

WILLIBALD LICHTENHELDT

KONSTRUKTIONSLEHRE DER GETRIEBE

KONSTRUKTIONSLEHRE DER GETRIEBE

von

Prof. Dr.-Ing. habil. WILLIBALD LICHTENHELDT

Mitglied der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

Mit 350 Abbildungen und Konstruktionstafeln



AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

1961

Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 8, Leipziger Straße 3—4

Lizenz-Nr. 202 · 100/521/61

Copyright 1961 by Akademie-Verlag GmbH

Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza

Bestellnummer: 5410

Printed in Germany

ES 20 H 2

Vorwort

In dem vorliegenden Buch finden meine Vorlesungen über Getriebelehre, die ich an der Technischen Hochschule Dresden halte, ihren Niederschlag. In der gleichen Weise wie diese Vorlesungen dem Studenten des Maschinen- und Gerätebaues Fähigkeiten zum Konstruieren anerkennen sollen, wird das Buch geeignet sein, dem in der Praxis tätigen Ingenieur Anregungen für seine Getriebekonstruktionen zu geben und ihm wissenschaftliche Verfahren nahezubringen. Nicht zuletzt soll dieses Buch auch beim Selbststudium Verwendung finden.

Wie die Wärmelehre, Strömungslehre, Festigkeitslehre, Werkstoffkunde u. a. ist die Getriebelehre eine Grundwissenschaft und damit ein wichtiger Baustein in der Ausbildung unserer Ingenieure auf dem Gebiet des Maschinen- und Gerätebaus. In den Lehrplänen der Technischen Hochschule Dresden nimmt sie ihrer Bedeutung zufolge einen breiten Raum ein, und die große Zahl meiner Hörer veranlaßt mich, ihnen ein Lehrbuch über das von mir vertretene Wissenschaftsgebiet nicht vorzuenthalten.

Die Getriebelehre hat sich in den letzten Jahrzehnten zu einem umfangreichen Lehrgebiet entwickelt und könnte demzufolge viele hundert Seiten eines Lehrbuches füllen. Ich habe mich auf das Wesentliche beschränkt, wie ich es auch in meinen Vorlesungen tun muß. In diesem Buche habe ich nur ebene Getriebe behandelt und auf räumliche verzichtet. Die Konstruktionslehre der räumlichen Getriebe wird erst in einigen Jahren ausgereift sein.

Die wissenschaftlichen Verfahren der Getriebelehre haben nicht wie z. B. in der Strömungslehre, Wärmelehre und Festigkeitslehre die Differentialgleichung zur Grundlage, sondern als natürliche Hilfsmittel zur Lösung getriebetechnischer Probleme werden vorwiegend die geometrischen Gesetzmäßigkeiten herangezogen. Soweit es mir tragbar erschien, habe ich mathematische Ableitungen und rechnerische Darstellungen vermieden; sie können im angegebenen Schrifttum nachgelesen werden. Für den in der Praxis tätigen Konstrukteur sind sie bei der Anwendung der behandelten Verfahren entbehrlich.

Das Schrifttumsverzeichnis erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Nur die Bücher und Abhandlungen sind genannt, die in einem unmittelbaren Zusammenhang mit dem Stoff dieses Buches stehen.

Dem Akademie-Verlag bin ich für die vorzügliche Ausstattung des Buches zu Dank verpflichtet.

Dresden, im Frühjahr 1961

W. LICHTENHELDT

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	V
1 Allgemeines	1
2 Grundlagen der Kinematik	4
2.1 Der momentane Drehpol	4
2.2 Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.	6
2.3 Die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen	16
2.4 Die Gesetze der Zahnradgetriebe	22
3 Grundlagen der Getriebelehre	32
3.1 Elementenpaare	32
3.2 Kinematische Ketten	34
3.3 Zwanglauf	36
3.4 Güte der Bewegungsübertragung	42
3.5 Viergliedrige Kurbelgetriebe	43
3.51 Gelenkviereck	43
3.52 Schubkurbelkette	45
3.53 Kreuzschleifenkette	48
3.54 Schubschleifenkette	51
4 Der Aufbau der Getriebe	51
4.1 Mehrere Lagen eines eben bewegten Getriebegliedes	51
4.11 Zwei Lagen	51
4.12 Drei Lagen und das Poldreieck	53
4.121 Schubkurbel	58
4.122 Kurbelschleife	59
4.123 Schubschleife	61
4.13 Vier Lagen und die Mittelpunktkurve	62
4.131 Die Punkte Q	64
4.132 Die Kreispunktkurve	69
4.133 Schubkurbel	71
4.134 Kurbelschleife	73
4.135 Schubschleife	75
4.14 Fünf Lagen und die BURMESTERSOHN Punkte	80
4.2 Unendlich benachbarte Lagen	81
4.3 Relativlagen	83
4.31 Relativpole bei der Kurbelschwinge	85
4.32 Relativpole beim Schubkurbelgetriebe	89

4.4	Sonderlagen	89
4.41	Totlagen	91
4.42	Lenkergeradföhrungen.	96
4.43	Kurbelrastgetriebe	108
4.431	Rastgetriebe für angenäherte Rasten	108
4.432	Rastgetriebe für Rasten von großer Güte	110
4.433	Rastgetriebe mit vorgeschriebener Rastdauer	116
4.44	Methode der Partialsynthese	121
4.45	Erfüllung von Punktlagen durch Kurbelgetriebe	129
4.46	R_m - und R_1 -Kurven	132
4.47	Satz von ROBERTS	137
4.5	Kurvengetriebe	139
4.51	Bewegungsgesetze.	139
4.511	Gerade	139
4.512	Parabel	141
4.513	Sinuslinie	142
4.514	Geneigte Sinuslinie	142
4.52	Zentrisch gerade geföhrte Rolle	143
4.53	Exentrisch gerade geföhrte Rolle	143
4.54	Rolle am Schwinghebel	148
5	Bestimmung der Kräfte in Getrieben	149
5.1	Ohne Berücksichtigung der Reibung	150
5.11	Kraftübertragung an der Kurbelschwinge	151
5.12	Kraftübertragung am sechsgliedrigen Kurbelgetriebe (Zweistandgetriebe).	151
5.2	Mit Berücksichtigung der Reibung.	153
5.21	Ermittlung der Zapfenreibung mittels der Zapfenreibungskreise	154
5.22	Kräfte und Reibungswiderstände an der Schubkurbel	156
5.3	Massenkräfte	156
5.31	Die Lage der resultierenden Massenkraft	156
5.32	Die resultierenden Massenkräfte an der Kurbelschwinge	159
6	Konstruktionstafeln	160
6.1	Konstruktion einer Kurbelschwinge, wenn die Totlagenwinkel vorgeschrieben sind	160
6.2	Totlagenkonstruktion der Schubkurbel	167
6.3	Konstruktion von Koppelrastgetrieben	171
6.4	Konstruktion von Geradföhrungen.	173
6.5	Konstruktionstafel für Dreiradgetriebe	176
	Schrifttum	182
	Sachverzeichnis	190

1 ALLGEMEINES

Zur Übertragung von Kräften und Bewegungen werden Getriebe verwendet. Zu unterscheiden sind

Räder- und Schraubgetriebe
für gleichförmige Übersetzungen und
Kurbel-, Kurven- und Schaltgetriebe
für periodische Übersetzungen.

Das Wissenschaftsgebiet der Getriebelehre enthält alles das, was zur Behandlung getriebetechnischer Probleme erforderlich ist: den Aufbau einer Systematik, die Methoden zur Untersuchung vorhandener Getriebe und die Verfahren zur Ermittlung der Abmessungen der Getriebeglieder auf Grund praktischer Forderungen. Die Getriebelehre der Gegenwart stützt sich nicht auf empirisch gefundene Regeln und Kunstgriffe, sondern es gelang, die Brücke zur begrifflichen Wissenschaft zu schlagen und allgemein brauchbare Methoden bereitzustellen, die vornehmlich auf geometrischen Grundsätzen aufbauen. Die natürlichen Hilfsmittel sind hier auf dem Gebiet der Geometrie zu suchen, im Gegensatz zur Wärmelehre, Strömungslehre, Festigkeitslehre, Schwingungslehre u. a., in denen die Differentialgleichung vorherrscht. Die zeichnerischen Verfahren, die sowohl bei der Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen als auch bei der Bestimmung des geometrischen Ortes der Gelenkpunkte und der Abmessungen der Getriebeglieder benutzt werden, sind dem Konstrukteur sehr willkommen und haben dazu beigetragen, daß in den letzten Jahren die wissenschaftlichen Methoden der Getriebelehre eine immer breitere Anwendung in der Praxis fanden.

Die immer wieder auftretende Frage, ob der durch einen Arbeitsvorgang bedingte Bewegungsverlauf zweckmäßig durch ein Kurven- oder ein Kurbelgetriebe Verwirklichung findet, wird oft zugunsten des Kurvengetriebes entschieden, obwohl in vielen Fällen das Kurbelgetriebe die günstigere und praktisch wertvollere Getriebeform darstellt. So kann bei automatischen Werkzeugmaschinen, Verarbeitungsmaschinen (Verpackmaschinen, Textilmaschinen, Fördermaschinen, Maschinen der Landwirtschaft u. v. a.), ebenso auch bei Kraftmaschinen, feinmechanischen Geräten, Büromaschinen usw. vielfach beobachtet werden, daß für die Erzeugung vorgeschriebener Bewegungen Kurvengetriebe herangezogen werden, obgleich die Überlegenheit der Kurbelgetriebe klar erkennbar ist. Die Ursache für diese Bevorzugung des Kurvengetriebes kann darin erblickt werden,

daß die Verfahren zur Ermittlung der Gliederabmessungen der Kurbelgetriebe vielen Konstrukteuren noch nicht geläufig sind. Es erscheint auf jeden Fall dem Konstrukteur einfacher und bequemer, für einen geforderten Bewegungsverlauf eines Getriebegliedes ein Kurvengetriebe zu entwerfen, als ein dafür geeignetes Kurbelgetriebe zu konstruieren.

Die Vorteile der Kurbelgetriebe gegenüber den Kurvengetrieben sind vor allem darin zu suchen, daß bei Kurbelgetrieben infolge des Auftretens nur niederer Elementenpaare die Kräfte in Flächen und bei Kurvengetrieben theoretisch in einer Linie, in der sich Kurve und Rolle berühren, übertragen werden [49, 53, 57].¹⁾ Demzufolge wird bei den Kurbelgetrieben niemals mit den hohen Flächenpressungen zu rechnen sein, die bei Kurvengetrieben auftreten und den raschen Verschleiß der Kurvenscheibe und Kurvenrolle herbeiführen.

Während der Zwanglauf beim Kurbelgetriebe durch Formschluß der Elemente in den Elementenpaaren erreicht wird, kann beim Kurvengetriebe entweder Kraftschluß oder Formschluß angewendet werden. Kraftschlüssige Kurvengetriebe verlangen aber, besonders bei raschlaufenden Maschinen, sehr große Kräfte, z. B. sehr starke Federn, die nur unter erheblichem Kraftaufwand gespannt werden können. Bei formschlüssigen Kurvengetrieben läuft die Rolle in einer Nutkurve zwischen zwei äquidistanten Kurven. Die genaue Herstellung solcher Nutkurven ist sehr teuer, und an den Stellen, an denen die Rolle einen Druckwechsel erfährt, tritt rascher Verschleiß ein, wodurch Stöße sowie unerwünschte Veränderungen der Bewegungsgesetze der angetriebenen Glieder verursacht werden [22].

Ein weiterer Vorzug der Kurbelgetriebe ist in der einfachen Möglichkeit der Verstellung (mitunter auch während des Ganges der Maschine) zu erblicken. Durch Anbringen von Schlitzten und veränderlichen Stangenlängen kann eine Verstellbarkeit des Getriebes erzielt werden, die es ermöglicht, mit dem gleichen Getriebe verschiedenartige Bewegungsvorgänge zu verwirklichen [122, 123, 126].

Um den Ablauf der Bewegung eines Getriebegliedes darzustellen, werden entsprechende Schaubilder benutzt. Gebräuchlich ist z. B. über dem Drehwinkel der Antriebskurbel, der bei der gleichförmigen Drehung der Zeit proportional ist, den zurückgelegten Weg eines Gelenkpunktes oder den Drehwinkel einer angetriebenen Schwinge aufzutragen. Der Verlauf der Kurve eines Bewegungsschaubildes kann durch die technologischen Bedingungen, unter denen sich der Arbeitsvorgang abspielt, ganz oder teilweise oder auch nur in einigen Diagrammpunkten vorgelegt werden. Der Konstrukteur muß dann imstande sein, aus den vorgeschriebenen Größen die Getriebeaufgabe in geeigneter Weise zu formulieren.

Der Durchführung einer Konstruktion voraus geht die Systematik. Sie bringt eine gewisse Ordnung in die Arbeit des Konstrukteurs, und es ist mehrfach versucht worden, eine Konstruktionslehre aufzubauen, nach deren Regeln der Konstrukteur zwangläufig zu einer Lösung gelangt. Die Systematik soll den Überblick

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumsverzeichnis am Ende des Buches.

schaffen, welche Bauformen geeignet sind, die in der Aufgabe gestellten Forderungen zu erfüllen. REULEAUX hat angegeben, jedes Getriebeglied einmal zum Gestell und einmal zum Antrieb zu machen und entwickelt daraus zahlreiche Bauformen, aus denen der Konstrukteur die am besten geeignete ermittelt [131]. Andere Umwandlungen sind hinsichtlich der Form, der Lage usw. möglich. Im Abschnitt über Kurvengetriebe wird näher darauf eingegangen.

2 GRUNDLAGEN DER KINEMATIK

2.1 Der momentane Drehpol

Bewegt sich ein Getriebeglied, dargestellt durch die Strecke AB und aufgefaßt als bewegte Ebene, derart, daß A und B auf Bahnen a bzw. b wandern, so ist in jedem Augenblick der Schnittpunkt der Bahnnormalen der Punkte A und B bestimmt. Dieser Schnittpunkt ist der momentane Pol P der Bewegung. Während eines Zeitelements kann die Bewegung des Getriebegliedes als eine unendlich kleine Drehung um den Momentanpol P aufgefaßt werden (Bild 1).

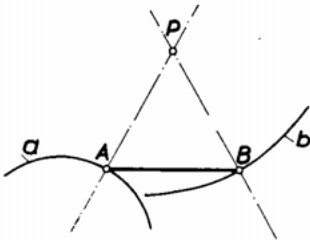


Bild 1. Bestimmung des Momentanpols P

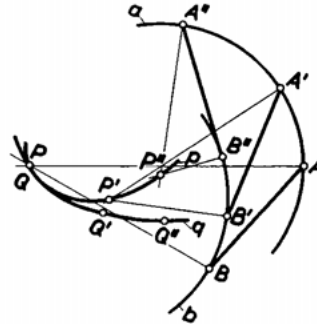


Bild 2. Polkurven p und q der durch drei Lagen bewegten Ebene AB

Bewegt sich ein Getriebeglied aus seiner Anfangslage AB in die Lagen $A'B'$, $A''B''$, ..., indem A und B auf ihren Bahnkurven a bzw. b fortschreiten, so lassen sich die Momentanpole P, P', P'', \dots als Schnittpunkte der Bahnnormalen in den Punkten A, A', A'', \dots bzw. B, B', B'', \dots finden. Die Pole P, P', P'', \dots liegen auf einer Kurve, die die ruhende Polkurve (Rastpolbahn) genannt wird und mit p bezeichnet werden soll (Bild 2). Werden die Lagen $A'B', A''B'', \dots$ samt der zugehörigen Pole P', P'', \dots in die Ausgangslage AB zurückbewegt, indem beispielsweise die Seite $A'B'$, des Dreiecks $A'B'P'$ mit AB zur Deckung gebracht wird, so gelangen P', P'', \dots in die Lagen Q', Q'', \dots , und P ist identisch mit Q .

Es ist dann

$$\begin{aligned} \triangle A'B'P' &\cong \triangle ABQ' \\ \triangle A''B''P'' &\cong \triangle ABQ'' \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Die Punkte Q, Q', Q'', \dots liegen auf einer Kurve, die die bewegte Polkurve (Gangpolbahn) genannt wird und mit q bezeichnet werden soll.

Bei der Bewegung des Getriebegliedes AB werden die Pole P, P', P'', \dots der Reihe nach zu Momentanpolen, wobei nacheinander P mit Q, P' mit Q', P'' mit Q'', \dots zur Deckung kommen. Die Bogenelemente auf den Kurven p und q müssen daher einander gleich sein, so daß bei der Bewegung die bewegte Polkurve auf der ruhenden abrollt, ohne zu gleiten. Die Polkurve q ist die einzige Kurve in der Ebene des Getriebegliedes, also die einzige Kurve des bewegten Systems, die beständig auf der Polkurve p , ihrer Hüllbahnkurve, rollt [3].

Die Polkurven der feststehenden Kreuzschleife. Die Gelenkpunkte A, B des Kreuzschiebers (Koppel k) werden auf zueinander senkrechten Geraden geführt (Bild 3). Die Normalen in A und B bilden mit den Punktbahnen stets ein Rechteck

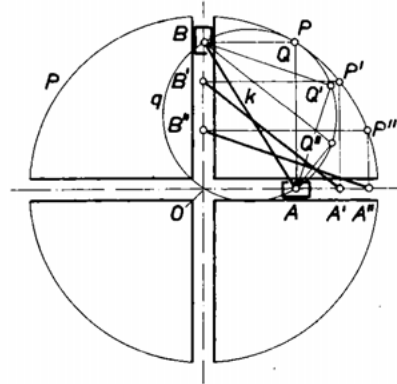


Bild 3. Polkurven der feststehenden Kreuzschleife

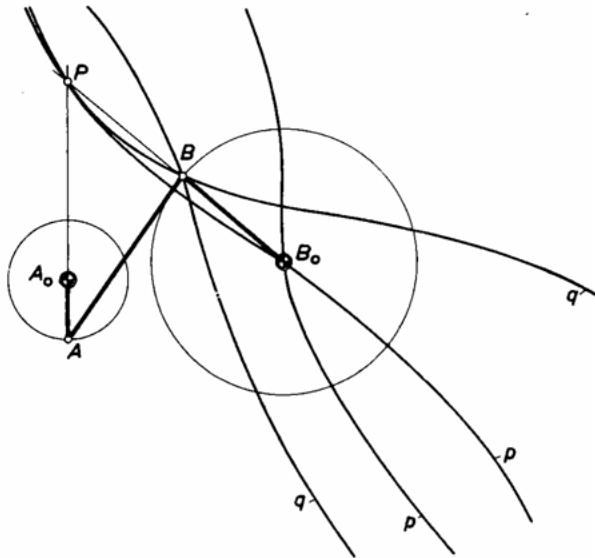


Bild 4. Polkurven der Kurbelschwinge

mit der Diagonalen k . Die Entfernung des Momentanpols vom Kreuzungspunkt O bleibt daher konstant. Der Kreis mit dem Radius k ist die ruhende Polkurve und der Momentanpol ist stets die Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks über der Basis k . Der Thaleskreis über k ist daher die Gangpolbahn. Die Bewe-

gung der Koppel k kann durch das Abrollen dieses Kreises in einem doppelt so großen (Rastpolbahn) erzeugt werden.

Die Polkurven der Kurbelschwinge. Die beiden Kurvenäste der bewegten Polkurve schneiden sich in B (Bild 4), die der ruhenden in B_0 . In zwei Stellungen des Getriebes sind Kurbel und Schwinge parallel und die Momentanpole liegen im Unendlichen. Wenn es auf die Konstruktion der bewegten Polkurve ankommt, kann die Umkehrung der Bewegung dafür herangezogen werden. Die Koppel AB wird dabei als feste Ebene betrachtet und die Punkte A_0 und B_0 beschreiben Kreise um A bzw. B . Die als beweglich geltende Strecke A_0B_0 bestimmt in ihren Stellungen die zugehörigen Pole.

Anwendung der Polkurven beim Wälzhebelgetriebe. Die Abnutzung der Wälzkurven ist gering, wenn die Kurven aufeinander abrollen ohne zu gleiten.

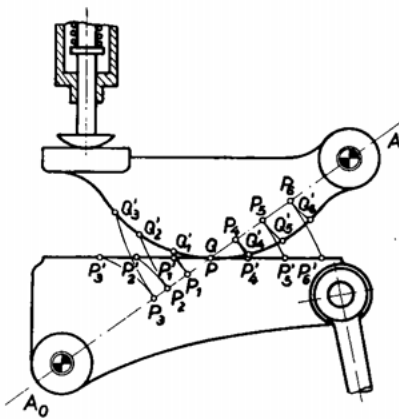


Bild 5. Konstruktion eines Wälzhebelgetriebes unter Benutzung der Polkurven

Am Beispiel einer Ventilsteuerung soll die Konstruktion der Wälzkurven veranschaulicht werden. Für den Antriebshebel wird als Wälzkurve eine Gerade vorgeschrieben. Die Gegenkurve ist zu konstruieren (Bild 5). Die Pole der relativen Bewegung müssen stets auf der Verbindungsgeraden A_0A liegen und teilen diese im augenblicklichen Übersetzungsverhältnis. Im Falle der Polkurven sind die Momentanpole die augenblicklichen Berührungspunkte. In der Darstellung ist es Pol P , der mit Q zusammenfällt. Einem Punkt P_1 der Kurve 1 entspricht im Berührungsfall mit der Kurve 2 der Pol P_1 auf A_0A (Kreis um A_0 durch P_1). Bei der Berührung der Kurven in P_1 fällt Q_1 mit P_1 zusammen. Q_1 der Kurve 2 hat von A die Entfernung AQ_1 (Kreis mit AQ_1 um A). Da beide Kurven aufeinander rollen, muß das Bogenelement PQ_1 gleich der Strecke PP_1 sein. Bei der Konstruktion werden zweckmäßigerweise gleiche Kurventeilchen von P aus auf der Antriebskurve 1 abgetragen [1].

2.2 Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

Bewegt sich der Punkt A in dem kleinen Zeitteilchen Δt entlang des kleinen Weges $AA' = \Delta s$, so ist der Quotient $\Delta s/\Delta t$ ein Maß für die mittlere Geschwindigkeit des Punktes [29]:

$$v_A = AA'/\Delta t = \Delta s/\Delta t.$$

Bei unbegrenzter Abnahme strebt dieser Quotient einem Grenzwert ds/dt zu, der die augenblickliche Geschwindigkeit des Punktes A darstellt:

$$v_A = ds/dt.$$

Wird die Beobachtung der Bewegung des Punktes A auf zwei aufeinanderfolgende Zeitteilchen ausgedehnt, dann wird A am Ende des zweiten Zeitteilchens nach A'' gelangt sein. Dabei wird sich im allgemeinen die Richtung der Bewegung und auch die Größe des zurückgelegten Weges geändert haben:

$$v'_A = A'A''/dt.$$

Die Änderung der Geschwindigkeit v'_A gegenüber v_A kennzeichnet die Beschleunigung des Punktes A . Im allgemeinen werden die Punkte A , A' , A'' nicht auf einer Geraden liegen. Sie liegen auf einem Kreis, dessen Halbmesser ρ den Krümmungsradius der Bahnkurve des Punktes A darstellt (Bild 6). Liegen die Punkte A , A' , A'' unendlich benachbart, dann schneiden sich die Bahnnormalen in A und A' im Krümmungsmittelpunkt A_0 der Bahn des Punktes A . Der Winkel $d\varphi$,

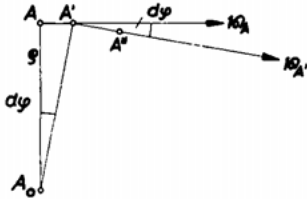


Bild 6. Geschwindigkeitsvektoren eines auf krummliniger Bahn bewegten Punktes

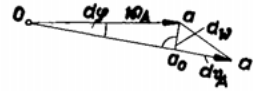


Bild 7. Geschwindigkeitsänderung

den die beiden Bahnnormalen bilden, ist der gleiche, unter dem sich die Geschwindigkeitsvektoren v_A und v'_A schneiden. Werden diese von einem Punkt O aus abgetragen (Bild 7), dann wird durch die Verbindungsgerade der Endpunkte a und a' der Vektoren die Änderung der Geschwindigkeit (Beschleunigung) dargestellt:

$$b_A = aa'/dt.$$

aa' kann derart zerlegt werden, daß v_A zunächst seine Richtung ändert, a geht über in a_0 . Hierauf ändert sich die Größe der Geschwindigkeit, a_0 geht über in a' . Die geometrische Addition $aa_0 + a_0a'$ ergibt aa' . Der Anteil aa_0 steht zur Richtung der Geschwindigkeit normal und stellt, nach der Zeit differenziert, die Normalbeschleunigung des Punktes A dar:

$$b_{An} = aa_0/dt \quad aa_0 = v_A \cdot d\varphi.$$

Für ds kann geschrieben werden $\rho \cdot d\varphi$, dann ist $v_A = \rho \cdot d\varphi/dt$. Der Quotient $d\varphi/dt$ ist die Winkelgeschwindigkeit ω des Punktes A .

$$v_A = \rho \cdot \omega.$$

Die Normalbeschleunigung läßt sich dann ausdrücken durch

$$b_{An} = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \rho \cdot \omega^2$$

oder

$$b_{An} = \frac{\rho^2 \omega^2}{\rho} = \frac{v_A^2}{\rho}.$$

Der Anteil $a_0 a'$ hat die Größe dv_A (Geschwindigkeitszuwachs) und die Richtung der Tangente an die Bahnkurve und wird, nach der Zeit differenziert, Tangentialbeschleunigung genannt:

$$b_{At} = a_0 a' / dt = dv_A / dt .$$

Es ist dann die Gesamtbeschleunigung

$$b_A = b_{An} + b_{At} = \sqrt{b_{An}^2 + b_{At}^2} .$$

Bei der zahlenmäßigen Auswertung einer zeichnerischen Darstellung der Bewegung eines Punktes ist folgendes zu beachten:

Soll der Ablauf der Bewegung in einem Bewegungsschaubild dargestellt werden, dann ist auf der x -Achse (Einheit in cm) die Zeit t (in sec), mit der Maßstabskonstanten k multipliziert, aufzutragen. Auf der y -Achse wird der zurückgelegte

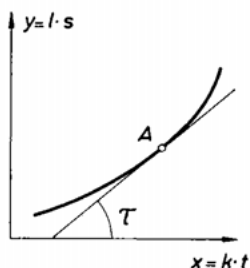


Bild 8. Weg-Zeit-Schaubild

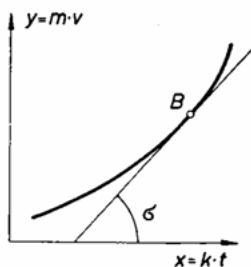


Bild 9. Geschwindigkeit-Zeit-Schaubild

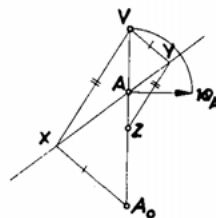


Bild 10. Ermittlung der Normalbeschleunigung

Weg s , multipliziert mit der Maßstabskonstanten l , eingezeichnet. Die Dimension von k ist cm/sec, l ist dimensionslos. Die Tangente an die Weg-Zeit-Kurve schneidet die positive Richtung der x -Achse unter dem Winkel τ (Bild 8).

Es ist

$$\operatorname{tg} \tau = dy/dx = d(l \cdot s)/d(k \cdot t) = \frac{l}{k} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{l}{k} \cdot v .$$

Daraus läßt sich die Geschwindigkeit bestimmen

$$v = \frac{k}{l} \cdot \operatorname{tg} \tau .$$

Wird auf der y -Achse die Geschwindigkeit v , multipliziert mit der Maßstabskonstanten m , aufgetragen und der Winkel, den die Tangente an die Geschwindigkeit-Zeit-Kurve mit der x -Achse bildet, mit σ bezeichnet, dann ist nach Bild 9

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{dy}{dx} = d(m \cdot v)/d(k \cdot t) = \frac{m}{k} \cdot b_t .$$

Die Tangentialbeschleunigung ist dann

$$b_t = \frac{k}{m} \cdot \operatorname{tg} \sigma ;$$

m hat die Dimension sec.

Die Größe der Normalbeschleunigung b_{An} kann zeichnerisch ermittelt werden. Es seien der Systempunkt A , der Krümmungsmittelpunkt A_0 seiner Bahn und der Vektor v_A seiner Geschwindigkeit gegeben (Bild 10). Der Vektor v_A werde um 90° gedreht und damit der Punkt V bestimmt. Durch A soll eine beliebige Gerade gezeichnet werden, die sich mit je einer Geraden durch A_0 und V in X und Y schneidet. Die Geraden durch A_0 und V können beliebige Richtung haben, müssen aber parallel sein. Die zu XV parallele Gerade durch Y schneidet AA_0 im Punkt Z . AZ ist die Normalbeschleunigung b_{An} . Ist m die Maßstabskonstante der Geschwindigkeit und l der Zeichenmaßstab, dann ist

$$b_{An} = \frac{AZ \cdot l}{m^2}.$$

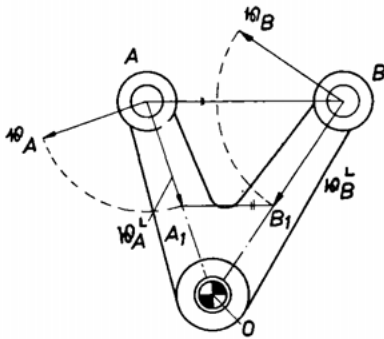


Bild 11. Geschwindigkeiten am Winkelhebel

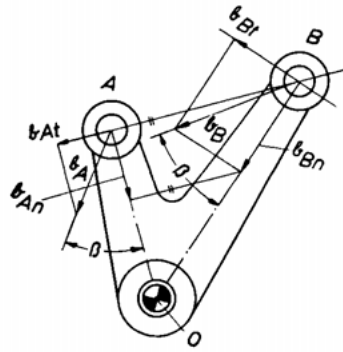


Bild 12. Beschleunigungen am Winkelhebel

Ein Maschinenteil (beispielsweise ein Winkelhebel, Bild 11) drehe sich um den festen Punkt O . Bekannt sei die Geschwindigkeit des Gelenkpunktes A , gesucht ist die Geschwindigkeit des Punktes B .

Der Vektor der Geschwindigkeit v_A des Punktes A werde um 90° gedreht, dann fällt v_A^L in die Gerade OA . Die Parallele zu AB durch den Endpunkt A_1 des gedrehten Vektors schneidet OB in B_1 , dem Endpunkt des gedrehten Vektors der Geschwindigkeit des Punktes B . Durch Zurückdrehen um 90° wird der Geschwindigkeitsvektor v_B des Punktes B erhalten.

$$\begin{aligned} v_A &= OA \cdot \omega, & v_A : v_B &= OA : OB. \\ v_B &= OB \cdot \omega, \end{aligned}$$

Ist die Beschleunigung b_A des Punktes A bekannt, dann kann die Beschleunigung des Punktes B bestimmt werden. b_A läßt sich in die Normalbeschleunigung b_{An} und die Tangentialbeschleunigung b_{At} zerlegen. Die Parallele zu AB durch den Endpunkt des Vektors b_{An} schneidet OB im Endpunkt des Beschleunigungsvektors b_{Bn} (Bild 12). Der Winkel β zwischen der Gesamtbeschleunigung und dem Normalanteil ist für alle Punkte des drehenden Systems der gleiche und bestimmt

die Richtung der Beschleunigung \mathfrak{b}_B ; das Lot auf OB im Endpunkt des Vektors \mathfrak{b}_{B_n} bestimmt die Größe des Vektors \mathfrak{b}_B . Es ist

$$\mathfrak{b}_{A_n} = \varrho_A \cdot \omega^2,$$

$$\mathfrak{b}_{B_n} = \varrho_B \cdot \omega^2; \quad \mathfrak{b}_{A_n} : \mathfrak{b}_{B_n} = \varrho_A : \varrho_B,$$

$$\mathfrak{b}_{A_t} = \frac{dv_A}{dt} = \frac{d(\varrho_A \cdot \omega)}{dt} = \frac{\varrho_A \cdot d\omega}{dt} = \varrho_A \cdot \varepsilon,$$

($\varepsilon =$ Winkelbeschleunigung)

$$\mathfrak{b}_A : \mathfrak{b}_{A_n} = \varepsilon : \omega^2 = \operatorname{tg} \beta \text{ (const für alle Punkte der Ebene),}$$

$$\mathfrak{b}_A = \sqrt{\mathfrak{b}_{A_t}^2 + \mathfrak{b}_{A_n}^2} = \varrho_A \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

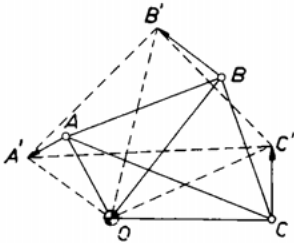


Bild 13. Die Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren bilden eine dem System ähnliche Figur

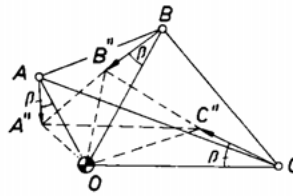


Bild 14. Die Endpunkte der Beschleunigungsvektoren bilden eine dem System ähnliche Figur

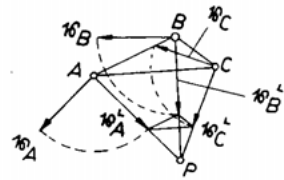


Bild 15. Die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten bilden eine dem System ähnliche und ähnlich gelegene Figur

Die Sätze von BURMESTER. Ist O der Drehpunkt eines ebenen starren Systems, dann stehen die Geschwindigkeitsvektoren der Punkte A, B, C (Bild 13) senkrecht auf den Strecken OA, OB und OC . Es ist

$$AA' : OA = BB' : OB = CC' : OC = \omega$$

$$\triangle OAA' \sim \triangle OBB' \sim \triangle OCC'$$

$$OA : OA' = OB : OB'$$

$$OA : OB = OA' : OB'$$

$$+ \triangle OA'B' \sim \triangle OAB$$

$$+ \triangle OB'C' \sim \triangle OBC$$

$$- \triangle OA'C' \sim \triangle OAC$$

$$AA'B'C' \sim \triangle ABC.$$

„Die Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren eines ebenen starren Systems bilden eine Figur, die der von den Systempunkten gebildeten ähnlich ist“ [7].

Sind AA'' , BB'' , CC'' die Beschleunigungsvektoren der Punkte eines ebenen starren Systems, das um O rotiert (Bild 14), dann ist

$$\begin{aligned} AA'' \cos \beta &: BB'' \cos \beta = OA : OB \\ \Delta OAA'' &\sim \Delta OBB'' \sim \Delta OCC'' \\ OA : OA'' &= OB : OB'' \\ OA : OB &= OA'' : OB'' \\ + \Delta OA''B'' &\sim \Delta OAB \\ + \Delta OB''C'' &\sim \Delta OBC \\ - \Delta OA''C'' &\sim \Delta OAC \\ \hline \Delta A''B''C'' &\sim \Delta ABC. \end{aligned}$$

„Die Endpunkte der Beschleunigungsvektoren eines ebenen starren Systems bilden eine Figur, die der von den Systempunkten gebildeten ähnlich ist.“

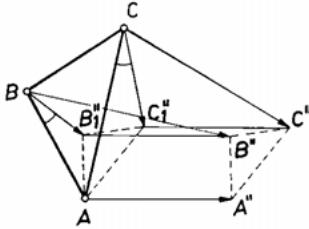


Bild 16. Beschleunigungsvektoren für Drehung und Schiebung

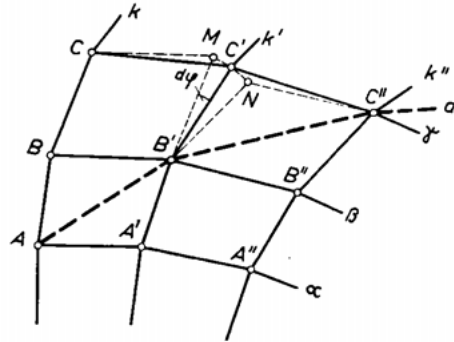


Bild 17. Zusammengesetzte Bewegung

Bei einer beliebigen ebenen Bewegung des Systems ABC tritt an die Stelle des Drehpunktes O der Momentanpol P ; damit hat der Satz von BURMESTER über die Endpunkte der Geschwindigkeiten Allgemeingültigkeit. Erwähnt sei, daß die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeitsvektoren, da sie auf den Polstrahlen liegen, ebenfalls eine der Systemfigur ähnliche Figur bilden, die außerdem ähnlich gelegen ist (Bild 15).

Befindet sich der Punkt A des ebenen starren Systems in Ruhe und die Beschleunigung des Punktes B ist bekannt, dann kann nach dem Ähnlichkeitssatz die Beschleunigung des Punktes C ermittelt werden. Werden die Endpunkte der Beschleunigung mit B_1'' bzw. C_1'' bezeichnet, dann ist

$$\Delta AB_1''C_1'' \sim \Delta ABC.$$

Erfährt das Dreieck ABC zusätzlich eine Schiebewegung in dem beispielsweise dem Punkt A eine Beschleunigung AA'' erteilt wird (Bild 16), dann erhalten auch B und C zusätzlich diese Beschleunigung und ihre Gesamtbeschleunigung ist BB'' bzw. CC'' und es ist

$$\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC,$$

und damit hat der Ähnlichkeitssatz von BURMESTER auch für die beliebige Bewegung eines starren ebenen Systems Gültigkeit [7].

Die Beschleunigung der zusammengesetzten Bewegung. Ein Punkt A bewege sich auf einer Kurve k und gelange in zwei aufeinander folgenden Zeitelementen nach B bzw. C . Die Kurve k bewege sich in der ruhenden Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so daß die Punkte A, B, C in den beiden Zeitelementen nach A', B', C' bzw. A'', B'', C'' gelangen (Bild 17).

AB' und $B'C''$ sind dann die resultierenden Bahnelemente, die Punkt A in zwei aufeinander folgenden Zeitelementen auf der Bahnkurve a durchläuft. Nach R. MÜLLER kann die Beschleunigung angegeben werden [29]

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= \frac{B'C'' - AB'}{dt^2}, \\ \mathfrak{b} &= \frac{(B'C' + C'C'') - (AB + BB')}{dt^2}. \end{aligned}$$

Für den Zähler des Bruches werden gesetzt

$$(BC - AB) + (B'B'' - BB') + (B'C' - BC) + (C'C'' - B'B''),$$

hierin bedeutet der Ausdruck $(BC - AB)/dt^2$ die relative Beschleunigung \mathfrak{b}_r des Punktes A auf der Kurve k ; der zweite Ausdruck $(B'B'' - BB')/dt^2$ wird Führungsbeschleunigung \mathfrak{b}_f genannt und ist die Beschleunigung, die ein mit der Kurve k fest verbundener Punkt hat. Beim Grenzübergang tritt an die Stelle des Punktes B der Punkt A .

Im speziellen Fall der Parallelverschiebung werden die beiden letzten Ausdrücke zu Null und es ist

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_r + \mathfrak{b}_f,$$

d. h. die Beschleunigung b eines Punktes, der sich mit der Beschleunigung \mathfrak{b}_r auf einer Kurve bewegt, die eine Parallelverschiebung \mathfrak{b}_f erfährt, ist gleich der Diagonalen des aus \mathfrak{b}_r und \mathfrak{b}_f gebildeten Parallelogrammes.

Im allgemeinen Fall ist

$$\begin{aligned} B'C' - BC &= B'C' - B'M = MC', \\ C'C'' - B'B'' &= C'C'' - NC'' = C'N, \\ MC' + C'N &= MN, \\ \frac{MN}{dt^2} &= \frac{2 BC \cdot d\varphi}{dt \cdot dt}, \text{ im Grenzübergang } \frac{2 AB \cdot d\varphi}{dt \cdot dt}; \end{aligned}$$

AB/dt ist die Relativgeschwindigkeit v_r des Punktes A auf der Kurve k und $d\varphi/dt$ ist die Winkelgeschwindigkeit ω , mit der sich die Kurve k in der ruhenden Ebene bewegt. Zu der geometrischen Summe von \mathfrak{b}_r und \mathfrak{b}_f tritt als weiteres Glied der Vektor $2 \cdot v_r \cdot \omega$, der CORIOLIS-Beschleunigung \mathfrak{b}_c genannt wird.

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_r + \mathfrak{b}_f + \mathfrak{b}_c.$$

Der Vektor \mathfrak{b}_c hat die Richtung des um 90° im Sinne von ω gedrehten Vektors der Relativgeschwindigkeit.

Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen am Gelenkviereck. Ein Gelenkviereck befindet sich in der im Bild 18 gezeichneten Stellung A_0ABB_0 . Die gedrehte Geschwindigkeit des Gelenkpunktes A sei durch die Strecke AK gegeben. Die Parallele zu AB durch K bestimmt auf BB_0 die gedrehte Geschwindigkeit v_B^L . Die Parallele zu BB_0 durch K bestimmt auf AB die Strecke AN , die gedrehte Relativgeschwindigkeit v_{BA}^L . Es ist

$$v_B^L = v_A^L + v_{BA}^L.$$

Die Normalbeschleunigungen b_{An} , b_{Bn} und b_{BA_n} werden je durch einen doppelten Parallelenzug gefunden (vgl. Bild 10).

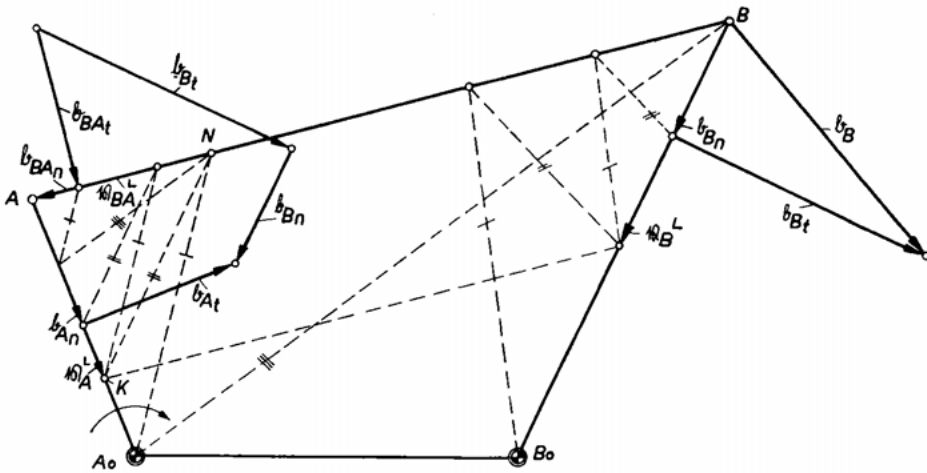


Bild 18. Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen am Gelenkviereck

Die Tangentialbeschleunigung b_{At} sei gegeben und von b_{Bt} und b_{BA_t} sind die Richtungen bekannt. Nach der Vektorengleichung

$$b_{Bn} + b_{Bt} = b_{An} + b_{At} + b_{BA_n} + b_{BA_t}$$

läßt sich der Vektorenzug zeichnen.

Der Kurbelgelenkpunkt A der exzentrischen Schubkurbel im Bild 19 habe die Geschwindigkeit v_A und die Beschleunigung $b_A = b_{An} + b_{At}$. Die Parallele zu AB durch den Endpunkt des gedrehten Vektors v_A^L bestimmt v_B^L senkrecht zur Schubrichtung. Die Relativgeschwindigkeit wird aus dem Vektorendreieck ermittelt und mit Hilfe der doppelten Parallelenzüge lassen sich b_{An} und b_{BA_n} zeichnen. b_{Bn} ist Null, weil B sich auf einer Geraden bewegt. Der Vektorenzug der Beschleunigungen kann entsprechend der Gleichung

$$b_B = b_{An} + b_{At} + b_{BA_n} + b_{BA_t}$$

gezeichnet werden.

Eine exzentrische Kurbelschleife ist im Bild 20 dargestellt. Die ruhende Ebene ist E_1 , die Ebene der Schleife E_2 und die Ebene der Kurbel ist E_3 . Kurbelgelenk-