Philosophie der Raum-Zeit-Lehre

Von

Hans Reichenbach
Dr. phil., a. o. Professor an der Universität Berlin

Mit 50 Figuren und 1 Tafel im Text

1928
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschensche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
Berlin W 10 und Leipzig

Printed in Germany.

Druck von R. Wagner Sohn in Weimar.

Vorwort.

Die Veröffentlichung der vorliegenden Schrift ist mir ein willkommener Anlaß, der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft meinen Dank dafür auszusprechen, daß sie mir die Durchführung erkenntniskritischer Arbeiten zur Physik seit mehreren Jahren ermöglicht hat.

Für freundschaftlich-kritische Berichtigung mancher Einzelheiten bin ich Herrn Dr. Rudolf Carnap in Wien und Herrn Dr. Kurt Grelling in Berlin zu Dank verpflichtet; für mühevolle Hilfe bei der Korrektur Herrn Studienreferendar Hans Stotz in Stuttgart und Herrn stud. phil. Martin Strauß in Berlin.

Berlin, Oktober 1927.

Hans Reichenbach.

Inhalt.

Einleitung.

Wer die Philosophie unserer Zeit mit der Arbeitsweise der großen philosophischen Systematiker des 17. und 18. Jahrhunderts vergleicht, dem tritt als grundlegender Unterschied die Verschiedenheit in ihrer Einstellung zur Naturwissenschaft entgegen. Während jene klassischen Philosophen im engsten Zusammenhang mit der Naturerkenntnis ihrer Zeit standen, ja z. T. selbst, wie Descartes und Leibniz, führende Mathematiker und Physiker waren, ist in unserer Zeit zwischen Philosophie und Naturwissenschaft eine Entfremdung eingetreten, die zu einer unfruchtbaren Spannung zwischen beiden Gruppen geführt hat. Die Philosophen, deren fachwissenschaftliche Schulung sich zumeist auf historisch-philologischem Boden vollzog, werfen dem Naturwissenschaftler zu weitgehende Spezialisierung vor und wenden sich geisteswissenschaftlichen Problemen zu; die Naturwissenschaftler andererseits vermissen in der Philosophie die Behandlung der erkenntnistheoretischen Probleme, die wohl von einem Leibniz oder Kant im Rahmen der damaligen Naturwissenschaft gelöst wurden, im Rahmen der heutigen Naturerkenntnis aber nach neuer Durcharbeitung verlangen. Eine gegenseitige Geringschätzung, die den Sinn der Denkrichtung des andern verkennt, ist der Ausdruck dieser inneren Trennung.

Blickt man historisch zurück, so kann man die Wurzeln dieser Spaltung durch das vergangene Jahrhundert hindurch verfolgen. Noch für Kant bildete der Erkenntnisbegriff der mathematischen Naturwissenschaft den Ausgangspunkt aller philosophischen Erkenntnistheorie; und wenn man darin auch mit Recht eine gewisse Einseitigkeit seines Systems begründet sieht, so liegt darin doch zugleich die Stärke seiner erkenntnistheoretischen Position, der seine Philosophie ihre große Auswirkung verdankt. Es ist freilich verwunderlich, wie wenig Kant in der Ausarbeitung seines Systems von naturwissenschaftlichen Einzelresultaten Gebrauch gemacht hat, wie wenig naturwissenschaftliches Material gerade in seinen erkenntnistheoretischen Hauptschriften, auch nur in der Form von Beispielen, verarbeitet wird: er muß vielmehr den naturwissenschaftlichen

Erkenntnisbegriff als Ganzes gesehen und aus diesem Erlebnis heraus das System geschaffen haben, das als Resultat einer Analyse der Vernunft gerade den Erkenntnisbegriff der mathematischen Naturwissenschaft seiner Zeit hervorbringt. Wie gut er diesen Erkenntnisbegriff getroffen haben muß, geht vielleicht am deutlichsten aus der regen Anteilnahme hervor, die seine Lehre gerade bei den Naturwissenschaftlern gefunden hat; unabhängig davon, ob sie Gegner oder Anhänger waren, erschien ihnen eine Auseinandersetzung mit Kant selbstverständlich und notwendig, und die Lehre Kants wurde dem Naturwissenschaftler geradezu identisch mit Philosophie überhaupt. Aber Kants Lösung des Erkenntnisproblems war zugleich auch die letzte, in der die Naturwissenschaft zum Ausdruck kam. Die späteren philosophischen Systeme hatten mit der Naturwissenschaft ihrer Zeit keinen Zusammenhang mehr; und wenn sie sich auch z. T., wie in Schellings und Hegels Naturphilosophie, ausführlicher mit naturwissenschaftlichem Material befaßten als Kant, so gleicht diese Naturphilosophie doch viel mehr einer naiven Kritik naturwissenschaftlicher Resultate als einer Einfühlung in den Geist naturwissenschaftlicher Forschung. Seitdem blieben Naturwissenschaft und Philosophie getrennt; von Kants System erhielt sich die spekulative und die vernunftanalytische Komponente, während auf das Zusammentreffen mit der Naturwissenschaft verzichtet wurde. Der Philosoph suchte Zusammenhang mit dem Geisteswissenschaftler und lebte, soweit ihn Naturwissenschaft überhaupt interessierte, der Meinung, daß die Probleme der Naturerkenntnis seit Kant gelöst seien, daß es sich für die Entwicklung der Naturwissenschaft nur noch um die Ausfüllung des Kantschen Programms handeln könnte — eine Auffassung, die auch in der biegsameren Form der neukantischen Schule vor Widerspruch mit der naturwissenschaftlichen Entwicklung nicht zu schützen war. Denn die Naturwissenschaft schlug indes eigene Wege ein; man kann es Kant gewiß nicht zum Vorwurf machen, daß er diese Entwicklung nicht voraussah — aber man kann unmöglich von dem Naturwissenschaftler der heutigen Zeit verlangen, daß er die kantische Philosophie noch als Grundlage seiner Erkenntnistheorie anerkennt. So findet er weder bei Kant noch in den herrschenden Philosophenschulen eine Erkenntnistheorie, die ihn sein eigenes wissenschaftliches Tun begreifen läßt — noch immer steht die Philosophie dem gewaltigen Komplex der Naturwissenschaft fremd, ja verneinend gegenüber.

Es waren vielmehr die Naturwissenschaftler selbst, die im Laufe des letzten Jahrhunderts die Theorie der Naturerkenntnis zugleich mit ihrem inhaltlichen Ausbau ausgebildet haben. Freilich sind es auf dieser Seite nur einige wenige führende Köpfe gewesen, die sich des philosophischen Charakters ihrer Methodik bewußt waren; die meiste Arbeit ist hier unbewußt geleistet worden, ohne absichtliche Einstellung auf philosophische Resultate, in alleiniger Verfolgung fachwissenschaftlicher Interessen, die jedoch ganz von selbst zu philosophischen Fragestellungen führten. So stehen wir vor dem eigentümlichen Resultat, daß die Entwicklung der exakten Erkenntnistheorie im letzten Jahrhundert nicht von den Philosophen, sondern von den Naturwissenschaftlern vollzogen wurde, daß da, wo man auf einzelwissenschaftliche Dinge zielte, Erkenntnistheorie in sehr viel höherem Maße produziert wurde als da, wo man sie in philosophischen Spekulationen suchte. Und es sind wirklich erkenntnistheoretische Probleme, die hier gelöst wurden. Wenn die geisteswissenschaftlich eingestellte Philosophie unserer Tage der gegenwärtigen Naturwissenschaft den philosophischen Charakter absprechen will, wenn sie Leistungen wie die Relativitätstheorie oder die Mengenlehre spezialwissenschaftlich und unphilosophisch nennt, so drückt sich in diesem Urteil nur die Unfähigkeit aus, die komplizierte Denkmaschine der modernen Naturwissenschaft noch philosophisch zu durchschauen. Es sind dieselben Probleme, die die Erkenntnistheorie eines Descartes, Leibniz, Kant begründet haben, welche heute die mathematische Naturwissenschaft in ihren mathematisch und experimentell unendlich verfeinerten Methoden behandelt; man muß nur genug Einfühlung in die Technik dieser Denkmaschine besitzen, um zu bemerken, welches gewaltige Werkzeug gerade auch für die Durchforschung der philosophischen Grundfragen hier geschaffen wurde, und welche Möglichkeiten in seiner philosophisch gerichteten Auswertung noch enthalten sind.

Freilich ist die Situation allmählich auch für den Naturwissenschaftler zu kompliziert geworden. Auch er kann die eigentlich philosophische Auswertung nicht mehr vollziehen, einfach deshalb nicht, weil das einzelne Gehirn zur gleichzeitigen einzelwissenschaftlichen und philosophischen Arbeit nicht ausreicht. Eine Teilung der Arbeit ist unerläßlich geworden, seitdem sowohl die positive wie auch die erkenntnistheoretische Forschung eine solche Fülle von Kleinarbeit verlangt, daß sie die Kräfte des einzelnen übersteigt. Es kommt hinzu, daß philosophische und fachwissenschaftliche Arbeitsrichtung, so sehr sie in ihren großen Zügen aufeinander angewiesen sind, innerhalb der Mentalität des Einzelforschers einander doch geradezu entgegenwirken; die philosophische Besinnung auf Sinn und Bedeutung der Erkenntnis kann den Prozeß des naturwissenschaftlichen Erkennens geradezu hemmen, kann die Aktivität lähmen, die ohne eine gewisse Verantwortungslosigkeit den Mut zur Beschreitung neuer Wege nicht aufbrächte. Der Stil der modernen Fachwissenschaft hat allmählich die konkurrenzbeflügelte Hast der Technik, das Tempo sportlicher Rekorde angenommen; man mag diesen unhumanistischen Zug bedauern, aber er scheint die notwendige Form für die Produktivität unserer Zeit zu sein. Was wir ihm entgegenstellen können, ist nicht eine Konkurrenz mit weniger technisierten Mitteln, sondern allein die philosophische Durchdringung dieses Erkenntnisprozesses selbst; ist die Aufdeckung von Sinn und Bedeutung auch dieser maschinisierten Erkenntnis, die in Handlangergehirnen wohl Maschine bleibt, in ihrem System als Ganzem aber eine Erkenntnistiefe offenbart, wie sie eben nur durch die sozialisierte Zusammenarbeit einer organisierten Schicht von Einzelforschern erreicht werden kann.

Die Durchführung einer solchen Philosophie der Naturerkenntnis muß deshalb selbst einer besonderen Gruppe von Einzelforschern vorbehalten bleiben, wie sie sich in letzter Zeit deutlich herauszuheben beginnt; einer Gruppe, die einerseits die Technik der mathematischen Naturwissenschaft beherrscht, andererseits aber von ihr nicht derart belastet ist, daß sie über der Einzelarbeit den philosophischen Blick verliert. Denn ebenso wie philosophische Besinnung den wagenden Schritt des Einzelforschers hemmen kann, kann spezialisierte Produktivität den Blick auf philosophische Deutung einengen. Wenn gerade von philosophischer Seite dem Naturforscher ein Mangel an Verständnis für philosophische Problematik nachgesagt wird, so ist dieser Vorwurf nicht weniger berechtigt als der von der andern Seite erhobene Vorwurf der Verständnislosigkeit für naturwissenschaftliche Probleme; aber man ziehe daraus nicht die Folgerung, die Philosophie fern von der Naturwissenschaft als geisteswissenschaftliche Philosophie allein fortzuführen, sondern man gehe gerade mit philosophischem Blick in die Naturwissenschaft hinein und versuche mit ihren verschärften Mitteln auch die Philosophie ihres technisch vertieften Erkennens zu gestalten.

In dieser Einstellung sind vom Verfasser eine Reihe von

Untersuchungen durchgeführt worden, die von verschiedenen Seiten in den Komplex der mathematischen Naturwissenschaft eindringen. Die natürliche Gliederung der Ausgangswissenschaft führte dazu, den um die Probleme von Raum und Zeit gruppierten Teil dieser Untersuchungen selbständig zusammenzufassen und als einen ersten Abschluß der Öffentlichkeit vorzulegen; eine Zusammenfassung der weiteren Untersuchungen wird folgen. Gerade für die Raum-Zeit-Lehre lag ein weitreichendes mathematisch-physikalisches Material vor, einerseits hervorgegangen aus der mathematischen Analyse des Geometrieproblems, andererseits entwickelt durch die Einsteinsche Relativitätstheorie, in der sich die Fruchtbarkeit physikalischer Fragestellungen für philosophische Erkenntnisse lebendig gezeigt hat. So ist eine Philosophie der Raum-Zeit-Lehre heute zugleich immer eine Philosophie der Relativitätstheorie — in dieser Doppelheit mag sich die wissenschaftsanalytische Methode, von der eine solche Philosophie getragen wird, am deutlichsten kennzeichnen.

Wir hielten es dabei für notwendig, die Entwicklung des Materials mit in den Kreis der Darstellung einzubeziehen. Ein Hinweis auf mathematisch-physikalische Darstellungen des Stoffes war unmöglich, weil alle diese Darstellungen zu sehr auf die mathematisch-physikalische Auswertung eingestellt sind, als daß sie die philosophischen Grundzüge genügend hervortreten ließen. Andererseits erscheint es völlig ausgeschlossen, in die philosophische Auswertung dieses Stoffes einzutreten, ohne ihn zugleich auf Schritt und Tritt gegenwärtig zu halten. Die Naturphilosophie unserer Zeit wird in ebenso enger Verflechtung mit dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Stoff aufwachsen müssen, wie sie für die Kulturphilosophie und ihren geschichtlichen Stoff selbstverständlich ist. Und wenn der Kulturphilosophie deshalb das Recht gelassen werden muß, in ihren Darstellungen immer wieder den historischen Originaltext zu zitieren, dessen Inhalt sich durch Übersetzung und Umschreibung nicht völlig ausschöpfen läßt, so wundere man sich nicht, wenn wir bei unseren naturphilosophischen Untersuchungen immer wieder auf die mathematische Originalsprache zurückgreifen müssen, in der das „Buch der Natur“ nun einmal geschrieben ist. Denn die mathematische Sprache läßt sich noch viel weniger durch Übersetzung und Umschreibung ausschöpfen. Wenn ausführliche mathematische Rechnungen vermieden werden konnten, so liegt dies daran, daß ein großer Teil der erforderlichen mathematischen

Arbeit schon in des Verfassers „Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre“ [1]), niedergelegt wurde; diese Schrift, auf welche die im folgenden gegebene philosophische Deutung der Raum-Zeit-Lehre aufbaut, muß deshalb für eine strenge Begründung vieler Stellen des vorliegenden Buches herangezogen werden. Aber die gelegentliche Verwendung der mathematischen Formel, die auch hier noch stattfindet, wird den erkenntnistheoretischen Grundgedanken nur um so heller hervortreten lassen.

Der Weg des vorliegenden philosophischen Werkes ging deshalb durch die Naturwissenschaft hindurch, und die Fülle des mathematisch-physikalischen Materials ist ihm nicht als Hindernis erschienen, sondern allein als niemals auszuschöpfende Quelle neuer und weiterer philosophischer Erkenntnisse. Es hofft gerade dadurch ein Beispiel zu geben, wie sehr eine philosophische Methode überlegen ist, die sich an Resultate der positiven Wissenschaft anschließen kann; alles, was in detaillierter mathematischer Arbeit von klugen Gehirnen geschaffen wurde, steht ihr zur Verfügung und schließt sich vor dem überschauenden Blick zu großen Gedankenzügen zusammen. Formulierungen, deren Allgemeinheit nichts besagen würde, wenn sie allein ständen, erlangen eine überragende Bedeutung, wenn sie auf ein ausgeführtes Einzelmaterial gestützt sind und dessen weite Zusammenfassung bedeuten; und so darf sich die heutige exakte Erkenntnistheorie Entdeckungen von einer Tragweite erlauben, die in früheren Zeiten die Verflüchtigung in leere Spekulation, in Phantasien ohne begriffliches Gerippe bedeutet hätten. Das ist der Sinn der immer bewußter hervortretenden exakten Richtung in der Philosophie, daß sie Weite des Problems mit ausgeführtem Detail verbindet; und wer ihr Kleinlichkeit oder Problemarmut vorwirft, beweist damit nur, daß er Strenge des Schrittes mit Enge des Zieles verwechselt.

In solchem Wissen um das Recht zu Resultaten ist dieses Buch geschrieben worden. Es will zugleich den Schatz an philosophischen Ergebnissen, der sich als Gemeingut der exakt-philosophischen Richtung herausgebildet hat und bereits so etwas wie eine gemeinsame Tradition bildet, zusammenfassend darstellen und doch auch darüber hinaus neue Wege gehen, zu denen eine unablässige Analyse der mathematischen Naturerkenntnis den Verfasser geführt hat. Wenn deshalb bei diesem

---

1) Braunschweig 1924, Verlag Friedr. Vieweg u. Sohn A.-G. (im folgenden zitiert als A.).

zusammenfassenden Charakter der Darstellung auf strenge Trennung der Gedanken nach ihren Urhebern verzichtet wurde, so wird das derjenige am besten entschuldigen können, der selbst innerhalb dieser Schicht mitarbeitet und weiß, wie sehr heute schon Gedanken von einem zum andern gehen und ihre endgültige Form erst als Produkt gemeinsamer Arbeit erhalten. Die Bildung eines gemeinsamen Wissensstoffes, welche sich darin ausdrückt, ist ja gerade das charakteristische Kennzeichen der neuen Arbeitsrichtung, die durch ihre Entstehung aus der positiven Wissenschaft auch methodologisch in Gegensatz zu den isolierten Systembildungen der spekulativen Philosophen tritt; und sie ist sich bewußt, daß aus dieser Quelle gerade ihre Überlegenheit fließt. Die Philosophie der Naturerkenntnis will keines von den Systemen sein, die aus dem Kopf eines einsamen Denkers entspringen und wie steinerne Monumente vor dem betrachtenden Blick der Generationen stehen — sondern sie will Wissenschaft sein wie die andern Wissenschaften auch, ein Schatz von gemeinsam erarbeiteten Sätzen, deren Anerkennung unabhängig vom Rahmen eines Systems von jedem verlangt werden kann, der überhaupt in diesen Dingen mitdenken will. Gewiß kann die Bedeutung von Begriffen je nach dem Zusammenhang, in dem sie gebraucht werden, verschieden sein; aber diese Art von Unbestimmtheit ist durch Sauberkeit der Sprache vermeidbar und braucht nicht zu dem Verzicht auf objektive philosophische Erkenntnis überhaupt zu führen. Wenn man es als eine Auswirkung der Systemphilosophie bezeichnen darf, daß der Begriff der philosophischen Wahrheit seinen Sinn verloren hat und ersetzt wurde durch den Begriff einer Angepaßtheit an das System, dann darf man es als vornehmstes Ziel der exakten Naturphilosophie bezeichnen, daß sie den Wahrheitsbegriff in seiner echten und ursprünglichen Bedeutung zum obersten Richter aller philosophischen Erkenntnis machen will. Um wahre Erkenntnis in diesem Sinne ist es dem vorliegenden Werk allein zu tun.

Erster Abschnitt.

Raum.

§ 1. Das Parallelenaxiom und die nichteuklidische Geometrie. Schon im Altertum hatte Euklid der Geometrie eine gewisse abgeschlossene Form gegeben; er hatte ihr Grundsätze vorausgesetzt, Axiome[1]), und aus ihnen das System aller Lehrsätze abgeleitet. Die große praktische Bedeutung dieser Leistung bestand darin, daß sie der Geometrie eine Sicherheit verlieh, wie sie zuvor keine andere Wissenschaft erreicht hatte. Die wenigen Sätze, die axiomatisch vorangestellt wurden, waren so unmittelbar einleuchtenden Charakters, daß ihre Geltung außer Zweifel stehen durfte. Allein durch geschickte logische Kombination der Axiome, ohne Hinzutreten weiterer Annahmen, entstand das ganze Gebäude der Geometrie; die Sicherheit der in den Beweisen benutzten logischen Schlüsse war dabei so groß, daß man die abgeleiteten und z. T. sehr undurchsichtigen Sätze als in gleichem Grade gesichert ansehen konnte wie die Voraussetzungen. Die Geometrie wurde durch diesen Aufbau das Musterbeispiel einer beweisbaren Wissenschaft, an ihr erfuhr man zuerst die Möglichkeit einer wissenschaftlichen Strenge, die seitdem als Ideal aller Wissenschaft überhaupt dargestellt wurde — more geometrico zu beweisen, hat besonders den Philosophen aller Zeiten als höchstes Ziel gegolten.

Aber noch nach einer ganz anderen Richtung hin wirkte sich die euklidische Axiomatik aus. War die Frage der Beweisbarkeit einer Wissenschaft dahin gelöst, daß man sie auf ein System von Axiomen logisch zurückführte, so entstand nun die erkenntnistheoretische Frage, woher denn die Geltung dieser ersten Sätze selbst zu rechtfertigen sei; hatte sich durch das System der logischen Verkettung die Sicherheit der Axiome auf die abgeleiteten Lehrsätze übertragen, so übertrug sich umgekehrt auch die Problematik in der Geltung dieses verwickelten Satzgefüges rückwärts auf die Axiome, in deren Geltungsbehauptung

---

1) Euklid unterschied Axiome, Postulate und Erklärungen. Wir dürfen sie für den vorliegenden Zusammenhang einheitlich als Axiome bezeichnen.

man gerade wegen der Unantastbarkeit des Zusammenhangs von Axiomen und Lehrsätzen die ganze Problematik der wissenschaftlichen Erkenntnis wiederfinden mußte. Mit einem Wort: es wurde der rein *implikative* Charakter der mathematischen Beweisbarkeit erkannt, die nicht aus der Welt zu schaffende Tatsache, daß nur das „wenn a gilt, dann gilt b" der mathematisch logischen Strenge zugänglich ist; das Problem der vom wenn befreiten Assertion „a gilt", „b gilt", trat damit um so schärfer hervor. In der Geltung der Axiome verbarg sich deshalb das Problem aller Wissenschaft überhaupt, und so hat die axiomatische Methode keineswegs die absolute Sicherheit der Erkenntnis begründen können, sondern nur die Fragestellung auf eine scharf umrissene These reduzieren und damit der philosophischen Diskussion zugänglich machen können.

Aber gerade diese Auswirkung der Axiomatik ist erst in einer historisch viel reiferen Zeit eingetreten als ihre Begründung durch Euklid. Die präzise erkenntnistheoretische Formulierung entsprach nicht der Naivität einer Epoche, deren Philosophie durchweg noch nicht auf ausgebildete Einzelwissenschaften gestützt werden konnte, und die ihre Fragen gröberen Dingen zuwenden mußte, als der Geltung so simpler und klarer Sätze wie der geometrischen Axiome. Wer nicht gerade Skeptiker war, begnügte sich mit der Tatsache, daß gewisse Voraussetzungen axiomatisch geglaubt werden müssen; die positiv gerichtete Philosophie hat erst im Kritizismus Kants gelernt, diese sonst nur für die Negation aller Erkenntnis ausgedeuteten Probleme als Probleme zu sehen und in ihrer Aufklärung die Kernfrage der Erkenntnistheorie zu begreifen. Darum hat sich die Kritik der geometrischen Axiomatik zwei Jahrtausende lang allein im Rahmen mathematischer Fragestellungen vollzogen, deren Verfolg jedoch zu so eigenartigen Entdeckungen führte, daß sie schließlich wieder in die philosophische Fragestellung einmündeten.

Diese mathematische Fragestellung galt der Reduktionsfähigkeit des Axiomensystems, d. h. der Untersuchung, ob in den Axiomen Euklids wirklich letzte Sätze vorlagen, oder ob sie auf noch einfachere und einleuchtendere Sätze zurückgeführt werden konnten. Da die einzelnen Axiome in der Unmittelbarkeit ihres Aussagegehalts von recht verschiedenem Charakter waren, so mußte dies auf die Fragestellung führen, ob vielleicht einzelne der komplizierteren Axiome als Folge der einfacheren dargestellt, also unter die beweisbaren Sätze eingereiht werden konnten. Besonders war es das Parallelenaxiom, dessen Beweisbarkeit man untersuchte. Dieses Axiom besagt, daß es durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen geraden Linie (die ihn nicht trifft) *eine und nur eine* Parallele gibt, d. h. eine gerade Linie, die mit der ersten in einer Ebene liegt und sie nicht schneidet. Stellt man sich diesen Satz anschaulich vor, so erscheint er außerordentlich zwingend. Dennoch enthält er etwas Unbefriedigendes, weil er eine Aussage über das Unendliche macht; denn daß die beiden Linien sich in keiner endlichen Entfernung schneiden, ist eine Behauptung, welche alle mögliche Erfahrung überschreitet. Hier lag deshalb ein Satz vor, dessen Beweisbarkeit die Sicherheit der Geometrie erheblich erhöht hätte, und die Geschichte der Mathematik lehrt, daß von Proklus bis Gauß hervorragende Mathematiker an diese Frage fruchtlose Bemühungen wandten.

Da erfuhr das Problem eine eigenartige Wendung durch die Entdeckung, daß es möglich ist, die Behauptung des Parallelenaxioms überhaupt fallen zu lassen. Anstatt seine Richtigkeit zu beweisen, tat man das Gegenteil: man bewies seine Entbehrlichkeit. So sehr es der Anschauung zu widersprechen scheint, wenn man die Existenz *mehrerer* Parallelen durch einen Punkt zuläßt — man konnte diese Annahme als Axiom einführen und aus ihr im Verein mit den übrigen Axiomen Euklids eine in sich geschlossene Geometrie entwickeln. Diese Entdeckung wurde in den zwanziger Jahren des vorigen Jahrhunderts fast gleichzeitig von dem Ungarn Bolyai und dem Russen Lobatschefsky gemacht; Gauß soll sie schon etwas früher gekannt haben, ohne sie jedoch zu publizieren.

Aber wie sollen wir uns eine Geometrie mit gegenteiligem Parallelenaxiom vorstellen? Wir müssen, um die Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie zu begreifen, an die Leistung des axiomatischen Aufbaus denken, der den Beweis eines Satzes allein durch logische Schlußfolgerung aus den Axiomen ermöglicht. Die gezeichnete Figur ist nur eine Veranschaulichung, sie wird niemals selbst als Beweiskraft benutzt; man denke etwa daran, daß ein Beweis auch mit „schlecht gezeichneten“ Figuren möglich ist, in denen kongruente Dreiecke offensichtlich verschieden lange Seiten haben — nicht das unmittelbare Bild der Figur, sondern die Kette der logischen Bedingungen ist es, die uns zur Anerkennung des Beweises zwingt. Aber dies ist gerade auch für die nichteuklidische Geometrie möglich; mag auch die Zeichnung stets wie eine „schlecht gezeichnete“ Figur aussehen — ob die einzelnen logischen Schritte erfüllt sind, können wir an ihr genau so erkennen wie an einer Figur der euklidischen Geometrie. Darum ist die nichteuklidische Geometrie von vornherein in axiomatischem Aufbau entwickelt worden; man hat nicht, wie in der euklidischen Geometrie, zuerst ihre Lehrsätze gekannt und und ihnen später eine axiomatische Begründung vorangeschickt, sondern diese axiomatische Entwicklung war zugleich der Weg zu ihrer Entdeckung.

Wir berühren mit dieser Darstellung, die die Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie einstweilen nur plausibel machen soll, das Problem der *Veranschaulichung* der Geometrie. Wir werden später noch ausführlich darauf eingehen, und darum möge unsere Bemerkung über die „schlecht gezeichneten“ Figuren nicht als endgültig angesehen werden. Sie soll nur erläutern, daß das Wesen des geometrischen Beweises in der Logik der Schlußfolgerung liegt, nicht in den Proportionen der Figur. Die nichteuklidische Geometrie ist auf jeden Fall ein logisch konstruierbares System — dies war die erste und wichtigste Behauptung, die ihre Erfinder aufstellten.

Freilich stand hierfür einstweilen noch der strenge Beweis aus. Man war zwar bisher nicht auf Widersprüche gestoßen — konnte aber deshalb mit Sicherheit behauptet werden, daß dies bei der weiteren Entwicklung niemals eintreten würde? Hier liegt ja das eigentliche Problem eines axiomatisch begründeten logischen Systems. Daß die nichteuklidischen Sätze denen der euklidischen Geometrie direkt widersprachen, war selbstverständlich, und man durfte sich deshalb nicht wundern, wenn z. B. die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte gefunden wurde; dieser Widerspruch war mit der Verkehrung des Parallelenaxioms in sein Gegenteil von vornherein hineingelegt. Was aber gefordert werden mußte, war, daß das neue geometrische System *in sich* widerspruchslos war. Es wäre zunächst mit der Möglichkeit zu rechnen, daß ein Satz a, den man aus dem nichteuklidischen Axiomensystem beweist, bei weiterer Entwicklung wieder umgestoßen wird, d. h. daß sowohl der Satz a als auch der Satz non-a aus dem Axiomensystem beweisbar ist; es entstand also die Aufgabe, nachzuweisen, daß dies niemals eintreten kann.

Dieser Beweis wurde in einem gewissen Sinne erbracht durch das Kleinsche[1]) euklidische Modell der nichteuklidischen

1) Eine ausführliche Darstellung siehe in § 11.

Geometrie. Es gelang Klein, eine Zuordnung herzustellen zwischen den Begriffen der euklidischen Geometrie, ihren Punkten, Geraden und Ebenen, ihrem Kongruenzbegriff usw., und den entsprechenden Begriffen der nichteuklidischen Geometrie, so daß damit auch jedem *Satz* der einen Geometrie ein *Satz* der anderen zugeordnet wurde. Würde nun in der nichteuklidischen Geometrie ein Satz a und zugleich ein Satz non-a beweisbar sein, so müßte dasselbe auch für die zugeordneten Sätze a' und non-a' der euklidischen Geometrie gelten; ein Widerspruch in der nichteuklidischen Geometrie würde also einen korrespondierenden Widerspruch in der euklidischen zur Folge haben. Damit wurde, übrigens zum erstenmal in der Geschichte der Mathematik, ein Beweis für Widerspruchslosigkeit erbracht: er besteht in der Zurückführung eines neuen Satzsystems auf ein altes, an dessen Widerspruchslosigkeit man mit hinreichender Sicherheit glauben kann[1]).

Nach diesen Untersuchungen Kleins stand die mathematische Bedeutung der nichteuklidischen Geometrie fest[2]). Neben der natürlichen Geometrie Euklids stand die zwar fremdartig anmutende, aber in sich einwandsfreie Geometrie Bolyais und Lobatschefskys; ihre mathematische Gleichberechtigung war unbestreitbar. Es stellte sich späterhin heraus, daß auch noch eine andere Art von nichteuklidischer Geometrie möglich war. Das Parallelenaxiom behauptet, daß es zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt *eine* Parallele gibt; hatten Bolyai und Lobatschefsky dieses Axiom dadurch negiert, daß sie die Existenz *mehrerer* Parallelen annahmen, so bestand auch

1) Von Hilbert ist später die Widerspruchslosigkeit der euklidischen Geometrie durch Reduktion auf die Arithmetik bewiesen worden. Die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik, die nun nicht mehr durch Reduktion bewiesen werden kann, bedarf dann eines selbständigen Beweises; dieses außerordentlich tiefe Problem ist neuerdings von Hilbert weitgehend gelöst worden.

2) Klein hat seine Untersuchungen übrigens nicht in der ausgesprochenen Absicht auf einen Beweis der Widerspruchslosigkeit angestellt; dieser entstand sozusagen als Nebenerfolg bei der aus rein mathematischem Interesse durchgeführten Konstruktion des Modells. Daß der Weg zur Einsicht in die Bedeutung der nichteuklidischen Geometrie von den Mathematikern erst in jahrzehntelangen Bemühungen erkämpft werden mußte, hat neuerdings L. Bieberbach gezeigt. Berl. Akademieber. 1925, phys.-math. Klasse, S. 381. Für die ältere Geschichte des Parallelenaxioms vgl. Bonola-Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1921, und die Urkundensammlung von Engel-Stäckel, Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauß, Leipzig 1895.

noch die dritte Möglichkeit, die Existenz *keiner* Parallelen zu fordern. Diese Annahme erforderte allerdings, um widerspruchsfrei durchführbar zu sein, eine gewisse Änderung bereits an einigen anderen Axiomen Euklids, die die Unendlichkeit der Geraden besagen [1]). Aber mit diesen Änderungen gelang auch die Durchführung der nichteuklidischen Geometrie dieses anderen Typus. Es gab von da ab nicht mehr eine Geometrie, sondern eine Vielheit von Geometrien.

Mit dieser Entdeckung der Mathematiker erhielt das erkenntniskritische Problem der Axiome eine ganz neue Antwort. Wenn die Mathematik nicht an die Wahl bestimmter Axiomensysteme gebunden ist, sondern sowohl den Satz a wie den Satz non-a verwenden kann, dann gehört die Assertion „a ist" überhaupt nicht in die Mathematik, dann ist die Mathematik nichts als die Wissenschaft der rein *implikativen* Behauptungen, der Verknüpfungen des „wenn . . . dann", und es gibt deshalb für die Geometrie als mathematische Wissenschaft gar kein Geltungsproblem der Axiome. Dieses unlösbar scheinende Problem enthüllt sich als ein Scheinproblem — die Axiome sind nicht wahr oder falsch, sondern willkürliche Setzungen. In der Tat muß die Lösung des mathematischen Problems der Geometrie in dieser Auffassung gesehen werden, besonders, nachdem man gelernt hat, auch andere Axiome ähnlich wie das Parallelenaxiom zu behandeln und „nicht-archimedische", „nicht-pascalsche" usw. Geometrien zu konstruieren; eine tiefere Begründung werden wir freilich in § 14 noch nachholen müssen.

Aber wohin gehört dann die Assertion „a ist"? Man kann doch nicht bestreiten, daß wir diese Aussage als sinnvoll aussprechen; besonders der naive Verstand ist überzeugt, daß der wirkliche Raum, der Raum in dem wir leben und uns bewegen, den Axiomen Euklids entspricht, und daß in bezug auf ihn nur ein einziges „a ist" gilt, während „non-a ist" nicht gilt. Versuchen wir, der Bedeutung dieser Aussage nachzugehen, so bemerken wir, daß sie aus dem Rahmen der Mathematik herausführt; sie ist als Frage nach einer Eigenschaft der wirklichen Welt eine *physikalische* Frage, nicht mehr eine *mathematische*. Diese

---

1) Das Parallelenaxiom ist von den übrigen Axiomen Euklids nur insofern unabhängig, als es die Existenz von *nur* einer Parallelen behauptet; daß es *mindestens* eine Parallele geben muß, läßt sich aus den anderen Axiomen beweisen. Vgl. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1913, S. 20. Durch Änderungen in den Axiomen des „zwischen" ist diese Abhängigkeit aber leicht zu beseitigen.

Erkenntnis, die sich aus der Konstruktion der nichteuklidischen Geometrien entwickelt hat, ist von grundlegender Bedeutung: mit ihr ist das Raumproblem in zwei Teile aufgespalten, neben dem mathematischen ist ein besonderes physikalisches Raumproblem erkannt.

Es ist leicht zu verstehen, daß diese philosophische Erkenntnis erst möglich wurde, nachdem die Mathematik über Euklid hinaus zu den nichteuklidischen Geometrien vorgeschritten war. Bis dahin hatte die Physik die Grundsätze der Geometrie als selbstverständlich für die Naturbeschreibung vorausgesetzt. Aber wenn mehrere Arten von Geometrien als mathematisch gleichberechtigt nebeneinander gestellt werden konnten, so ergab sich die Frage, welche von diesen Geometrien die Physik zu wählen hatte; es ist dann nicht selbstverständlich, daß dies gerade die euklidische sein muß. Es ist ja die Eigentümlichkeit der Mathematik, daß sie der Physik *mögliche* Formen von Beziehungen zeigt, unter welchen die Physik die *eine wirkliche* durch Beobachtung und Experiment heraussucht. So lehrt die Mathematik, wie sich die Planeten bewegen würden, wenn die Anziehungskraft der Sonne mit der zweiten *oder* dritten *oder* n-ten Potenz der Entfernung abnimmt; die Physik aber entscheidet, daß in der Wirklichkeit nur die zweite Potenz vorliegt. Mit der Geometrie war es bisher anders gewesen; es hatte nur eine Art von Geometrie gegeben, und darum hatte für die Physik noch gar nicht das Problem einer *Auswahl* unter Geometrien bestanden. Erst mit der Entdeckung nichteuklidischer Geometrien entsteht deshalb der Gegensatz zwischen *wirklichem* und *möglichem Raum*. Die Mathematik lehrt nur die möglichen Räume kennen, die Physik entscheidet, welcher unter diesen dem wirklichen Raum entspricht. Im Gegensatz zu allen früheren Auffassungen, und besonders zur Philosophie Kants, entsteht deshalb der Physik die Aufgabe, die Geometrie des wirklichen Raumes aus der Erfahrung zu bestimmen, genau so wie sie die räumliche Gestalt der Erde oder die Bewegung der Planeten durch die Beobachtung bestimmt.

Aber mit welchen Methoden soll die Physik an diese Entscheidung herangehen? Die Untersuchung dieser Frage wird uns zugleich Aufklärung darüber bringen, mit welchem Recht von einem bestimmten wirklichen Raum gesprochen werden kann. Ehe wir jedoch näher darauf eingehen, müssen wir noch eine zweite mathematische Entwicklungslinie des Geometrieproblems, die analytische, darstellen, die im weiteren Verfolg für die Physik noch fruchtbarer wurde als die axiomatische.

§ 2. Riemannsche Geometrie. Die Riemannsche Erweiterung des Raumbegriffs ging nicht vom Parallelenaxiom aus, sondern stellte den Begriff der Metrik in den Mittelpunkt.

Riemann knüpfte an die Entdeckung von Gauß an, wonach sich die Form einer gekrümmten Fläche durch die Geometrie innerhalb der Fläche charakterisieren läßt. Wir können uns den Gaußschen Gedanken folgendermaßen veranschaulichen. Die Krümmung einer Kugelfläche charakterisieren wir gewöhnlich durch ihre Abweichung von der Ebene; legen wir eine Ebene berührend an die Kugel heran, so berührt sie nur in einem Punkt, und an den anderen Punkten werden die Abstände zwischen Ebene und Kugel immer größer. Diese Auffassung charakterisiert die Krümmung der Kugelfläche „von außen“; die Abstände zwischen Ebene und Kugelfläche liegen außerhalb der Fläche, und der Entscheid über die Krümmung bedarf der dritten Dimension, welche erst den Unterschied von krumm und gerade hervortreten läßt. Ist es aber möglich, die Krümmung der Kugelfläche festzustellen, wenn man gar keine Messung außerhalb hinzunimmt? Hat es also einen Sinn, schon in zweidimensionaler Betrachtung die krumme Fläche von der Ebene zu unterscheiden? Gauß zeigte, daß dies in der Tat möglich ist. Würde man auf der Kugel „praktische Geometrie“ treiben, würde man etwa mit kleinen Maßstäben auf ihr „Feldmessung“ beginnen, so würde man sehr bald erkennen, daß man sich auf einer krummen Fläche befindet. So würde man für das Verhältnis von Umfang u und Durchmesser d eines Kreises, wie durch Fig. 1 deutlich wird, eine kleinere Zahl als $\pi = 3{,}14\ldots$ erhalten. Denn man würde, da man sich ständig auf der Fläche befindet, nicht den „wahren Durchmesser“ messen, der das Kugelinnere schräg durchbohrt, sondern den im Bogen verlaufenden Durchmesser über die Kugelkappe benutzen müssen, der zu groß ausfällt und darum, in den Umfang dividiert, eine zu kleine Zahl ergibt. Trotzdem hat es einen Sinn, den Punkt M „Mittelpunkt des Kreises auf der Kugelfläche“ zu nennen, denn er ist von jedem Punkt des Kreises gleich weit entfernt; daß wir uns aber dabei auf einer Kugel befinden, merken wir an der Abweichung von π. Auf diese Weise erhält man eine *Geometrie der Kugelfläche*, die

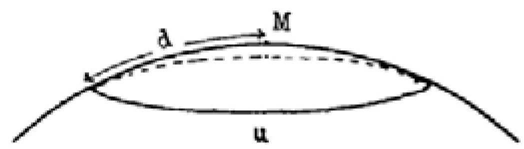

Fig. 1. Umfang und Durchmesser eines Kreises auf der Kugeloberfläche.

sich von der gewöhnlichen Geometrie dadurch unterscheidet, daß in ihr andere Maßbeziehungen gelten; neben der Änderung im Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises ist vor allem auch die Änderung für die Winkelsumme im Dreieck charakteristisch, denn die Winkel eines sphärischen Dreiecks überschreiten in ihrer Summe 180°.

Es ist nun von größter Merkwürdigkeit, daß die damit charakterisierte Verallgemeinerung der Ebenengeometrie zur Flächengeometrie identisch ist mit derjenigen Verallgemeinerung der Geometrie, die aus der Kritik des Parallelenaxioms entsprang. Das eigentümliche Übergewicht, welches dem Parallelenaxiom in der Entwicklungsgeschichte der geometrischen Axiomatik zugefallen ist, läßt sich ja vom rein axiomatischen Standpunkt kaum rechtfertigen; man hätte ebenso gut die Konstruktion nichteuklidischer Geometrien an die Ausschaltung anderer Axiome anknüpfen können. Es muß so etwas wie ein historischer Instinkt für logische Fruchtbarkeit gewesen sein, daß sich der kritische Zweifel von jeher gerade an dieses Axiom heftete; denn man schuf dadurch die axiomatische Basis für diejenige Erweiterung der Geometrie, in der die Metrik als variables Element abgespalten wird[1]). Hat man vom Standpunkt der Gaußschen Flächentheorie die Bedeutung der Metrik als des für die Flächengestalt charakteristischen Elements einmal erkannt, so ist umgekehrt der Zusammenhang mit dem Parallelenaxiom leicht zu zeigen. Die Eigenschaft der geraden Linie, kürzeste Verbindung ihrer Punkte zu sein, läßt sich auf krumme Flächen übertragen und führt dort zum Begriff der *geradesten Linie*; so spielen auf der Kugelfläche die Großkreise die Rolle der kürzesten Verbindungslinie und besitzen deshalb für diese Fläche eine analoge Bedeutung wie die geraden Linien für die Ebene. Aber während die Großkreise als „gerade Linien" ihre wichtigste Eigenschaft mit denen der Ebene teilen, unterscheiden sie sich von letzteren gerade in bezug auf das Parallelenaxiom: alle Großkreise der Kugel schneiden sich, und es gibt deshalb keine Parallelen unter diesen „geraden Linien". Hier liegt also die zweite mögliche Negierung (vgl. § 1) des Parallelenaxioms vor, die die Existenz von Parallelen ausschließt. Führt man diesen Gedanken durch und formuliert alle Axiome, indem man unter „geraden Linien" stets die Großkreise der Kugel und unter

1) Über den Zusammenhang des Parallelenaxioms mit der Metrik vgl. auch S. 107—108.

„Ebene“ stets die Kugelfläche versteht, so zeigt sich, daß dieses System von Elementen innerhalb des Zweidimensionalen ein Axiomensystem erfüllt, welches in nahezu allen Behauptungen mit dem Axiomensystem der euklidischen Geometrie identisch ist, *ausgenommen in der Behauptung des Parallelenaxioms*[1]). Die Geometrie der Kugelfläche kann also angesehen werden als die Realisierung einer zweidimensionalen nichteuklidischen Geometrie: *mit der Negierung des Parallelenaxioms ist gerade diejenige Verallgemeinerung der Geometrie getroffen, die in dem Übergang von der Ebene zur krummen Fläche vorliegt.*

Ist dies für zweidimensionale Gebilde einmal erkannt, so ergibt sich durch Zusammenfassung der beiden ganz verschiedenen Ausgangslinien eine neuartige Einsicht in das entsprechende Problem für mehrere Dimensionen. Denn die axiomatische Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie war bereits für dreidimensionale Gebilde geleistet worden; sie mußte deshalb eine Erweiterung des dreidimensionalen Raumes bedeuten, die dem Verhältnis der Ebene zur krummen Fläche analog war. Obgleich der euklidische Raum krumme Flächen in sich eingebettet tragen kann, besitzt er nicht denjenigen Grad logischer Allgemeinheit, den die Flächen erreichen; er vermag nur das euklidische Parallelenaxiom zu realisieren, nicht aber die widersprechenden Parallelenaxiome. Es liegt deshalb nahe, einen Raumbegriff zu konstruieren, der den „ebenen“ oder euklidischen Raum als Spezialfall in sich enthält, im übrigen aber die nichteuklidischen Räume mit umfaßt; erst ein solcher Raumbegriff besagt für drei Dimensionen dasselbe, was der Begriff „Fläche“ für zwei Dimensionen besagt, er verhält sich zum euklidischen Raum wie die Fläche zur Ebene.

Diesen Gedanken folgend, konnte Riemann den Raumbegriff so allgemein definieren, daß er nicht nur den euklidischen Raum, sondern auch den Lobatschefskyschen Raum als Spezialfälle mit umfaßt, so daß damit wiederum die axiomatische Entwicklungslinie überholt wird. Nach Riemann ist der Raum zunächst nur eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit; welche Axiomensysteme in ihr gelten, ist dabei noch offen gelassen. Riemann zeigte nun, daß man, um die einzelnen Raumtypen zu finden, nicht notwendig axiomatisch vorgehen muß; man benutzt dabei bequemer ein analytisches Verfahren, welches dem von Gauß für die Flächentheorie entwickelten Verfahren analog ist. Dabei wird die Geometrie des Raumes mit Hilfe von sechs Funktionen,

1) Vgl. hierzu Anm. S. 13.

den *metrischen Koeffizienten des Linienelements*, beherrscht, die als Funktion der Koordinaten vorgegeben zu denken sind[1]); an Stelle geometrischer Überlegungen tritt dann das Rechnen mit diesen Funktionen, und man kann alle Eigenschaften der Geometrie analytisch ausdrücken. Es ist ähnlich, wie wenn in der elementaren analytischen Geometrie eine Gleichung mit zwei oder drei Unbekannten einer Kurve oder Fläche äquivalent gesetzt wird; die Anschauung erhält damit eine begriffliche Stütze, die zu Einsichten von ganz neuer Tragweite empor hebt. Entsprechend dem Hilfsbegriff der Krümmung der Fläche, die durch das reziproke Produkt der Hauptkrümmungsradien gemessen wird, führte Riemann den Hilfsbegriff einer *Krümmung des Raumes* ein, die mathematisch allerdings viel komplizierter zu charakterisieren ist; der euklidische Raum ist dann dadurch ausgezeichnet, daß sein Krümmungsmaß gleich Null ist, ähnlich wie die Ebene eine Fläche von der Krümmung Null ist. Dabei liegt der euklidische Raum in der Mitte zwischen den Räumen positiver und negativer Krümmung: und man kann zeigen, daß diese Einteilung gerade den möglichen Formen des Parallelenaxioms entspricht. In Räumen positiver Krümmung gibt es keine Parallele zu einer gegebenen Geraden, im Raum der Krümmung Null gibt es eine Parallele, im Raum negativer Krümmung gibt es mehr als eine Parallele. Die Krümmung kann im allgemeinen von Punkt zu Punkt *variabel* sein, wie auch bei den Flächen; eine besondere Auszeichnung besitzen aber die Räume von *konstanter Krümmung*. Der Raum von konstanter negativer Krümmung ist der Bolyai-Lobatschefskys, der Raum der konstanten Krümmung Null ist wieder der euklidische, der Raum konstanter positiver Krümmung heißt sphärisch, denn er ist das dreidimensionale Analogon zur Kugelfläche. Die analytische Methode Riemanns hat also sehr viel mehr Raumtypen aufgezeigt als das synthetische Verfahren Bolyais und Lobatschefskys, das nur zu gewissen Räumen konstanter Krümmung geführt hat. Alle diese Raumtypen stellt die Mathematik heute als gleichberechtigt nebeneinander, und sie beherrscht ihre Gesetze so gut wie die der euklidischen Geometrie.

§ 3. Das Problem der physikalischen Geometrie. Jetzt erst können wir auf die Frage zurückkommen, die wir am Schlusse des § 1 stellten. Wir hatten die Geometrie des wirklichen Raumes

1) Vgl. die ausführliche Darstellung in § 39.

als eine erkennbare Naturtatsache ansehen müssen; die Physik hat die Aufgabe, unter den *möglichen* Raumtypen der Mathematik einen auszuzeichnen als den *wirklichen* Raum, den Raum der Physik. Sie kann diesen Entscheid sicherlich nur mit empirischen Methoden treffen; aber wie soll sie dabei vorgehen?

Der Weg für diese Untersuchung ist durch Riemanns mathematische Grundlegung vorgezeichnet: die Entscheidung darüber muß sich durch *praktische Messungen im Raum* fällen lassen. Ähnlich wie die Bewohner einer Kugelfläche deren Kugelcharakter durch Ausmessen erkennen können, ja, wie wir Menschen selbst die Kugelgestalt unserer Erde gefunden haben, die wir doch auch nicht verlassen und von außen betrachten können, so muß sich auch durch Messungen erkennen lassen, von welcher

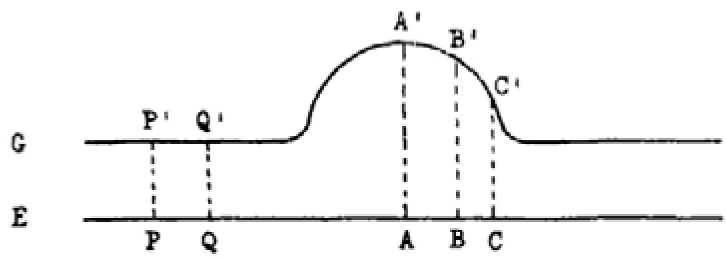

Fig. 2. Projektion einer nichteuklidischen Geometrie auf eine Ebene.

Art der Raum ist, in dem wir leben. *Es gibt eine geodätische Vermessung des Raumes, genau so wie es eine Vermessung der Erdoberfläche gibt.*

Dennoch wäre es vorschnell, diese Behauptung ohne jede weitere Einschränkung auszusprechen. Wir müssen, um hier noch tiefer zu sehen, noch einmal auf das Beispiel der Fläche zurückgreifen.

Wir denken uns (Fig. 2) eine große Halbkugel aus Glas, die am Rande stetig ohne Knick in eine riesige Glasplatte ausläuft; das Ganze bildet also eine Fläche G, die aus einer Ebene mit einer Beule darin besteht. Auf dieser Fläche klettern Menschenwesen umher; sie würden die Form ihrer Fläche durch geometrische Messungen ermitteln können. So würden sie bald wissen, daß ihre Fläche in äußeren Gebieten eben ist, aber in der Mitte eine halbkugelförmige Erhebung aufweist; an den Abweichungen der Geometrie von den euklidischen Verhältnissen des Zweidimensionalen würden sie das erkennen.

Unterhalb der Fläche G liegt, parallel zu ihrem ebenen Teil, eine Ebene E. Von oben fallen Sonnenstrahlen parallel darauf.

welche von allen Gegenständen der Glasfläche ein Schattenbild auf die Ebene werfen. Jeder Maßstab, den die G-Menschen anlegen, wirft ein Schattenbild auf die Ebene, das dort, wie wir sagen würden, in den mittleren Gebieten Verzerrungen erleidet. So würden die G-Menschen die Strecken A'B' und B'C' als gleich groß messen; die zugehörigen Schattenstrecken AB und BC würden wir aber ungleich nennen.

Wir wollen nun annehmen, daß die Ebene E ebenfalls von Menschenwesen bevölkert sei, und wir wollen noch eine sehr merkwürdige Annahme hinzunehmen. Es möge nämlich auf der Ebene eine geheimnisvolle Kraft wirken, welche alle dort transportierten Maßstäbe gerade so dehnt, daß sie immer so groß sind wie die entsprechenden Schattenbilder, die von der Fläche G projiziert werden. Und nicht nur die Maßstäbe, alle Dinge, auch die übrigen Meßinstrumente und die Menschenkörper selbst, mögen in derselben Weise gedehnt werden, so daß diese Menschen direkt gar nichts von der Dehnung bemerken würden. Was würden die E-Menschen nun für Meßresultate erhalten? In den äußeren Gebieten der Ebene würde nichts geändert werden, denn die Strecke P'Q' wird in gleicher Größe auf PQ projiziert. Wohl aber würde das Innengebiet, das sich gerade unter der gläsernen Halbkugel befindet, nicht mehr die gewöhnlichen Meßresultate ergeben. Offenbar würde man hier genau dieselben Resultate erhalten, wie sie die G-Menschen im Mittelgebiet vorfinden. Nehmen wir an: beide Menschenwelten wissen nichts voneinander, niemand kann von außen her auf die Fläche E heraufsehen — was würden die E-Menschen über die Form ihrer Fläche behaupten?

Sicherlich würden sie dasselbe sagen wie die G-Menschen, nämlich, daß sie auf einer Ebene leben, die in der Mitte eine halbkugelförmige Erhebung aufweist. Denn sie würden ja die Verzerrung ihrer Maßstäbe gar nicht bemerken. Aber warum würden sie sie eigentlich nicht bemerken?

Wir können uns diese Verzerrung leicht physikalisch veranschaulichen. Es sei etwa unter der Ebene E eine starke Wärmequelle vorhanden, welche in dem mittleren Gebiet wirksam ist. Sie dehnt die Maßstäbe aus, so daß sie zu groß werden, wenn sie in die Nähe von A kommen. Dann ergeben sich ähnliche geometritrische Verhältnisse, wie wir sie angenommen haben; die Strecken CB und BA werden von demselben Maßstab überdeckt, und die Wärme ist die geheimnisvolle Kraft, die wir annahmen.

Könnten denn die E-Menschen diese Kraft nicht bemerken? Ehe wir diese Frage beantworten, müssen wir sie noch präzisieren. Wenn die E-Menschen wüßten, daß ihre Fläche eigentlich eine Ebene ist, könnten sie die Kraft natürlich bemerken; eben in der Abweichung der entstehenden Geometrie von der euklidischen Geometrie der Ebene hätten sie das Kennzeichen für das Auftreten der Kraft. Die Frage muß also so lauten: woran läßt sich das Wirken der Kraft bemerken, wenn nicht bekannt ist, welche Geometrie entstehen muß? Oder noch besser: woran läßt sich die Kraft bemerken, wenn die Art der entstehenden Geometrie nicht als Kennzeichen benutzt werden darf?

Für die Wärme als wirkende Kraft lassen sich nun in der Tat *direkte* Kennzeichen angeben, welche den *indirekten* Weg über die Geometrie nicht benutzen. Zunächst würden die E-Menschen die Wärme schon mit ihrem Temperatursinn erkennen. Aber auch ohne diesen hätten sie Mittel, die Wärme nachzuweisen. Dies rührt daher, daß die Wärme verschieden auf die einzelnen Materialien einwirkt. So würden die E-Menschen eine andere Geometrie erhalten, je nachdem sie mit kupfernen oder mit hölzernen Maßstäben mäßen, und eben daran würden sie das Vorhandensein einer *Kraft* erkennen. In der Tat: aller direkter Nachweis der Wärme beruht darauf, daß sie *unterschiedlich* wirkt. Daß der Temperaturunterschied der Punkte A und C mit dem Thermometer nachweisbar wäre, beruht auch darauf; denn würde sich das Quecksilber nicht stärker ausdehnen als das Glasrohr und die Skala des Thermometers, so würde das Instrument überall dieselbe Zahl zeigen. Und auch die physiologische Wirkung der Wärme auf den menschlichen Körper beruht darauf, daß gewisse Nervenenden von ihr anders erregt werden als der übrige Körper.

Die *Wärme* läßt sich also als Kraft direkt nachweisen. Solche Kräfte aber, wie wir sie in unserm Beispiel anführten, lassen sich nicht direkt nachweisen. Sie haben zwei Eigenschaften:

a) sie wirken auf alle Materialien gleich,
b) es gibt keine isolierenden Wände gegen sie.

Über die erste Eigenschaft haben wir schon gesprochen, aber auch die zweite ist notwendig, wenn die Deformation als eine rein metrische angesprochen werden soll; wir werden darauf weiter unten (§ 5) zu sprechen kommen. Hier sei nur bereits, der Vollständigkeit halber, noch die Definition der isolierenden Wand hinzugefügt: sie ist eine Hülle aus beliebigem Material, von der jedoch keine Kräfte nach Eigenschaft a auf die eingeschlossenen

Körper ausgeübt werden dürfen. Wir wollen Kräfte, welche die Eigenschaften a und b haben, *universelle Kräfte* nennen; alle anderen Kräfte mögen *differentielle Kräfte* heißen. Wir dürfen dann sagen, daß nur differentielle Kräfte, nicht aber universelle Kräfte direkt nachweisbar sind.

Wie steht es dann aber mit der Gestalt der Flächen E und G? Wir sagten, G sei eine Fläche mit Ausbeulung, E sei eine Ebene, auf der eine Ausbeulung vorgetäuscht wird. Woher haben wir eigentlich das Recht zu dieser Behauptung? Die Meßresultate sind auf beiden Flächen gleich. Soweit wir uns also auf diese Resultate allein stützen, könnten wir ebensogut sagen, G sei die Fläche mit der „scheinbaren" Ausbeulung, E die mit der „wirklichen". Oder vielleicht sind überhaupt beide Flächen ausgebeult? Wir haben das Beispiel von vornherein so eingeführt, daß wir E als Ebene, G als ausgebeulte Fläche annahmen. Woher haben wir eigentlich das Recht, hier überhaupt von einem *Unterschied* zu sprechen? Was ist denn überhaupt *anders* bei E als bei G?

Das Problem mündet hier in eine seltsame Fragestellung. Wir fragten nach der wirklich geltenden Geometrie einer wirklichen Fläche; wir enden bei der Frage: Hat es überhaupt einen Sinn, inbezug auf wirkliche Flächen geometrische Unterschiede zu behaupten? Diese eigentümliche Unbestimmtheit in dem Problem der Wirklichkeitsgeometrie deutet darauf hin, daß in der ganzen Problemstellung etwas vergessen worden ist. Und in der Tat, wir haben etwas vergessen: Wir haben vergessen, daß eine Antwort erst eindeutig sein kann, wenn die Frage erschöpfend gestellt ist. Es fehlt hier offenbar eine Voraussetzung. Da es für die Ermittelung der Geometrie schließlich darauf ankommt, ob zwei Strecken wirklich gleich sind oder nicht (die Strecken AB und BC der Fig. 2), so müssen wir zuvor wissen, was es eigentlich heißen soll, daß zwei Strecken „wirklich gleich" sind. Aber hat diese Begriffsbildung überhaupt einen Sinn? Wir fanden, daß die Frage grundsätzlich unentscheidbar ist, sowie universelle Kräfte im Spiel sind — dürfen wir sie dann überhaupt stellen?

Wir müssen deshalb die erkenntnistheoretischen Voraussetzungen des Messens untersuchen. Wir werden dabei einen Begriff in den Vordergrund stellen, dessen Notwendigkeit in der Philosophie bisher übersehen wurde und der doch erst die Lösung dieser Probleme bringt: den Begriff der *Zuordnungsdefinition*.

§ 4. Die Zuordnungsdefinition. Definieren heißt im allgemeinen, einen Begriff auf andere Begriffe zurückführen. Aber wenn auch die Physik, wie jedes Denken überhaupt, von dieser Art des Definierens weitgehend Gebrauch macht, so tritt doch in ihr noch eine zweite Art von Definition auf, welche daher rührt, daß die Physik, im Gegensatz etwa zur Mathematik, es mit Dingen der *Wirklichkeit* zu tun hat. Die eigentliche physikalische Erkenntnis besteht gerade darin, daß Begriffe nicht immer nur auf Begriffe zurückgeführt, d. h. inhaltlich bestimmt werden, sondern daß *Begriffe wirklichen Dingen zugeordnet werden*; dieses Zuordnungsverhältnis läßt sich nicht irgendwie durch eine Inhaltsbestimmung ersetzen, sondern besagt weiter nichts als: „diesem Ding da ist dieser Begriff zugeordnet". Nun ist diese Zuordnung im allgemeinen nicht willkürlich, sondern da die Begriffe untereinander inhaltlich verflochten sind, kann diese Zuordnung richtig oder falsch werden, sowie man die Forderung der Eindeutigkeit hinzutreten läßt; derselbe Begriff soll stets dasselbe Ding bezeichnen. In der Herstellung der Eindeutigkeit dieser Zuordnung besteht, wie wohl am schärfsten Schlick[1]) nachgewiesen hat, gerade der physikalische Erkenntnisprozeß. Aber gewisse einzelne Zuordnungen müssen erst einmal festgelegt sein, ehe das Zuordnungsverfahren weiter durchgeführt werden kann; und diese ersten Zuordnungen sind deshalb Definitionen, die man zweckmäßig als *Zuordnungsdefinitionen* bezeichnet. Sie sind, wie alle Definitionen, *willkürlich*; von ihrer Wahl hängt erst das Begriffssystem ab, welches man mit der fortschreitenden Erkenntnis erhält.

Zunächst ist das Auftreten von Zuordnungsdefinitionen an den Stellen deutlich, wo es sich um die Durchführung *metrischer* Beziehungen handelt. Soll etwa eine Länge gemessen werden, so muß die Einheitslänge vorher durch Definition festgesetzt werden. Dies ist eine Zuordnungsdefinition. Gerade hier ist die Doppelheit von Begriffsdefinition und Zuordnungsdefinition deutlich zu erkennen. Was eine Einheit ist, läßt sich nur begrifflich definieren; etwa: „eine Einheit ist eine Länge, durch deren Abtragen auf einer anderen Länge die Maßzahl dieser Länge erhalten wird". Aber damit ist noch nicht gesagt, wie groß diese Einheit sein soll. Diese Festsetzung gelingt letzten Endes nur durch Hinweis auf eine natürlich gegebene Länge,

---

1) M. Schlick, Allgemeine Erkenntnislehre, Verlag Springer, Berlin 1918, Ziff. 10.

etwa das Urmeter in Paris. Auch wenn man andere Festsetzungen der Längeneinheit betrachtet, wird dadurch nichts anders. Sagt man etwa: „ein Meter ist der vierzigmillionste Teil des Erdumfanges“, so ist eben der Erdumfang die natürliche Länge, auf die man sich hier nur durch Zwischenschaltung einiger weiterer Begriffe bezieht. Und wählt man etwa die Wellenlänge des Kadmiumlichtes als Einheit, so ist das letzten Endes nur durch Hinweis aufzuzeigende wirkliche Ding „Kadmiumlicht“ dasjenige Stück Wirklichkeit, an welches man die Definition anschließt. Man bemerkt an diesem Beispiel, daß das Anschlußverfahren sehr kompliziert sein kann; eine Lichtwellenlänge hat noch niemand gesehen, sondern nur gewisse Erscheinungen, die mit ihr in einem konstruierten Zusammenhang stehen, z. B. helle und dunkle Streifen, die von Interferenzen herrühren. Grundsätzlich könnte eine Längeneinheit auch definiert werden mit Hilfe einer Wahrnehmung, in der selbst gar nichts Metrisches enthalten ist, z. B. „diejenige Wellenlänge, die vorliegt, wenn Licht eine gewisse rote Farbe hat“, wo dann etwa ein Musterbild dieser roten Farbe in Paris an Stelle des Urmeters aufzuheben wäre. Immer aber bleibt das Charakteristische, daß der Anschluß an etwas Wirkliches notwendig ist, also eine Zuordnung von Begriffen zur Realität, und zugleich, daß dieser Anschluß willkürlich ist, also die Eigenschaft einer Definition hat. Darum sprechen wir von *Zuordnungsdefinition.* Und wenn es sich speziell, wie in dem Falle der Längeneinheit, um eine für *Messungen* notwendige Zuordnungsdefinition handelt, sprechen wir von *metrischer* Zuordnungsdefinition.

Man kann die philosophische Leistung der Relativitätstheorie dahin charakterisieren, daß sie die Notwendigkeit metrischer *Zuordnungsdefinitionen* an mehreren Stellen nachgewiesen hat, an denen man vorher *Erkenntnisse* gesucht hatte. Es ist nicht immer so offensichtlich, wie im Falle der Längeneinheit, daß eine Zuordnungsdefinition erforderlich ist, ehe überhaupt gemessen werden kann; und so entstehen Scheinprobleme, indem man Erkenntnisse sucht, wo Definitionen hingehören. Der Name Relativität soll zum Ausdruck bringen, daß die Messungen verschieden werden, je nachdem die Zuordnungsdefinitionen gewählt werden. Wir wollen zunächst zeigen, welche Lösung dieser Gedanke für das Problem der Geometrie bringt, von dem wir ausgegangen waren.

Wir kommen von unserem Beispiel der Einheitslänge sofort eine Stufe weiter, wenn wir den Vergleich zweier Längen an verschiedenen Orten betrachten. Durch Anlegen eines Maßstabs vergleichen wir seine Länge nur mit demjenigen Stück eines Körpers, einer Wand etwa, das er gerade bedeckt. Vergleichen wir zwei entfernte Teile der Wand, indem wir auf beiden ein Meter durch Striche abtragen, so muß dazu der Maßstab *transportiert* werden. Damit wird vorausgesetzt, daß der Maßstab sich beim Transport nicht ändert. Aber eine solche Änderung durch universelle Kräfte läßt sich grundsätzlich gar nicht erkennen. Denken wir uns zwei Maßstäbe, die gleich lang sind. Sie werden auf verschiedenen Wegen an einen entfernten Ort gebracht, dort werden sie wieder aneinandergelegt und wieder als gleich lang befunden. Haben sie sich nun unterwegs nicht geändert? Das wäre zuviel behauptet. Als beobachtbare Tatsache kann man nur behaupten, daß die beiden Maßstäbe überall gleich lang sind, wo man sie miteinander vergleicht. Aber ob sie sich unterwegs nicht beide ständig dehnen oder zusammenziehen, kann man nicht wissen. Eine Dehnung, die alle Körper gleichmäßig betrifft, ist nicht erkennbar, weil es einen direkten Vergleich von einander entfernter Maßstäbe nicht gibt.

Auch ein optischer Vergleich, etwa Anvisieren beider Maßstäbe mit dem Theodolithen, kann nichts helfen. Dabei geht das Licht als übertragende Wirkung ein, und der Längenvergleich hängt davon ab, welche Annahmen man über die Lichtfortpflanzung macht.

Es handelt sich hier eben nicht um eine Frage der *Erkenntnis*, sondern der *Definition*. Ob ein Maßstab noch ebenso groß ist, wenn man ihn an einen anderen Ort transportiert, ist nicht erkennbar, sondern nur durch Definition festzulegen. Und dabei handelt es sich um eine Zuordnungsdefinition, denn zwei räumlich getrennte wirkliche Dinge werden als gleich groß definiert. Nicht der *Begriff* „gleich groß" wird definiert, sondern das ihm entsprechende *Reale* wird aufgezeigt; dem Begriff „gleich groß" wird ein reales Gefüge zugeordnet, so wie dem Begriff „Einheit" der Urmeter zugeordnet ist.

Man erkennt hier deutlich, wie Definition und Erfahrungssatz ineinander arbeiten. Wir nannten es eine beobachtbare Tatsache, also einen Erfahrungssatz, daß zwei Maßstäbe, die an einer Raumstelle benachbart verglichen gleich groß sind, auch an jeder anderen Raumstelle im Nachbarvergleich gleich groß befunden werden, wenn sie einzeln auf verschiedenen Wegen dorthin transportiert werden. Wenn wir diesem Tatbestand jetzt die Definition hinzufügen, daß die Maßstäbe auch dann gleich groß heißen sollen, wenn sie sich an *verschiedenen* Orten befinden, so ist dies nicht etwa eine *notwendige Folgerung* aus dem genannten Tatbestand, sondern eine unabhängig hinzutretende, willkürliche Festsetzung; dennoch besteht ein gewisser Zusammenhang zwischen beiden. Der genannte Tatbestand bewirkt nämlich, daß die hinzukommende Festsetzung *eindeutig* wird, d. h. unabhängig vom Transportweg; die Eindeutigkeit der Festsetzung ist also wieder eine Aussage von Erkenntniswert und unserer Willkür entzogen. Man kann sagen, daß die Tatbestandsaussage über den Nachbarvergleich von Stäben die Kongruenzdefinition durch entfernte Stäbe zwar nicht *vorschreibt,* aber doch *erlaubt;* denn nicht-eindeutige Definitonen wird man wohl als verboten bezeichnen dürfen.

Dennoch kann dies nur heißen, daß die Tatbestandsaussage eben die einfache Definition der Kongruenz erlaubt, in der *jeder beliebige* starre Stab die Kongruenz festlegt. Würde der genannte Tatbestand nicht statthaben, so hätte man für jede Raumstelle eine besondere Einheitsdefinition zu leisten; nicht nur in Paris, sondern an jedem Ort wäre ein „Meterstab" aufzustellen, und alle diese willkürlich gewählten Stäbe würden definitorisch gleich groß genannt werden. Dabei ist nur eine Stetigkeitsforderung zu beachten, die man etwa erfüllen kann, indem man einen beliebig herausgegriffenen Maßstab einmal herumträgt und an jedem Ort eine dort hergestellte Kopie des Stabes als Einheit aufstellt. Bringt man zwei solche Kopien durch Transport in Nachbarlage, so erweisen sie sich als verschieden groß; aber das macht die Definition nicht „falsch". In einer solchen Welt würde der definitorische Charakter der Kongruenz erst deutlich hervortreten; aber auch in unserer einfacheren Welt *dürfen* wir eine Kongruenzdefinition wählen, die mit dem Verhalten starrer Stäbe nicht übereinstimmt. So können wir etwa Stäbe, die im üblichen Sinne gleich sind, zu einem Linienzug aneinanderlegen und, von einem willkürlichen Anfangspunkt zählend, den zweiten Stab halb so groß, den dritten ein Drittel so groß usw. nennen. Eine solche Definition würde zwar alle Maßangaben komplizieren, aber sie ist der üblichen Definition, welche die Stäbe gleich groß nennt, erkenntnistheoretisch gleichwertig. In dieser Behauptung machen wir lediglich von der Tatsache Gebrauch, daß eine Einheitsdefinition an nur *einem* Ort ein allgemeines Messen noch nicht ermöglicht; die Einheitsdefinition muß im allgemeinen Falle als Funktion des Ortes (und auch der Zeit) vorgegeben werden[1]). *Daß unsere Welt wegen des genannten Tatbestands im Verhalten starrer Stäbe eine einfachere Kongruenzdefinition erlaubt, ist selbst eine Tatsache; aber diese Tatsache nimmt der einfacheren Definition nicht ihren definitorischen Charakter.*

Die große Bedeutung unserer Erkenntnis von dem definitorischen Charakter der Kongruenz besteht nun darin, daß mit ihr das erkenntnistheoretische Problem der Geometrie gelöst wird. Wir sahen ja, daß es bei der Ermittlung der Geometrie eines Gebildes darauf ankommt, welche Strecken man als *gleich groß* zu bezeichnen hat. In unserem Beispiel der Fläche E handelt es sich um die Frage, ob die Strecken AB und BC gleich groß sind oder nicht; in ersterem Falle erhält die Fläche dieselbe geometrische Form wie die Fläche G, in letzterem wird sie zur Ebene. Wir sind nun in der Lage, die Antwort zu geben: es ist überhaupt keine Frage der *Erkenntnis*, ob $AB = BC$ ist, sondern dies ist eine Frage der *Definition*. Definiert man in E die Kongruenz entfernter Strecken so, daß $AB = BC$ wird, so wird E eine Fläche mit aufgesetzter Halbkugel; definiert man anders, so wird E eine Ebene. *Die geometrische Form eines Körpers ist kein absolutes Datum der Erfahrung, sondern hängt von einer vorausgehenden Zuordnungsdefinition ab*; je nachdem wie diese getroffen ist, kann dasselbe Gebilde eine Ebene oder eine Kugel oder eine irgendwie gekrümmte Fläche sein. Gerade so wie die Maßzahl der Höhe eines Turmes keine absolute Zahl ist, sondern abhängt von der Wahl der Längeneinheit, wie die Höhe eines Berges erst definiert ist, wenn das Nullniveau angegeben ist, über dem gemessen werden soll, so ist auch die geometrische Form erst nach einer vorausgehenden Festsetzung bestimmt. Und das gilt im Dreidimensionalen ebenso wie im Zweidimensionalen. Während wir aber im zweidimensionalen Fall immer noch die Möglichkeit haben, die entstehende nichteuklidische Geometrie zu deuten als Geometrie einer krummen Fläche im euklidischen dreidimensionalen Raum, kommen wir bei Ausmessung eines dreidimensionalen Gebildes zu einer dreidimensional-nichteuklidischen Geometrie. Eine einfache Überlegung möge dies verdeutlichen. Wählen wir als Zuordnungsdefinition einmal die der praktischen Feldmessung, d. h. setzen wir starre Meterstäbe als unverändert transportabel, als kongruent fest. Wenn wir jetzt einen großen Kreis auf der Erd-

1) Vgl. hierzu § 39 und § 46.

oberfläche messen, sagen wir von 100 Meter Radius, so ergibt sich bei sehr genauer Messung für das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eine kleinere Zahl als $\pi = 3{,}14\ldots$; man erklärt dies durch die Wölbung der Erdoberfläche, welche uns hindert, den wahren Durchmesser zu messen, der sich unterhalb der gewölbten Kappe durch die Erde hindurchzieht. Hier steht also der Ausweg in die dritte Dimension offen. Anders aber liegt es, wenn wir die Dimensionszahl um eins erhöhen. Es sei etwa eine große Kugel aus Blech aufgebaut, die im Innern von starren eisernen Trägern getragen wird; auf dieser Kugel und im Innern des Traggerüstes klettern Männer umher, welche mit ebensolchen Meterstäben wie vorher im zweidimensionalen Fall Umfang und Durchmesser an verschiedenen Stellen messen. Wenn sich jetzt wieder eine Abweichung von π ergibt, so liegt eine dreidimensionale nichteuklidische Geometrie vor, und wir können sie nicht mehr als Flächenkrümmung im dreidimensionalen euklidischen Raum deuten. Dieses Resultat erhalten wir, weil wir die Zuordnungsdefinition der Kongruenz in der genannten Weise gewählt haben; hätten wir sie anders gewählt, etwa im Sinne des obigen Beispiels jeden Maßstab nach zweimaligem Hinlegen $\frac{1}{2}$ so groß, nach dreimaligem Hinlegen $\frac{1}{3}$ so groß genannt, so hätten wir hier auch eine andere Geometrie des Raumes erhalten. Die Frage nach der Geometrie des wirklichen Raumes kann deshalb nicht beantwortet werden, bis die Zuordnungsdefinition angegeben ist, die für diesen Raum die Kongruenz festsetzt.

Aber welche Zuordnungsdefinition sollen wir für den Raum wählen? Da wir doch schließlich eine Geometrie brauchen, so müssen wir uns für eine Definition der Kongruenz entscheiden. In der Tat müssen wir dies — nur dürfen wir dabei nie vergessen, daß es sich um einen willkürlichen Entscheid handelt, daß es hier also kein Wahr oder Falsch gibt, und daß deshalb auch die Geometrie des Raumes nicht ein unmittelbares Datum für die Erfahrung ist, sondern wieder von dieser Wahl abhängt.

Man wird dabei nach einer möglichst natürlichen Definition suchen, d. h. einer solchen, welche den Vorzug logischer Einfachheit besitzt und zugleich die bisherigen Resultate der Wissenschaft möglichst wenig ändert. Denn die Wissenschaft hat schon immer mit einer solchen Zuordnungsdefinition implizit gearbeitet, auch wo sie sich dessen gar nicht bewußt war; einerseits sollen die darauf beruhenden Resultate möglichst fortgeführt werden, andererseits darf man annehmen, daß die bisherige

Definition gewisse praktische Vorzüge besitzt, die sie für den Gebrauch gerechtfertigt haben. Wir haben diese Definition schon genannt, indem wir von der Definition der Kongruenz durch starre Stäbe sprachen. Aber unsere Überlegungen bedürfen noch einer Vertiefung, denn noch fehlt uns die genaue Begriffsbestimmung des *starren Körpers.*

§ 5. **Der starre Körper.** Es ist eine sehr alte Erfahrung, daß es verschiedene Aggregatzustände gibt; und schon lange hat man den Vorzug der festen Körper vor den flüssigen darin gesehen, daß sie ihre Form und Größe nur wenig ändern, wenn sie äußeren Kräften unterliegen. Sie erscheinen deshalb für die Definition der Kongruenz besonders geeignet — aber gerade nach den Resultaten unserer bisherigen Überlegungen dürfen wir die Sonderstellung der festen Körper nicht auf diese Weise begründen. Denn wir sahen ja, daß die Form und Größe eines Gebildes erst von der Zuordnungsdefinition der Kongruenz abhängt; wenn wir jetzt den festen Körper für die Zuordnungsdefinition verwenden wollen, so dürfen wir es nicht als eine *Aussage* über ihn, als eine *Erkenntnis* bezeichnen, daß er seine Form nicht ändert. Das kann nur eine definitorische Behauptung sein, wir können nur sagen: wir *definieren* die Form des festen Körpers als unveränderlich — aber wie können wir dann überhaupt noch die festen Körper definieren? Oder genauer: wenn wir auch den Aggregatzustand *fest* anderweitig definieren können, unter welchen Bedingungen heißt der feste Körper *starr*? Wenn die Bewahrung der Form kein Kennzeichen sein darf, was für Kennzeichen gibt es dann?

Das Problem kompliziert sich noch, weil man es nicht etwa durch Aufzeigen gewisser Körper, durch einen bloßen Hinweis auf etwas Reales lösen kann. Wenn wir oben den Urmeter in Paris als Prototyp einer solchen Definition durch Hinweis betrachteten, so war das doch eine etwas schematische Abstraktion. Tatsächlich ist kein Körper, den wir sehen, unmittelbar die Realisierung des starren Körpers der Physik, sondern wir müssen berücksichtigen, daß er zahlreichen physikalischen Kräften unterworfen ist; erst die nach Abzug mehrerer „Korrektionen“, wie Temperatureinfluß, elastische Durchbiegung, berechnete Länge sehen wir als Maßzahl, d. h. als maßgebend für die Zuordnungsdefinition des Längenvergleichs an. Auch den Pariser Urmeter würde man nicht als Definition der Längeneinheit ansehen, wenn er nicht durch seine Aufbewahrung und

Lagerung allen Einflüssen der Temperatur usw. entzogen wäre; und wenn einmal ein Erdbeben ihn aus seiner Kammer herauswerfen und seinen Querschnitt verbiegen würde, würde sicherlich niemand ihn als Meterprototyp beibehalten wollen, sondern alle wären sich einig darüber, daß der Urmeter jetzt kein Meter mehr wäre. Aber ist denn das überhaupt noch ein Definieren, wenn die Definition eines Tages als falsch bezeichnet werden kann? Verliert hier der Begriff der Zuordnungsdefinition nicht seinen Sinn?

Nein, er verliert seinen Sinn nicht, aber seine Anwendung ist eine logisch viel kompliziertere Operation, als es nach den bisherigen Darstellungen schien. Die Grenzen, die hier für die Willkür der Zuordnungsdefinition auftreten, haben zwei Quellen. Erstens tritt eine Einschränkung deshalb auf, weil wir von der gewonnenen Metrik die Aufrechterhaltung gewisser älterer physikalischer Resultate, vor allem der „Physik des täglichen Lebens", verlangen. Niemand kann uns aus logischen Gründen verbieten, auch den verbogenen Meterstab noch ferner als Definition der Längeneinheit zu betrachten; nur müssen wir dann die Konsequenz ziehen, daß sich unser Haus, unser Körper, ja die ganze Welt vergrößert hat. Relativ zu dieser Zuordnungsdefinition hat sie sich in der Tat vergrößert — nur entspricht eine solche Deutung nicht unseren Gewohnheiten. Wir ziehen es vor, solche Veränderungen, bei denen ein einzelnes Ding gegen die ganze Welt steht, so zu deuten, daß man die Veränderung in den kleinen Teil, die Ruhe in die große Masse der anderen Dinge abschiebt. Es ist der gleiche Gedanke wie beim Bewegungsproblem: wir nennen die Fliege, die im fahrenden Eisenbahnzug krabbelt, „bewegt gegen" den Zug, den Zug aber nennen wir wieder „bewegt gegen" die Erde. Wenn man sich darüber klar ist, daß logische Gründe eine solche Bezeichnungsweise nicht rechtfertigen können, darf man sie unbedenklich benutzen, denn bequemer für die Anschauung ist sie natürlich; aber es wird eben mit ihr gar nichts über die Dinge selbst behauptet. Man darf deshalb nicht glauben, daß eine solche Verbiegung des Urmeters durch ein Erdbeben eine Änderung im absoluten Sinne sei; tatsächlich ist nur die Änderung in der Größen*differenz* zwischen dem Meterstab und der übrigen Welt. Aber es ist natürlich unbedenklich, solche Einschränkungen für die Zuordnungsdefinition zu benutzen, weil sie weiter nichts bewirken als eine Anpassung der wissenschaftlichen Definition an die Gewohnheiten des täglichen Lebens.

Die daher rührenden Einschränkungen sind zahlreicher als man zunächst denken möchte. Unser tägliches Leben ist angefüllt von einer ganzen Reihe geometrischer Vorstellungen. Wir nennen unsere Schreibtischplatte *eben*, unsere Zimmerecken *rechtwinklig*, eine gespannte Schnur *geradlinig*. Es ist klar, daß dies nur Definitionen sein können, nicht Erkenntnisse, wie mancher zunächst glauben möchte. Aber wir sind eben mit diesen Definitionen zu einer sehr einfachen Physik des täglichen Lebens gelangt. Wollten wir etwa die gespannte Schnur als krummlinig definieren — was wir logisch dürften — so müßten wir ein sehr kompliziertes Kraftfeld einführen, welches an der Schnur quer angreift und verhindert, daß die Schnur sich trotz der elastischen Spannung auf die kürzeste Verbindung einstellt, ähnlich wie eine gespannte Kette unter dem Einfluß der Schwere durchhängt. Wir würden damit die Physik unnötig komplizieren. Aber das ist auch alles, was dagegen zu sagen ist — irgendeine *Wahrheitsaussage* ist es nicht, daß eine gespannte Schnur *gerade* ist, sondern wirklich nur eine bequemere Definition.

Andererseits bedeuten die hierher rührenden Einschränkungen keine *völlig strengen* Bestimmungen, sie schließen die Zuordnungsdefinition nur in gewisse *Grenzen* ein. Denn die direkte Beobachtung ist ungenau, und wir lassen es jederzeit als möglich zu, daß *kleine* Abweichungen von der unmittelbaren Anschauung vorkommen. Daß meine Schreibtischplatte *ein wenig* gekrümmt ist, daß eine im Zimmer gespannte Schnur *ein wenig* durchhängt, wird niemand in Abrede stellen wollen, wenn die Wissenschaft sich zu diesem Resultat genötigt sieht. Eine solche Aussage würde bedeuten, daß die Wissenschaft doch nicht den Schreibtisch und die Schnur für die Definition benutzt, sondern andere physikalische Dinge, und daß nun, verglichen mit diesen, solche kleinen Änderungen vorkommen. Die Physik des täglichen Lebens liefert also nur *Grenzen* für die Zuordnungsdefinition, sie will sie nicht in völliger Strenge festlegen.

Sie k a n n es auch nicht, und darum entsteht für die w i s s e n s c h a f t l i c h e Physik das Problem, innerhalb dieser Grenzen jetzt eine genaue Festlegung zu treffen. Eben daher rühren die Korrektionsfaktoren und Zusatzkräfte, welche bei der Längenmessung eine so große Rolle spielen. Wir müssen jetzt untersuchen, nach welchem Grundsatz dabei verfahren wird. Was ist der starre Körper der Physik? Wir müssen ihn jetzt ohne Zuhilfenahme des Begriffs der Größenänderung streng definieren.

Wir führen zu diesem Zwecke eine begriffliche Unterscheidung ein, und zwar wollen wir die Begriffe *starr* und *fest* unterscheiden. *Feste* Körper sind Körper jenes bestimmten Aggregatzustandes, den wir durch Hinweis definieren können, und der sich durch eine Reihe von Erscheinungen von dem flüssigen und dem gasförmigen Zustand unterscheidet; den festen Körper können wir definieren, ohne von dem Begriff der Formänderung Gebrauch zu machen. *Starre* Körper dagegen sind solche Körper, die als Realglied in die Zuordnungsdefinition der Kongruenz eingehen, die also ex definitione ihre Gestalt beim Transport nicht ändern. Den Begriff des *starren* Körpers wollen wir durch eine Definition festlegen, in der von Kongruenz kein Gebrauch gemacht wird; wir erreichen dies durch Benutzung des *festen* Körpers.

Wir definieren: *starre Körper sind feste Körper, wenn sie keinen differentiellen Kräften unterliegen, bzw. wenn der Einfluß differentieller Kräfte durch Korrektionsrechnung eliminiert wird; universelle Kräfte werden dabei außer acht gelassen.*

Wir wollen diese Definition im folgenden näher erläutern. Zunächst der Zusatz über die universellen Kräfte: dürfen wir diese denn einfach vernachlässigen? Aber es handelt sich hier nicht um ein *Vernachlässigen*: wir setzen die universellen Kräfte per definitionem gleich Null. Ohne eine solche Festsetzung läßt sich der starre Körper überhaupt nicht definieren; denn da es einen Differenznachweis universeller Kräfte nicht gibt, läßt sich stets d e Auffassung vertreten, daß der transportierte Meßkörper durch solche Kräfte deformiert wird. Gegen universelle Kräfte ist kein Körper starr.

Dieser Gedankengang entspricht auch dem üblichen Verfahren der Physik. Alle in der Physik vorkommenden Kräfte sind differentielle Kräfte im Sinne unserer Definition. Wir werden deshalb im folgenden häufig das Wort „physikalische Kräfte“ gleichbedeutend mit „differentielle Kräfte“ gebrauchen[1]).

Wir wenden uns jetzt zu dem ersten Teil unserer Definition des starren Körpers. Auch hier folgen wir dem Weg des Physiker. Nur vermeiden wir den Zirkel, das Fehlen äußerer Kräfte durch das Fehlen einer Formänderung zu definieren: da

1) Ich habe früher (A., S. 68) außerdem für die universellen Kräfte die Bezeichnung „metrische Kräfte“ benutzt. Dies kann jedoch zu Verwechslungen führen und soll deshalb nicht beibehalten werden.

die äußeren Kräfte nach definitorischer Ausschaltung universeller Kräfte grundsätzlich durch Differenzeffekte nachweisbar sind, definieren wir umgekehrt die formgetreue Erhaltung durch das Fehlen äußerer Kräfte.

Diese Bestimmung bedarf noch eines Zusatzes. Die Elimination der äußeren Kräfte ist, auch rechnerisch, nicht vollständig möglich; geringe Einflüsse entziehen sich dem experimentellen Nachweis, und unsere Definition trifft ein nur näherungsweise zu verwirklichendes Ideal. Wir müssen deshalb noch den *Weg* der Näherung charakterisieren. Hier kommt uns die Tatsache zu Hilfe, daß die festen Körper große innere Kräfte, Spannungen, enthalten; beruht auf dieser Tatsache ihr Widerstand gegen Formänderung nach der gewöhnlichen Begriffsbildung, so können wir umgekehrt im erkenntnistheoretischen Aufbau auf diese Tatsache die Definition für verschwindende Formänderung begründen: *die Formänderung heißt klein, wenn die äußeren Kräfte klein sind gegen die inneren Kräfte.* Je besser diese Bedingung erfüllt ist, desto besser ist der Körper starr; erst in der unerreichbaren Grenze, wo die äußeren Kräfte verschwinden gegen die inneren Kräfte, liegt der starre Körper im strengen Sinne vor.

Die Definition des starren Körpers hängt also mit der Definition des *abgeschlossenen* Systems zusammen. Hierin liegt die Schwierigkeit des Problems. Es sind zwei kritische Punkte, die wir mit unserer Definition umgangen haben. Erstens ist das abgeschlossene System niemals streng zu realisieren, und es muß deshalb ein Grenzübergang angegeben werden, der gestattet, ein System als „abgeschlossen in einem gewissen Genauigkeitsgrad“ zu bezeichnen. Diesen Grenzübergang gewinnen wir durch das Verhältnis von inneren und äußeren Kräften, welches durch technische Kunstgriffe sehr klein gemacht werden kann. Ohne die Berücksichtigung der inneren Kräfte aber wäre der Begriff „abgeschlossen“ gar nicht festzulegen, denn eine gewisse Verbindung mit der Außenwelt ist immer da, und es kommt darauf an, anzugeben, im Verhältnis zu welcher anderen Größe diese Außenkräfte klein sein sollen. Eben darum muß ein abgeschlossenes System notwendig innere Kräfte enthalten, und auch wenn man zu infinitesimalen abgeschlossenen Systemen übergeht, müssen die äußeren Kräfte von höherer Ordnung verschwinden als die inneren. Die andere Schwierigkeit für die Definition des abgeschlossenen Systems liegt in der Möglichkeit solcher Kräfte, die differentiell nicht nachweisbar sind, weil sie alle