ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

# Entwicklung nach Eigenfunktionen natürlicher Eigenwertprobleme

von W. Dück (Berlin)

In einer früheren Mitteilung [2] (¹) wurden die Grundlagen der Theorie der natürlichen Eigenwertprobleme bewiesen, jedoch wurde dort noch nicht auf die Frage der Entwickelbarkeit nach Eigenfunktionen natürlicher Eigenwertprobleme eingegangen. Für Aufgaben mit Kamkeschen Randbedingungen hat Kamke in [5] die Entwickelbarkeit einer Vergleichsfunktion untersucht. Dück gab in [1] dazu gewisse Ergänzungen und in [3] Entwicklungsaussagen für zulässige Funktionen an. Alle diese Ergebnisse sind in den wesentlich allgemeineren Entwicklungssätzen von Lehmann [6] enthalten, die nicht an die Voraussetzung des Vorliegens von Kamkeschen Randbedingungen gebunden sind. In [2] wurde der von Kamke angegebene Grundgedanke zur Beschreibung von Eigenwertaufgaben auf natürliche Eigenwertprobleme ausgedehnt, ohne, wie Lehmann, den Übergang zur Integraldarstellung zu beschreiten. Im folgenden soll gezeigt werden, daß der Kamkesche Gedanke zwangsläufig auch zur Angabe von Entwicklungsaussagen bei natürlichen Eigenwertproblemen führt. Dabei werden gegenüber Lehmann keine weiterreichenden Ergebnisse gewonnen. Auf die Angabe von Entwicklungssätzen für im Sinne von Lehmann streng $N$-definite Aufgaben wird hier verzichtet.

## 1. Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Gleichung.

Wie in [2] untersuchen wir das natürliche Eigenwertproblem

$$My-\lambda Ny = 0\,,$$
$$W_j(y) = 0, \qquad j = 1, \ldots, k\,,$$
$$R_j^M(y) = \lambda R_j^N(y), \qquad j = 1, \ldots, 2m-k\,.$$

Die Eigenwerte $\lambda_i$, $i = \pm 1, \pm 2, \ldots$, werden im Sinne von [2] in einer Folge

$$\ldots \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \lambda_{-1} \leqslant 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$$

(¹) Die in [2] angegebenen Voraussetzungen, Bezeichnungen und Sätze werden als bekannt angenommen.

angeordnet. Die zugehörigen Eigenfunktionen $y_i(x)$ werden im folgenden stets entsprechend der Gleichung

$$(1)\qquad (y_i, y_j)_N = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{für} \quad i = j,\ i = 1, 2, \ldots, \\ -1 & \text{für} \quad i = j,\ i = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

orthonormiert. Ist

$$\varepsilon_i = \operatorname{sgn} \lambda_i,$$

definieren wir die Fourier-Koeffizienten $c_i$ einer zulässigen Funktion $u(x)$ durch die Gleichung

$$(2)\qquad c_i = \varepsilon_i (u, y_i)_N.$$

Analog zu [5] können wir folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Ist das natürliche Eigenwertproblem eigentlich semidefinit in $Z$, gelten die Besselsche Ungleichung*

$$(3)\qquad \sum_i |\lambda_i| c_i^2 \leqslant (u, u)_M$$

*und die Parsevalsche Gleichung*

$$(4)\qquad \sum_i \varepsilon_i c_i^2 = (u, u)_N.$$

*Bezeichnen wir die Fourier-Koeffizienten einer zulässigen Funktion $v(x)$ mit $d_i$, besteht auch die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung*

$$(5)\qquad \sum_i \varepsilon_i c_i d_i = (u, v)_N.$$

*In den Summen* (3) *bis* (5) *durchläuft der Summationsindex nur ganze Zahlen $\neq 0$. Glieder mit Indizes, für die $\lambda_i$ nicht existiert, sind fortzulassen.*

Beweis der Besselschen Ungleichung: Für beliebige ganze Zahlen $p$, $q$ besteht die Gleichung

$$\Big(u - \sum_{i=p}^{q} c_i y_i,\ u - \sum_{i=p}^{q} c_i y_i\Big)_M = (u, u)_M - 2 \sum_{i=p}^{q} c_i (u, y_i)_M + \sum_{i=p}^{q} \sum_{j=p}^{q} c_i c_j (y_i, y_j)_M.$$

Da $y_i(x)$ Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda_i$ ist, gilt für beliebige zulässige Funktionen $w(x)$

$$(6)\qquad (w, y_i)_M = \lambda_i (w, y_i)_N.$$

Berücksichtigen wir weiterhin (1), (2), finden wir

$$(7)\qquad \Big(u - \sum_{i=p}^{q} c_i y_i,\ u - \sum_{i=p}^{q} c_i y_i\Big)_M = (u, u)_M - \sum_{i=p}^{q} |\lambda_i| c_i^2.$$

Andererseits muß wegen der eigentlichen Semidefinitheit

$$\Big(u - \sum_{i=p}^{q} c_i y_i \,,\; u - \sum_{i=p}^{q} c_i y_i\Big)_M \geqslant 0$$

gelten. Daraus folgt die Behauptung (3).

Beweis der Parsevalschen Gleichung: Schreiben wir für beliebige $p, q \geqslant 1$

$$w(x) = u(x) - \sum_{i=-p}^{q} c_i y_i(x) \,,$$

ist für jedes $j$ aus $-p \leqslant j \leqslant q$ wegen (1), (2)

$$(w, y_j)_N = (u, y_j)_N - \sum_{i=-p}^{q} c_i (y_i, y_j)_N = \varepsilon_j c_j - \varepsilon_j c_j = 0 \,.$$

$w(x)$ ist also orthogonal zu den Eigenfunktionen $y_{-p}(x), \dots, y_q(x)$. Nach dem Rayleighschen Prinzip in [2] gilt damit

$$\begin{aligned} &\text{im Falle } (w, w)_N > 0\text{: } R(w) \geqslant \lambda_{q+1}\,, \\ &\text{im Falle } (w, w)_N < 0\text{: } R(w) \leqslant \lambda_{-p-1}\,, \end{aligned} \qquad \text{mit } R(w) = \frac{(w, w)_M}{(w, w)_N}\,.$$

Wählen wir $p, q$ so groß, daß $\lambda_{q+1} \neq 0$, $\lambda_{-p-1} \neq 0$ ist, haben wir folgende drei Fälle in Erwägung zu ziehen:

$$(w, w)_N = 0 \text{ oder } \frac{(w, w)_M}{\lambda_{q+1}} \geqslant (w, w)_N > 0 \text{ oder } 0 > (w, w)_N \geqslant \frac{(w, w)_M}{\lambda_{-p-1}}\,.$$

Aus (7) folgt $(w, w)_M \leqslant (u, u)_M$ und damit die Beschränktheit von $(w, w)_M$. Weiter ist nach [2]

$$|\lambda_i| \to \infty \quad \text{für} \quad p, q \to \infty\,.$$

Also kann in allen drei Fällen

$$(w, w)_N \to 0 \quad \text{für} \quad p, q \to \infty \tag{8}$$

gefolgert werden.

Andererseits finden wir mit (1), (2)

$$\begin{aligned} (w, w)_N &= (u, u)_N - 2 \sum_{i=-p}^{q} c_i (u, y_i)_N + \sum_{i=-p}^{q} \sum_{j=-p}^{q} c_i c_j (y_i, y_j)_N \\ &= (u, u)_N - \sum_{i=-p}^{q} \varepsilon_i c_i^2 \,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wegen (8) die Parsevalsche Gleichung (4).

Beweis der verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung: Für die Fourier-Koeffizienten der zulässigen Funktion $u(x)+v(x)$ ist

$$(u+v, y_i)_N = (u, y_i)_N + (v, y_i)_N = c_i + d_i .$$

Daher besagt die Parsevalsche Gleichung für $u(x)+v(x)$

$$\sum_i \varepsilon_i(c_i+d_i)^2 = (u+v, u+v)_N = (u, u)_N + 2(u, v)_N + (v, v)_N .$$

Das führt mit den Parsevalschen Gleichungen für $u(x)$ und $v(x)$ sofort zur Behauptung (5).

**2. Konvergenz der Fourier-Reihe.** Es erhebt sich die Frage, ob die mit den Fourier-Koeffizienten $c_i$ einer zulässigen Funktion $u(x)$ gebildete Fourier-Reihe

$$\sum_i c_i y_i(x)$$

konvergiert. Dabei soll im folgenden stets die in Satz 1 getroffene Summationsverabredung gelten.

Wir bezeichnen mit $G(x, \xi)$ die Greensche Funktion des Eigenwertproblems zum Parameterwert $\lambda = 0$. Ist die Aufgabe eigentlich definit in $Z$, kann $\lambda = 0$ kein Eigenwert sein, so daß die Existenz der Greenschen Funktion gesichert ist. $G(x, \xi)$ stimmt aber mit der Greenschen Funktion zum Differentialausdruck $My$ mit den Kamkeschen Randbedingungen $W_j(y) = 0$, $R_j^M(y) = 0$ überein. Schreiben wir

$$G^{(i,j)}(x, \xi) = \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} G(x, \xi) ,$$

gilt der in [5] bewiesene Hilfssatz, daß $G^{(i,j)}(x, \xi)$ für $i+j \leqslant 2m-2$ existiert und in $a \leqslant x$, $\xi \leqslant b$ stetig ist. Dann können wir weiter den Gedankengängen in [5] folgen und den Satz beweisen:

Satz 2. *Ist das Eigenwertproblem eigentlich definit in $Z$, konvergiert*

$$\sum_i \frac{\{y_i^{(j)}(x)\}^2}{|\lambda_i|} \quad \textit{für} \quad j = 0, 1, \ldots, m-1$$

*und ist* $\leqslant G^{(j,j)}(x, x)$.

Beweis. $w(x)$ sei eine beliebige zulässige Funktion, für die

$$w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

gilt. Da $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist, hat die Randwertaufgabe

$$Mv = w^{(j)}(x), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1 , \tag{9}$$

$$W_j(v) = 0, \quad j = 1, \ldots, k ,$$

$$R_j^M(v) = 0, \quad j = 1, \ldots, 2m-k \tag{10}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung

$$v(x) = \int_a^b G(x,\,\xi)\,w^{(j)}(\xi)\,d\xi\,.$$

Wegen (10) ist

$$\langle v,\,v\rangle = (v,\,v)_M + \mathfrak{R}^M(v)\,\mathfrak{x}(v) = (v,\,v)_M\,.$$

Wie in [5], finden wir

$$(v,\,v)_M = \int_a^b\!\!\int_a^b G^{(j,j)}(x,\,\xi)\,w(x)\,w(\xi)\,dx\,d\xi\,. \tag{11}$$

Da $y_i(x)$ Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda_i$ ist, gilt (6), und für die Fourier-Koeffizienten $d_i$ der Funktion $v(x)$ ergibt sich bei Berücksichtigung von (9), (10)

$$\begin{aligned} d_i &= \varepsilon_i(v,\,y_i)_N = \frac{1}{|\lambda_i|}\,(v,\,y_i)_M = \frac{1}{|\lambda_i|}\,(y_i,\,v)_M \\ &= \frac{1}{|\lambda_i|}\,\langle y_i,\,v\rangle - \frac{1}{|\lambda_i|}\,\mathfrak{R}^M(v)\,\mathfrak{x}(y_i) = \frac{1}{|\lambda_i|}\,\langle y_i,\,v\rangle \\ &= \frac{1}{|\lambda_i|}\int_a^b y_i(x)\,w^{(j)}(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt, wie in [5],

$$\sum_{i=p}^{q} |\lambda_i|\,d_i^2 = \sum_{i=p}^{q} \frac{1}{|\lambda_i|} \int_a^b\!\!\int_a^b y_i^{(j)}(x)\,y_i^{(j)}(\xi)\,w(x)\,w(\xi)\,dx\,d\xi\,. \tag{12}$$

(11), (12) und die Besselsche Ungleichung für $v(x)$ führen zu

$$\int_a^b\!\!\int_a^b \Big\{G^{(i,j)}(x,\,\xi) - \sum_{i=p}^{q} \frac{1}{|\lambda_i|}\,y_i^{(j)}(x)\,y_i^{(j)}(\xi)\Big\}\,w(x)\,w(\xi)\,dx\,d\xi\,.$$

Wegen der Willkür der Funktion $w(x)$ ergibt sich die Behauptung.

Satz 3. *Ist die Aufgabe eigentlich definit in $Z$, konvergieren die mit den Fourier-Koeffizienten $c_i$ einer zulässigen Funktion $u(x)$ gebildeten Reihen*

$$\sum_i c_i\,y_i^{(j)}(x), \qquad j = 0,\,1,\,\ldots,\,m-1\,,$$

*und zwar konvergieren sogar die Reihen der absoluten Beträge der Glieder gleichmäßig in $a \leqslant x \leqslant b$.*

Die bereitgestellten Sätze gestatten es, den dafür in [5] angegebenen Beweis zu übernehmen.

### 3. Entwicklungssätze.

SATZ 4. *Für jede zulässige Funktion $u(x)$ einer in $Z$ eigentlich definiten Aufgabe gilt der Entwicklungssatz*

$$u(x) = \sum_i c_i y_i(x) + d_0(x)\,, \tag{13}$$

*und diese Reihe kann gliedweise $(m-1)$-mal differenziert werden. Die in (13) auftretende Nullfunktion $d_0(x)$ gehört dem Raum der verallgemeinerten zulässigen Funktionen $Z^*$ (2) an und genügt der homogenen Aufgabe*

$$Nd_0 = 0\,,$$
$$W_j(d_0) = 0, \quad j = 1, \ldots, k\,,$$
$$R_j^N(d_0) = 0, \quad j = 1, \ldots, 2m-k\,.$$

Beweis. Bezeichnen wir mit $d_i$ die Fourier-Koeffizienten einer beliebigen zulässigen Funktion $v(x)$, gilt

$$\varepsilon_i c_i d_i = (v, c_i y_i)_N\,.$$

Das führt zusammen mit der verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung (5) zu

$$\Big(v, u - \sum_i c_i y_i\Big)_N = 0\,, \tag{14}$$

was mit

$$\Big[v, u - \sum_i c_i y_i\Big] - \Re^N\Big(u - \sum_i c_i y_i\Big)\,\mathfrak{x}(v) = 0$$

gleichbedeutend ist. Wählen wir $v(x)$ in $Z$ so, daß $\mathfrak{x}(v) = 0$ aber sonst $v(x)$ beliebig ist, kann daraus

$$N\Big(u - \sum_i c_i y_i\Big) = 0$$

und dann auch

$$R_j^N\Big(u - \sum_i c_i y_i\Big) = 0, \quad j = 1, \ldots, 2m-k$$

gefolgert werden. Zusammen mit Satz 3 ergibt sich nun die Behauptung.

Wollen wir uns von der in Satz 4 auftretenden Nullfunktion befreien, müssen wir zusätzliche Voraussetzungen einführen.

DEFINITION. Ein selbstadjungiertes natürliches Eigenwertproblem wird *abgeschlossen* genannt, wenn $w(x) \equiv 0$ die einzige Funktion aus $Z^*$ ist, die für jede zulässige Funktion $v(x)$ der Gleichung

$$(v, w)_N = 0$$

genügt (3).

(2) Beachte die Definition in [2]. Wie Lehmann zeigt, kann auf die Nullfunktion $d_0(x)$ nicht verzichtet werden.

(3) Wir verzichtenauf die Übertragung der in [5] angegebenen Folgerungen aus der Abgeschlossenheit.

SATZ 5. *Ist das natürliche Eigenwertproblem eigentlich definit in Z und abgeschlossen, gilt für jede zulässige Funktion $u(x)$ der Entwicklungssatz*

$$u(x) = \sum_i c_i y_i(x), \tag{15}$$

*und diese Reihe kann gliedweise $(m-1)$-mal differenziert werden.*

Der Beweis des Satzes ergibt sich wegen der Abgeschlossenheit der Aufgabe aus (14).

DEFINITION. Ein selbstadjungiertes natürliches Eigenwertproblem wird im verallgemeinerten Sinne *definit* genannt, wenn für jede verallgemeinerte zulässige Funktion $u(x)$

$$(u, u)_N > 0 \tag{16}$$

gilt [4].

SATZ 6. *Ist das Eigenwertproblem eigentlich definit in Z und im verallgemeinerten Sinne definit, gilt der Entwicklungssatz* (15), *und die Fourier-Reihe kann gliedweise $(m-1)$-mal differenziert werden.*

Beweis. Die in Satz 4 auftretende Nullfunktion $d_0(x)$ muß der Gleichung $(d_0, d_0)_N = 0$ genügen. Daraus folgt wegen (16) $d_0(x) \equiv 0$.

---

[4] Auf den bei Dück [1] durchgeführten Vergleich dieser Voraussetzung mit der Abgeschlossenheit und die dort angegebenen Folgerungen soll hier nicht eingegangen werden.

## Literaturverzeichnis


[1] W. Dück, *Ein Entwicklungssatz bei linearen, selbstadjungierten, volldefiniten Eigenwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Z. angew. Math. Mech. 39 (1959), S. 358-363.

[2] — *Variationsprinzipien bei natürlichen Eigenwertproblemen*, Ann. Polon. Math. 17 (1965), S. 79-115.

[3] — *Ein Entwicklungssatz für zulässige Funktionen*, erscheint demnächst.

[4] E. Kamke, *Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen II*, Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 231-250.

[5] — *Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen III*, Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 251-286.

[6] N. J. Lehmann, *Eine Integraldarstellung für selbstadjungierte Randwertaufgaben (einschließlich einer Theorie der natürlichen Eigenwertprobleme)*, Math. Nachr. 14 (1955), S. 129-156.


*Reçu par la Rédaction le 3. 9. 1964*