe zusammenstoßen, so werden sie durch ihr Produkt ersetzt. Ein entstehendes Einselement wird weggelassen. Da sich bei diesem Prozeß gelegentlich alles gegenseitig aufhebt, so interpretiert man das „leere Wort“ als das Einselement von $G_1 * G_2$. Sind G_1 und G_2 nichttrivial, so ist also $G_1 * G_2$ nicht kommutativ.

(7.3) Satz. *Der Raum Z sei Vereinigung der offenen Teile X und X' . Die Mengen X , X' und $A = X \cap X'$ seien nichtleer und wegweise zusammenhängend. Wir wählen ein $a \in A$ als Grundpunkt und bezeichnen mit $i: A \rightarrow X$, $i': A \rightarrow X'$, $j: X \rightarrow Z$ und $j': X' \rightarrow Z$ die Inklusionen. Dann ist*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X) \\ \downarrow i'_* & & \downarrow j_* \\ \pi_1(X') & \xrightarrow{j'_*} & \pi_1(Z) \end{array}$$

ein Pushout.

Beweis. Wir weisen die universelle Eigenschaft des Pushout-Diagrammes nach. Seien also Homomorphismen

$$h: \pi_1(X) \rightarrow H, \quad h': \pi_1(X') \rightarrow H$$

gegeben, die $hi_* = h'i'_*$ erfüllen. Wir zeigen, daß es genau einen Homomorphismus $\phi: \pi_1(Z) \rightarrow H$ gibt, für den $\phi j_* = h$, $\phi j'_* = h'$ gilt. Wir zeigen zunächst, daß $\pi_1(Z)$ durch die Bilder von j_* und j'_* erzeugt wird. Daraus folgt die Eindeutigkeit von ϕ .

Im folgenden treten Wege auf, die durch ein anderes Intervall $[b, c]$ parametrisiert werden; wir ändern dann gegebenenfalls die Parametrisierung durch einen monoton wachsenden Homöomorphismus $I \rightarrow [b, c]$.

Sei $w: I \rightarrow Z$ eine Schleife mit Anfang a . Wir wählen eine ganze Zahl n derart, daß $w[i/n, (i+1)/n]$ für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$ entweder in X oder X' enthalten ist. Sei w_i der Weg, der durch Einschränkung von w auf $[i/n, (i+1)/n]$ und Parametrisierung durch das Einheitsintervall entsteht. Wir wählen Wege $q_i: I \rightarrow Z$ von a nach $w(i/n)$, wobei q_i innerhalb A verläuft, wenn $w(i/n)$ in A liegt, und sonst in X oder X' , je nachdem ob $w(i/n)$ in der betreffenden Menge liegt. Es seien q_0 und q_n konstante Wege. Dann sind $q_i * w_i * q_{i+1}^-$ in X oder X' verlaufende Schleifen, und die Relation

$$w \simeq (q_0 * w_0 * q_1^-) * \dots * (q_{n-1} * w_{n-1} * q_n^-)$$

beweist, daß $[w]$ in der von Bild j und Bild j' erzeugten Untergruppe liegt. (An dieser Stelle und an einigen weiteren kommt es nur auf die Homotopieklasse der Wege an; deshalb spielt es keine Rolle, daß das $*$ -Produkt nicht assoziativ ist.)

Wir kommen nun zur Existenz von ϕ . Wir nennen Wege *klein*, wenn sie ganz in X oder X' verlaufen. Für

$$z = j_1(z_1) \dots j_n(z_n) \in \pi_1(Z)$$

mit $z_j \in \pi_1(X)$, $j_\nu = j_*$, $h_\nu = h$ oder den entsprechenden gestrichenen Größen, definieren wir

$$\phi(z) = \prod h_\nu(z_\nu).$$

Wenn gezeigt ist, daß diese Festsetzung unabhängig von der Produktdarstellung von z ist, so wird dadurch ein Homomorphismus ϕ der gewünschten Eigenschaft definiert. Wir zeigen also: Aus $\prod j_\nu(z_\nu) = 1$ folgt $\prod h_\nu(z_\nu) = 1$. Wir wählen Abbildungen $f_i: [(i-1)/n, i/n] \rightarrow X, X'$, die z_i repräsentieren. Dann wird das Produkt $\prod j_\nu(z_\nu)$ durch $F_0: I \rightarrow Z$ mit $F_0|[(i-1)/n, i/n] = f_i$ repräsentiert. Nach Voraussetzung ist die Schleife F_0 nullhomotop. Wir wählen eine Nullhomotopie $F: I \times I \rightarrow Z$ von F_0 . Sodann wählen wir die ganze Zahl m so groß, daß bei einer Zerlegung von $I \times I$ in achsenparallele Quadrate der Seitenlänge $1/nm$ jedes solche Quadrat durch F nach X oder X' abgebildet wird (Lebesguesche Zahl). Sei $k = nm$. Wir setzen

$$F_{i,j} = F|[(i-1)/k, i/k] \times [(j-1)/k, j/k], \quad G_{i,j} = F|(i-1)/k \times [(j-1)/k, j/k].$$

Wir wählen Wege $r_{i,j}$ von $F((i-1)/k, (j-1)/k) = x_{i,j}$ nach a innerhalb A, X oder X' , und zwar je nachdem, in welcher dieser Mengen $x_{i,j}$ liegt. Falls $x_{i,j} = a$ ist, so sei dieser Weg der konstante Weg. Mit dieser Wahl sind

$$r_{i,j}^- * F_{i,j} * r_{i+1,j} = f_{i,j}, \quad r_{i,j}^- * G_{i,j} * r_{i,j+1} = g_{i,j}$$

„kleine“ Schleifen mit dem Grundpunkt a . Durch F wird eine „kleine“ Homotopie $F_{i,j} * G_{i+1,j} \simeq G_{i,j} * F_{i,j+1}$ relativ zu den Endpunkten vermittelt. Es folgt die Existenz einer „kleinen“ Homotopie

$$f_{i,j} * g_{i+1,j} \simeq g_{i,j} * f_{i,j+1}.$$

Wenden wir auf die dadurch gegebenen Elemente der Fundamentalgruppen die Homomorphismen h_ν an, so entsteht eine Gleichheit; wegen der Bedingung $hi_* = h'i'_*$ ist es dabei gleichgültig, ob wir $[f_{i,j}]$ als Element von $\pi_1(X)$ oder $\pi_1(X')$ auffassen, falls Bild $f_{i,j} \subset A$ ist. Durch Anwendung der h_ν werden deshalb

$$f_{1,1} * f_{2,1} * \dots * f_{k,1}$$

und

$$g_{1,1} * \cdots * g_{1,k} * f_{1,k} * \cdots * f_{k,k} * g_{k,k}^{-1} * \cdots * g_{k,1}^{-1}$$

auf dasselbe Element abgebildet. Das zweite Element wird aber durch ein Produkt von konstanten Wegen repräsentiert, und das erste liefert nach Anwendung der h_ν dasselbe wie $f_1 * \cdots * f_n$. \square

(7.4) Beispiel. Für $n > 1$ ist S^n einfach zusammenhängend, da S^n eine offene Überdeckung aus den kontrahierbaren Mengen $S^n \setminus \{e_1\}$ und $S^n \setminus \{-e_1\}$ hat, deren Schnitt für $n > 1$ wegzusammenhängend ist. \diamond

Es gibt auch eine Version von (7.3) für Gruppoide, siehe [46], [47].

Gelegentlich muß man eine topologische Situation geschickt modifizieren, um die Voraussetzungen des Satzes von Seifert und van Kampen zu erreichen. Wir geben dafür Beispiele.

Sind X und Y punktierte Räume, so bezeichne $X \vee Y$ deren punktierte Summe: Das ist derjenige Quotient der topologischen Summe $X + Y$, in der die beiden Grundpunkte identifiziert wurden. (Die punktierte Summe ist die kategorientheoretische Summe in der Kategorie der punktierten Räume. Analog für eine beliebige Familie von punktierten Räumen.) Wir nennen einen Raum *wohlpunktiert*, wenn die Inklusion des Grundpunktes eine abgeschlossene Kofaserung ist. Wir bilden den Raum $X' = X \vee I$, wenn $0 \in I$ der Grundpunkt ist. In X' verwenden wir jetzt aber den Grundpunkt $1 \in I$. Damit gilt:

(7.5) Hilfssatz. Die Projektion $p: X' \rightarrow X$, die auf X die Identität ist und auf I konstant, ist eine punktierte h -Äquivalenz.

Beweis. Die Inklusion $I \rightarrow X'$ ist eine Kofaserung; man kann nämlich eine Retraktion $X \times I \rightarrow X \times 0 \cup * \times I$ durch die Identität auf $I \times I$ zu einer Retraktion fortsetzen, die die behauptete Kofaserungseigenschaft beweist. Weil I zusammenziehbar ist, können wir nun (3.13) anwenden. \square

(7.6) Satz. Seien X und Y wohlpunktiert. Die Inklusionen $X \rightarrow X \vee Y \leftarrow Y$ induzieren dann ein Summendiagramm

$$\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X \vee Y) \leftarrow \pi_1(Y)$$

in der Kategorie der Gruppen, das heißt, $\pi_1(X \vee Y)$ ist das freie Produkt der beiden Fundamentalgruppen $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$.

Beweis. Die Voraussetzung erlaubt es uns, die Räume X und Y durch X' und Y' zu ersetzen. Wir setzen $X'' = X' \cup U(Y)$, worin $U(Y)$ das Intervall $]1/2, 1]$ in $Y' \vee I$ ist. Analog wird $Y'' = Y' \cup U(X)$ definiert. Die Inklusionen $X' \subset X''$, $Y' \subset Y''$

und $\{*\} \subset X'' \cap Y''$ sind punktierte h -Äquivalenzen. Auf X'' und Y'' läßt sich (7.3) anwenden. \square

Der vorstehende Satz gilt zum Beispiel für $S^1 \vee S^1$ (mit $1 \in S^1$ als Grundpunkt). Anstatt nachzuweisen, daß S^1 wohlpunktiert ist, kann man auch etwas anders die Voraussetzungen von (7.3) erreichen. Es sei U_1 der offene Teil, in dem -1 aus dem zweiten Summanden herausgenommen wurde. Dann ist die Inklusion $S^1 \rightarrow U_1$ eine punktierte h -Äquivalenz. Ebenso verfahren wir mit dem zweiten Summanden. Der Satz (7.3) läßt sich auf die Überdeckung U_1, U_2 anwenden. Wir erhalten, daß $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ eine freie Gruppe mit zwei Erzeugenden ist. Erzeugende werden durch die Inklusion der Summanden repräsentiert. Ebenso wird induktiv die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1)$ einer n -fachen punktierten Summe als freie Gruppe mit n Erzeugenden bestimmt. Auch beliebige punktierte Summen von S^1 kann man auf diese Weise behandeln, wenn man die aus der mengentheoretischen Topologie bekannte Tatsache benutzt, daß eine kompakte Teilmenge von $\bigvee_{j \in J} S^1$ außerhalb des Grundpunktes nur endlich viele Summanden trifft. \diamond

(7.7) Beispiel. Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge mit k Elementen. Dann heißt $\mathbb{R}^2 \setminus E$ eine k -fach gelochte Ebene. Die Fundamentalgruppe einer k -fach gelochten Ebene ist die freie Gruppe mit k Erzeugenden, wie man mittels (7.3) durch Induktion nach k zeigt. Eine k -fach gelochte Ebene ist übrigens zu $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0), \dots, (k, 0)\}$ homöomorph. Außerdem kann man zeigen: Die k -fach gelochte Ebene ist zu $\bigvee_{j=1}^k S^1$ h -äquivalent. \diamond

(7.8) Beispiel. Sei $\varphi: S^1 \rightarrow A$ eine punktierte Abbildung. Entstehe X aus A durch Anheften einer 2-Zelle vermöge φ , das heißt, X ist durch ein Pushoutdiagramm

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\ D^2 & \xrightarrow{\Phi} & X \end{array}$$

definiert. Nimmt man aus X den Mittelpunkt der angehefteten 2-Zelle heraus, so ist die Inklusion von A in den resultierenden Raum X_0 ein starker Deformationsretrakt (radiale Retraktion der Zelle auf den Rand). Auf die Überdeckung $X_0, (D^2)^\circ$ kann man (7.3) anwenden. Der Satz zeigt, daß $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$ surjektiv ist, und der Kern ist der von $[\varphi]$ erzeugte Normalteiler. Da wir freie Gruppen schon als Fundamentalgruppe realisiert haben, kann man auf die angedeutete Weise eine beliebige Gruppe durch Hinzufügen von Relationen realisieren. (Das Anheften von Zellen wird später im Kapitel über CW -Komplexe ausführlich untersucht.) \diamond

(7.9) Beispiel. Sei $A = \{0\} \cup \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Sei $CA = A \times I / A \times 1$ der Kegel über A mit Grundpunkt $(0, 0)$. Dann ist CA zusammenziehbar aber nicht $CA \vee CA$. Sei $K_n \subset \mathbb{R}^2$ der Kreis mit Radius n^{-1} und Mittelpunkt $(n^{-1}, 0)$. Sei $B = \bigcup_{n \geq 1} K_n$

und CB der Kegel über B . Dann ist CB zusammenziehbar, aber $CB \vee CB$ ist nicht einfach zusammenhängend [102]. \diamond

(7.10) Beispiel. Mit etwas Beweistechnik über Kofaserungen, die wir später entwickeln, zeigt man, daß aus einem Pushoutdiagramm (3.5) mit wegweise zusammenhängendem A durch Anwendung des Funktors π_1 ein Pushoutdiagramm entsteht. Die Zurückführung auf (7.3) geschieht dadurch, daß man die Abbildungen f und j zunächst durch die Inklusionen in den Abbildungszyylinder ersetzt. Durch diese „Verdickung“ der Räume erhält man dann ein h -äquivalentes Diagramm mit einer Vereinigung von offenen Mengen. \diamond

8 Überlagerungen

Für die geometrische Untersuchung stetiger Abbildungen $p: E \rightarrow B$ hat sich der folgende Gesichtspunkt als erfolgreich erwiesen: p wird als stetige Familie der Urbilder $p^{-1}(b)$ betrachtet, die durch B parametrisiert werden. In diesem Kontext nennt man E den *Totalraum*, B die *Basis* und $p^{-1}(b)$ die *Faser* von p über b . Besonders wichtig ist der Fall, daß alle Fasern homöomorph zu einem festen Raum F sind. Im einzelnen muß man festlegen, wie benachbarte Fasern miteinander verglichen werden sollen. Das geschieht durch die lokal trivialen Abbildungen, die lokal wie die Projektion eines Produktes auf einen Faktor aussehen.

Sei $p: E \rightarrow B$ eine stetige Abbildung und $U \subset B$ eine offene Teilmenge. Eine *lokale Trivialisierung* mit *typischer Faser* F über U ist ein Homöomorphismus

$$\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F, \quad z \mapsto (\varphi_1(z), \varphi_2(z)),$$

für den $\text{pr}_1 \varphi(z) = \varphi_1(z) = p(z)$ gilt. Die Abbildung p heißt *lokal trivial* mit *typischer Faser* F , wenn jeder Punkt $b \in B$ eine offene Umgebung U besitzt, über der eine lokale Trivialisierung mit typischer Faser F existiert. Eine lokal triviale Abbildung heißt auch *Bündel* oder *Faserbündel* und eine lokale Trivialisierung *Bündelkarte*.

Eine *Überlagerung* ist eine lokal triviale Abbildung mit diskreter typischer Faser F . Ist F diskret, so ist $U \times F$ homöomorph zur topologischen Summe $\coprod_{x \in F} U \times \{x\}$. Die Summanden $U \times \{x\}$ sind alle zu U homöomorph, und $\varphi^{-1}(U \times \{x\})$ wird durch p topologisch abgebildet. Eine Überlagerung ist deshalb ein lokaler Homöomorphismus. Die Summanden $\varphi^{-1}(U \times \{x\})$ sind die *Blätter* der Überlagerung über U . Ist F endlich, so nennt man $|F| = n$ die *Blätterzahl* der Überlagerung und spricht von einer endlichen (genauer: n -fachen) Überlagerung.

(8.1) Beispiele. Die Abbildung $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ ist eine n -fache Überlagerung. Die Exponentialabbildungen $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto \exp(2\pi it)$ und $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ sind Überlagerungen mit typischer Faser \mathbb{Z} ; wir werden sie unter dem Aspekt der

Gruppenoperationen wieder aufgreifen. Die Einschränkung von p auf $]0, 3/2[$ ist ein lokaler Homöomorphismus aber keine Überlagerung. \diamond

In Überlagerungen sind Hochhebungen im wesentlichen eindeutig, wie der nächste Satz lehrt.

(8.2) Satz. Sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung. Sind $F_0, F_1: Y \rightarrow E$ Hochhebungen von $f: Y \rightarrow B$, die an einer Stelle $y_0 \in Y$ übereinstimmen, und ist Y zusammenhängend, so sind sie gleich.

Beweis. Sei $X = \{y \in Y \mid F_0(y) = F_1(y)\}$. Wenn wir zeigen, daß X offen und abgeschlossen ist, so folgt $X = Y$, weil Y zusammenhängend ist und X nicht leer.

Offen: Sei $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ eine lokale Trivialisierung über einer Umgebung U von $p(x)$ für ein $x \in X$. Da $F_0(x) = F_1(x)$ ist, liegt für ein $a \in F$ sowohl $\varphi F_0(x)$ als auch $\varphi F_1(x)$ in $U \times \{a\}$. Auf Grund der Stetigkeit gibt es eine offene Umgebung W von x , für die $\varphi F_i(W) \subset U \times \{a\}$ gilt. Da $\text{pr}_1 \varphi F_i = p F_i$ für $i = 0$ und $i = 1$ dieselbe Abbildung ist und $\text{pr}_1|_{U \times \{a\}}$ ein Homöomorphismus ist, so folgt $W \subset X$.

Abgeschlossen: Angenommen $F_0(y) \neq F_1(y)$. Da $p F_0 = p F_1$ ist, gibt es wegen der lokalen Trivialisierung disjunkte offene Umgebungen U_i von $F_i(y)$. Wegen der Stetigkeit von F_0 und F_1 gehört dann eine Umgebung von y zum Komplement von X . \square

(8.3) Satz. Eine Überlagerung ist eine Faserung.

Beweis. Sei eine Homotopie $h: X \times I \rightarrow B$ und eine Anfangsbedingung a gegeben. Eine offene Menge $U \subset B$ heiße zulässig, wenn p über U eine lokale Trivialisierung hat.

(1) Zu jedem $(x, t) \in X \times I$ wählen wir eine zulässige Umgebung $U(x, t)$ von $h(x, t)$. Sodann wählen wir eine offene Umgebung $W(x, t)$ von x und ein offenes Intervall $J(x, t)$ um t , so daß $h(W(x, t) \times J(x, t)) \subset U(x, t)$. Da I kompakt ist, wird I etwa von $J(x, t_1), \dots, J(x, t_m)$ überdeckt. Sei $V_x = \bigcap_{i=1}^m W(x, t_i)$. Sei $\varepsilon > 0$ eine Lebesguesche Zahl der Überdeckung $(J(x, t_i) \mid i = 1, \dots, m)$ und sei $1/n < \varepsilon$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann liegt $h(V_x \times [i/n, (i+1)/n])$ für $0 \leq i < n$ in einer zulässigen Teilmenge von B .

(2) Wir konstruieren eine Abbildung $H_x: V_x \times I \rightarrow E$ mit den Eigenschaften $p H_x = h|_{V_x \times I}$ und $H_x(v, 0) = a(v)$. Zu diesem Zweck benötigen wir für $i = 1, \dots, n$ Abbildungen

$$H_{x,i}: V_x \times [(i-1)/n, i/n] \rightarrow E$$

mit den Eigenschaften

$$p H_{x,i} = h|_{V_x \times [(i-1)/n, i/n]}, \quad H_{x,i-1}(v, i/n) = H_{x,i}(v, i/n),$$

sowie $H_{x,0}(v, 0) = a(v)$. Wir konstruieren $H_{x,i}$ durch Induktion nach i . Sei U eine zulässige Menge, die $h(V_x \times [0, 1/n])$ umfaßt. Sei $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in F} U_j$. Darin seien die U_j offen und disjunkt, und $p: U_j \rightarrow U$ sei ein Homöomorphismus. Sei $A_j = a^{-1}(U_j) \cap V_x$. Die A_j , $j \in F$ bilden eine offene Überdeckung von V_x durch paarweise disjunkte Mengen. Wir definieren $H_{x,0}: A_j \times [0, 1/n] \rightarrow U_j$ durch die Bedingungen

$$pH_{x,0}|_{A_j \times [0, 1/n]} = h|_{A_j \times [0, 1/n]}, \quad H_{x,0}(v, 0) = a(v)$$

eindeutig und stetig. Ist $H_{x,i-1}$ schon definiert, so konstruieren wir $H_{x,i}$ mittels $u \mapsto H_{x,i-1}(u, i/n)$ wie zuvor $H_{x,0}$ mittels a .

(3) Wir verfahren wie unter (1) und (2) mit jedem Punkt $x \in X$. Ist $z \in V_x \cap V_y$, so gilt $pH_x(z, t) = h(x, t) = pH_y(z, t)$. Nach Satz (8.1) gilt wegen $H_x(z, 0) = a(z) = H_y(z, 0)$ für alle $t \in I$ auch $H_x(z, t) = H_y(z, t)$. Mithin wird durch $H(z, t) = H_x(z, t)$ für $z \in V_x$ eindeutig eine Abbildung $H: X \times I \rightarrow E$ definiert, die auch die weiteren Forderungen des Satzes erfüllt. \square

Ein anderer Beweis von (8.3) verläuft so: Zunächst wird jeder Weg $t \mapsto h(x, t)$ mit Anfang $a(x)$ eindeutig hochgehoben, was leicht durch Zerstückelung von I geschieht. Damit liegt die Hochhebung als Mengenabbildung vor, und es bleibt ihre Stetigkeit zu zeigen.

Wir stellen einige Folgerungen aus den Sätzen (8.2) und (8.3) zusammen. Zugrundegelegt wird eine Überlagerung $p: E \rightarrow B$.

(8.4) Sei $w: I \rightarrow B$ ein Weg und $p(e) = w(0)$. Dann gibt es genau eine Hochhebung von w mit Anfang e , das heißt einen Weg $u: I \rightarrow E$ mit $u(0) = e$ und $pu = w$. Die Existenz folgt aus (8.3), angewendet auf einen Punktraum X und die Eindeutigkeit aus (8.2). \diamond

(8.5) Sei $h: I \times I \rightarrow B$ eine Homotopie von Wegen. Sei $H_0: I \rightarrow B$ eine Hochhebung von h_0 . Wir wählen sie als Anfangsbedingung in (8.3) für eine Hochhebung $H: I \times I \rightarrow E$ von h . Die Abbildungen $t \mapsto H(\varepsilon, t)$ sind Abbildungen in eine diskrete Faser und folglich konstant ($\varepsilon = 0, 1$). Also ist H eine Homotopie von Wegen. \diamond

(8.6) Seien $u_0, u_1: I \rightarrow E$ Wege mit demselben Anfang x und seien pu_0 und pu_1 homotop. Heben wir eine Homotopie zwischen ihnen mit konstantem Anfang x hoch, so entsteht wegen (8.4) eine Homotopie von u_0 nach u_1 , und wegen (8.5) handelt es sich um eine Homotopie von Wegen. \diamond

(8.7) Sei u eine Hochhebung von w . Jeder zu w homotope Weg hat eine Hochhebung u' , und es ist $u \simeq u'$. Ist u eine Schleife, so auch u' . Insbesondere ist die induzierte Abbildung $p_*: \pi_1(E, x) \rightarrow \pi_1(B, p(x))$ injektiv. \diamond

(8.8) Satz. Seien w_0 und w_1 Wege in E mit Anfang x . Sei $u_i = pw_i$. Es gilt genau dann $w_0(1) = w_1(1)$, wenn $u_0(1) = u_1(1)$ ist und $[u_0 * u_1^-]$ in $p_*\pi_1(E, x)$ liegt.

Beweis. Ist $w_0(1) = w_1(1)$, so ist $p_*[w_0 * w_1^-] = [u_0 * u_1^-]$. Umgekehrt: Wir heben $u_0 * u_1^-$ mit Anfang x hoch. Wegen $[u_0 * u_1^-] \in p_*\pi_1(E, x)$ gibt es eine zu $u_0 * u_1^-$ homotope Schleife, die sich mit Anfang x hochheben läßt, und nach (8.6) läßt sich dann auch $u_0 * u_1^-$ selbst zu einer Schleife hochheben. Also haben u_0 und u_1 Hochhebungen mit Anfang x und demselben Ende. Diese Hochhebungen sind notwendig w_0 und w_1 . \square

Der nächste Satz ist bedeutsam, weil er die Existenz einer stetigen Abbildung aus algebraischen Daten über Fundamentalgruppen sicherstellt. Er ist einer der Grundpfeiler für die algebraische Klassifikation der Überlagerungen.

(8.9) Satz. Sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung und Z wegweise und lokal wegweise zusammenhängend. Sei $f: Z \rightarrow B$ stetig und gelte $f(z) = p(x)$. Es gibt genau dann eine Hochhebung $\Phi: Z \rightarrow E$ von f mit $\Phi(z) = x$, wenn $f_*\pi_1(Z, z)$ in $p_*\pi_1(E, x)$ enthalten ist.

Beweis. Falls eine Hochhebung existiert, so besteht die genannte Inklusion der Gruppen, denn wegen $p\Phi = f$ ist

$$f_*\pi_1(Z, z) = p_*\Phi_*\pi_1(Z, z) \subset p_*\pi_1(E, x)$$

(Funktoreigenschaft von π_1).

Sei umgekehrt $f_*\pi_1(Z, z) \subset p_*\pi_1(E, x)$. Wir konstruieren Φ zunächst als Abbildung von Mengen und zeigen danach die Stetigkeit.

Sei $z_0 \in Z$. Es gibt einen Weg w von z nach z_0 . Sei $v: I \rightarrow E$ eine Hochhebung von fw mit Anfang x . Wir möchten Φ durch $\Phi(z) = v(1)$ definieren. Sei w_1 ein weiterer Weg von z nach z_0 und v_1 eine Hochhebung von fw_1 mit Anfang x . Dann gilt

$$pv(1) = fw(1) = f(z_0) = fw_1(1) = pv_1(1);$$

ferner gilt

$$[pv * pv_1^-] = f_*[w * w_1^-] \in p_*\pi_1(E, x).$$

Nach (8.8) gilt also $v(1) = v_1(1)$, und damit ist Φ durch $\Phi(z) = v(1)$ wohldefiniert.

Die Abbildung Φ ist stetig: Sei U eine offene Umgebung von $\Phi(z_0)$, so daß $p(U) = V$ zulässig und $p: U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus mit Inversem $q: V \rightarrow U$ ist. Sei W eine wegweise zusammenhängende Umgebung von z_0 mit $f(W) \subset V$. Wir behaupten: $\Phi(W) \subset U$. Sei nämlich $z_1 \in W$ und w_1 ein Weg in W von z_0

nach z_1 . Dann ist $w * w_1$ ein Weg von z nach z_1 und $v_1 = v * qf w_1$ ein Weg mit $p v_1 = f \circ (w * w_1)$ und $v_1(0) = x$. Es ist $v_1(1) \in U$. \square

(8.10) Satz. Sei X eine topologische Gruppe mit neutralem Element x und $p: E \rightarrow X$ eine Überlagerung mit wegweise und lokal wegweise zusammenhängendem E . Zu jedem $e \in p^{-1}(x)$ gibt es genau eine Gruppenstruktur auf E , die E zu einer topologischen Gruppe mit neutralem Element e und p zu einem Homomorphismus macht.

Beweis. Zur Konstruktion der Gruppenstruktur auf E . Sei $m: X \times X \rightarrow X$ die Gruppenmultiplikation. Wir wollen $m(p \times p)$ entlang p zu $M: E \times E \rightarrow E$ mit $M(e, e) = e$ hochheben. Nach (8.9) ist das möglich, wenn

$$m_*(p \times p)_*\pi_1(E) \subset p_*\pi_1(E)$$

ist. Das folgt aus dem voranstehenden Satz, wenn wir

$$[p w_1 \cdot p w_2] = [p w_1 * p w_2] = [p(w_1 * w_2)]$$

bedenken. Aus der Eindeutigkeit (8.2) folgt, daß M assoziativ ist. Ebenso läßt sich der Übergang zum Inversen hochheben; und aus der Eindeutigkeit folgt wieder, daß es sich auch in E um das Inverse handelt. \square

Ein bekanntes Resultat von Weyl besagt, daß eine kompakte, zusammenhängende, halbeinfache Liesche Gruppe eine endliche, einfach zusammenhängende Überlagerung hat. Siehe [34, V.7] für die Fundamentalgruppen von kompakten Lieschen Gruppen.

(8.11) Beispiel. Die Abbildung $SU(n) \times S^1 \rightarrow U(n)$, $(A, z) \mapsto A \cdot zE$ ist eine n -fache Überlagerung. \diamond

(8.12) Beispiel. Die Gruppe $O(n)$ hat zwei verschiedene zweifache Überlagerungen, die über $SO(n)$ nichttrivial sind. Sie unterscheiden sich dadurch, daß über Spiegelungen an Hyperebenen Elemente der Ordnung 2 bzw. 4 liegen ($n \geq 1$). Wichtig sind die zweifachen universellen Überlagerungen $\text{Spin}(k) \rightarrow SO(k)$, $k \geq 3$. Zur algebraischen Konstruktion der Spinor-Gruppen siehe zum Beispiel [34, I.6]. \diamond

Wir behandeln das Hochheben von Wegen in Überlagerungen von einem mehr begrifflichen Standpunkt.

Ist B ein Raum und B^I der Raum der Wege $w: I \rightarrow B$ mit KO-Topologie (siehe III.5), so haben wir eine stetige Abbildung

$$\pi = (\pi_0^B, \pi_1^B): B^I \rightarrow B \times B, \quad w \mapsto (w(0), w(1)).$$

Wir können $B \times B$ mit $B^{\partial I}$ identifizieren. Dann wird π durch die Inklusion $\partial I \subset I$ induziert. Mit den Eigenschaften der KO-Topologie verifiziert man:

(8.13) Notiz. Sei $A \subset X$ eine Kofaserung aus lokal kompakten Räumen. Dann ist die durch i induzierte Abbildung $B^i: B^X \rightarrow B^A$ eine Faserung. \square

Sei $p: E \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Dazu haben wir zwei kommutative Diagramme, das zweite definiert als Pullback.

$$(8.14) \quad \begin{array}{ccc} E^I & \xrightarrow{p^I} & B^I \\ \downarrow \pi_0^E & & \downarrow \pi_0^B \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & B^I \\ \downarrow & & \downarrow \pi_0^B \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

Die Pullbackeigenschaft liefert uns eine Abbildung $\eta: E^I \rightarrow Z$. Dual zu (3.3) gilt:

(8.15) Notiz. Genau dann ist p eine Faserung, wenn η einen Schnitt besitzt. \square

Sei nun p eine Überlagerung. Wegen der Existenz und Eindeutigkeit der Hochhebung von Wegen in Überlagerungen ist η bijektiv. Eine Überlagerung ist eine Faserung. Ein Schnitt von η ist in diesem Fall eine stetige Umkehrabbildung. Also gilt:

(8.16) Notiz. Ist p eine Überlagerung, so ist das linke Diagramm in (8.14) ein Pullback. \square

Eine stetige Abbildung $p: E \rightarrow B$, bei der das linke Diagramm in (8.14) ein Pullback ist, ist eine Faserung. Es ist dann nämlich η ein Homöomorphismus. In dieser Faserung gilt, daß Wege eindeutig zu gegebenem Anfang hochgehoben werden können. Man könnte diesen Sachverhalt dazu benutzen, *verallgemeinerte Überlagerungen* zu definieren.

9 Fasertransport. Automorphismen

Sei $p: E \rightarrow B$ eine Überlagerung und $w: I \rightarrow B$ ein Weg von b_0 nach b_1 . Zu jedem $x \in p^{-1}(b_0)$ gibt es eine Hochhebung $v: I \rightarrow E$ von w mit Anfang x . Das Ende $v(1)$ liegt in $p^{-1}(b_1)$. Ist $w \simeq w'$ und v' eine Hochhebung von w' mit Anfang x , so gilt nach (8.6) $v(1) = v'(1)$. Also erhalten wir durch die Zuordnung $x \mapsto v(1)$ eine Abbildung

$$\tau[w]: p^{-1}(b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_1),$$

die nur von der Homotopieklasse $[w]$ abhängt. Wir nennen sie *Fasertransport entlang w* . Es gilt $\tau[w * v] = \tau[v]\tau[w]$. Der Transport entlang eines konstanten Weges ist die Identität. Es folgt $\tau[u^-] = \tau[u]^{-1}$, und $\tau[w]$ ist immer bijektiv. Die Zuordnungen