Primitiveren van functies en integreren

Om de stof in dit document te kunnen begrijpen, moet je het differentiëren van functies onder de knie hebben. Zie ook het document hierover.

Primitiveren: het tegenovergestelde van differentiëren

Een functie F is een **primitieve** van f als de afgeleide van F de functie f oplevert, dus als $F' = f$. Voorbeeld: de functie $f(x) = 2x$ heeft $F(x) = x^2$ als een primitieve, want $F'(x) = [x^2]' = 2x = f(x)$. Maar ook $F(x) = x^2 + 5$ of $F(x) = x^2 - 7$ zijn primitieven van f, want $[x^2 + 5]' = [x^2 - 7]' = 2x$. Omdat de afgeleide van een constante 0 is, bestaan er dus oneindig veel primitieven van f. Al deze primitieven zijn te vatten in de notatie $F(x) = x^2 + C$, waarbij het getal C de **integratieconstante** wordt genoemd. **Primitiveren** is dus het tegenovergestelde van differentiëren.[1] De primitieve(n) van $f(x)$ worden meestal aangeduid met een hoofdletter ($F(x)$), maar je komt ook wel de notatie $\int f(x)dx$ tegen.

Regels voor het primitiveren van functies

Primitiveren van standaardfuncties

In Tabel 1 zijn standaardfuncties f en hun primitieven F gegeven; voor de volledigheid zijn ook de afgeleiden f' gegeven in het grijs. Door de differentieerregels toe te passen op de primitieven F, kun je nagaan dat inderdaad steeds geldt dat $F' = f$.

Tabel 1. Regels voor het primitiveren (en differentiëren) van standaardfuncties

type functie *f*	**$f(x)$ = ...**	**$F(x) = \int f(x)dx$ = ...**	$f'(x)$ = ...	***voorbeelden***
constant	c	$cx + C$	0	$f(x) = 5 \rightarrow F(x) = 5x + C$
macht	x^n	**$n \neq -1$:** $\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$ **$n = -1$:** $\ln\lvert x\rvert + C$	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^3 \rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$ $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$
exponentieel	e^x g^x	$e^x + C$ $\frac{g^x}{\ln(g)} + C$	e^x $g^x \cdot \ln(g)$	$f(x) = 2^x \rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln(2)} + C$
logaritmisch	$\ln(x)$ ${}^g\log(x)$	$x \cdot \ln(x) - x + C$ $\frac{1}{\ln(g)}(x \cdot \ln(x) - x) + C$	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x \cdot \ln(g)}$	$f(x) = {}^3\log(x) \rightarrow$ $F(x) = \frac{1}{\ln(3)}(x \cdot \ln(x) - x) + C$
goniometrisch	$\sin(x)$ $\cos(x)$	$-\cos(x) + C$ $\sin(x) + C$	$\cos(x)$ $-\sin(x)$	

Je ziet dat de machtsfunctie $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ als primitieven $F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$ heeft. Maar waarom die absolute-waardestrepen? Waarom niet gewoon $F(x) = \ln(x) + C$? Dit heeft te maken met het domein. Het domein van f is $\langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$ en het is wenselijk dat F hetzelfde domein heeft. $F(x) = \ln(x) + C$ heeft $\langle 0, \rightarrow\rangle$ als domein, maar $F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$ kan als volgt opgesplitst worden:

$$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C = \begin{cases} \ln(x) + C & als\ x > 0 \\ \ln(-x) + C & als\ x < 0 \end{cases} \qquad D_F = \langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$$

F en f hebben nu wel hetzelfde domein en je kunt zelf nagaan dat $[\ln(x) + C]' = [\ln(-x) + C]' = \frac{1}{x}$.

[1] Dit zie je terug in het Engelse woord voor primitieve: *antiderivative* (anti-afgeleide)

Factorregel

Als een functie wordt vermenigvuldigd met een constante factor a, dan wordt de primitieve vermenigvuldigd met dezelfde factor. De integratieconstante hoef je niet te vermenigvuldigen.

❖ $f(x) = a \cdot g(x) \;\rightarrow\; F(x) = a \cdot G(x)$ ***factorregel***

Voorbeelden:

- $f(x) = 3x^3 \;\rightarrow\; F(x) = 3 \cdot \frac{1}{4}x^4 + C = \frac{3}{4}x^4 + C$
- $f(x) = \frac{3}{5} \cdot 2^x \;\rightarrow\; F(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2^x}{\ln(2)} + C = \frac{3 \cdot 2^x}{5 \cdot \ln(2)} + C$

Somregel

Als een functie een som is van meerdere functies, mag je term voor term primitiveren. Je hebt maar één integratieconstante nodig.

❖ $f(x) = g(x) + h(x) \;\rightarrow\; F(x) = G(x) + H(x)$ ***somregel***

Voorbeeld:

- $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x^{-2} + 3 - x^{-1} \;\rightarrow\; F(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x^{-1} + 3x - \ln|x| + C$

Andere regels

Bij het differentiëren van productfuncties, quotiëntfuncties en/of samengestelde functies kun je gebruik maken van respectievelijk de productregel, de quotiëntregel en/of de kettingregel. Het primitiveren van dit soort functies is een stuk moeilijker, want er is niet altijd een vast recept voor. Het kan zijn dat je bij wiskunde nog het keuzeonderwerp *Voortgezette integraalrekening* krijgt, waar je leert over technieken zoals de **substitutiemethode** en **partieel primitiveren**, zodat je een groter scala aan functies kunt primitiveren. Hieronder staan twee typen functies die nog wel relatief eenvoudig te primitiveren zijn.

Samengestelde functies van de vorm $f(x) = g(ax + b)$

In de samengestelde functie $f(x) = g(u(x))$ zijn twee functies, u en g, geschakeld: u werkt eerst op x en vervolgens werkt g op $u(x)$. In het specifieke geval dat u een lineaire functie is, dus $u(x) = ax + b$, is f te schrijven als $f(x) = g(ax + b)$. Bij het primitiveren wordt de kettingregel omgekeerd toegepast.

❖ $f(x) = g(ax + b) \rightarrow F(x) = \frac{1}{a} \cdot G(ax + b)$ ***"kettingregel"***

Voorbeelden:

- $f(x) = e^{3x+5} \;\rightarrow\; F(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{3x+5} + C$
- $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x) \;\rightarrow\; F(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x) + C$
- $f(x) = (3x + 1)^5 \;\rightarrow\; F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (3x + 1)^6 + C = \frac{1}{18} \cdot (3x + 1)^6 + C$
- $f(x) = \frac{1}{3x+1} = (3x + 1)^{-1} \;\rightarrow\; F(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln|3x + 1| + C$

Functies van de vorm $f(x) = u'(x) \cdot g(u(x))$

Deze paragraaf is wat uitdagender en kan desgewenst overgeslagen worden. Productfuncties waarin een van de twee factoren een samengestelde functie $g(u(x))$ is en de andere factor $u'(x)$, zijn te primitiveren door de kettingregel omgekeerd toe te passen.

❖ $f(x) = u'(x) \cdot g(u(x)) \;\rightarrow\; F(x) = G(u(x))$ ***"kettingregel"***

Laten we als voorbeeld de productfunctie $f(x) = 2x(x^2 + 5)^3$ bekijken. De factor $(x^2 + 5)^3$ is een samengestelde functie $g(u(x))$ met $u(x) = x^2 + 5$ en $g(u(x)) = (u(x))^3$; de factor $2x$ is $u'(x)$. De primitieve van f kan daarom verkregen worden door $g(u(x))$ te primitiveren: $F(x) = G(u(x)) = \frac{1}{4}(u(x))^4 + C = \frac{1}{4}(x^2 + 5)^4 + C$. Je kunt zelf nagaan dat je bij het differentiëren van F de factor $2x$ weer terugkrijgt.

- $f(x) = 2x(x^2 + 5)^3 = [x^2 + 5]'\cdot(x^2 + 5)^3 \;\rightarrow\; F(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 5)^4 + C$

Iets soortgelijks kun je doen met $f(x) = -x(x^2 + 5)^3$, als je $-x$ als $2x\cdot-\frac{1}{2}$ schrijft.

- $f(x) = -x(x^2 + 5)^3 = 2x\cdot-\frac{1}{2}(x^2 + 5)^3 = [x^2 + 5]'\cdot-\frac{1}{2}(x^2 + 5)^3 \;\rightarrow\; F(x) = -\frac{1}{8}(x^2 + 5)^4 + C$

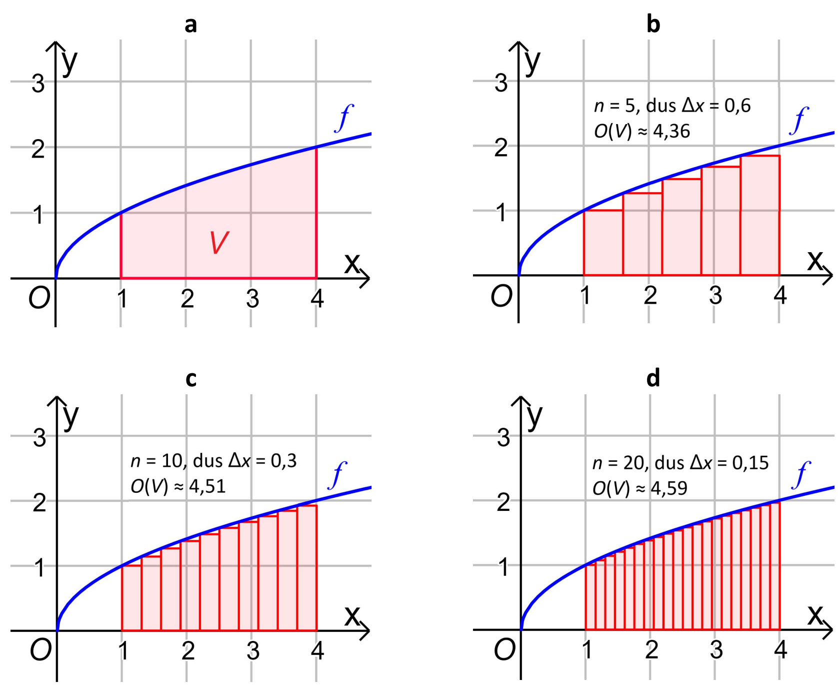
Andere voorbeelden:[2]

- $f(x) = \sin(x)\cdot\cos^2(x) = -\sin(x)\cdot-\cos^2(x) = [\cos(x)]'\cdot-\cos^2(x) \;\rightarrow\; F(x) = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$
- $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x}\cdot\ln(x) = [\ln(x)]'\cdot\ln(x) \;\rightarrow\; F(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln^2(x) + C$

Integreren en de relatie met primitiveren

Integreren, Riemannsom en integraal

Integreren is het bepalen van de oppervlakte onder een grafiek, dus tussen de grafiek en de x-as. Stel dat we de oppervlakte van vlakdeel V (Figuur 1a), begrensd door de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$, de x-as en de lijnen $x = 1$ en $x = 4$ willen weten. Hokjes tellen levert een schatting van tussen de 4,5 en 5 op.



Figuur 1. De oppervlakte van vlakdeel *V* (a) kan benaderd worden met Riemannsommen (b,c,d)

De oppervlakte van vlakdeel V kan benaderd worden met een **Riemannsom** (Figuur 1 b–d). In een Riemannsom tel je de oppervlaktes van n rechthoekjes, allemaal met dezelfde breedte Δx, bij elkaar

[2] Voor het gemak wordt $(\cos(x))^2$ meestal genoteerd als $\cos^2(x)$ en $(\ln(x))^2$ als $\ln^2(x)$.

op. De hoogte van het i-de ($i = 1, 2, ..., n$) rechthoekje wordt gegeven door $f(x_i)$, waarbij x_i een getal op het i-de deelinterval[3] is. De Riemannsom S kan worden genoteerd als (Σ is het sommatieteken):

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

In Figuur 1 zie je dat de oppervlakte van V steeds beter benaderd wordt naarmate de rechthoekjes dunner worden gemaakt, dus als Δx kleiner (en daarmee n groter,[4] want meer rechthoekjes) wordt gemaakt. De exacte oppervlakte $O(V)$ kan worden verkregen door de limiet voor Δx naar 0 te nemen. Dit wordt korter genoteerd als een **integraal** (∫ is het integraalteken):

$$O(V) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

In de integraal staan onder en boven het integraalteken de integratiegrenzen. Als over het interval $[a, b]$ wordt geïntegreerd, is a de ondergrens en b de bovengrens. Tussen het integraalteken en dx staat de te integreren functie, die ook wel de **integrand** wordt genoemd.

De integraal berekenen met de primitieve

Het blijkt dat primitieven informatie bevatten over de oppervlakte onder de grafiek van een functie. Primitieven zou je dus oppervlaktefuncties kunnen noemen. Vandaar dat primitieven van f ook worden genoteerd[5] als $\int f(x)dx$. Omdat de integratiegrenzen onbepaald zijn, heet dit een **onbepaalde integraal**.

Een integraal waarvan de integratiegrenzen wél gegeven zijn, zoals in de paragraaf hiervoor, is een **bepaalde integraal**. Een bepaalde integraal wordt op de volgende manier uitgerekend:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Omdat je $F(a)$ van $F(b)$ af moet halen, heeft de integratieconstante C geen invloed op de uitkomst ($C - C = 0$). Om deze reden mag je bij een bepaalde integraal de integratieconstante weglaten.

Voorbeeldopgave

(a) Bereken exact de oppervlakte van vlakdeel V uit Figuur 1a.

De functie $f(x) = \sqrt{x}$ ($= x^{\frac{1}{2}}$) moet worden geïntegreerd over het interval [1, 4]. Een primitieve van f is $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. Hiermee kan de oppervlakte uitgerekend worden. Dit noteer je zo:

$$O(V) = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4 = \tfrac{2}{3} \cdot 4\sqrt{4} - \tfrac{2}{3} \cdot 1\sqrt{1} = \tfrac{16}{3} - \tfrac{2}{3} = \mathbf{4\tfrac{2}{3}}$$

De exacte oppervlakte is $4\frac{2}{3}$ en dit komt overeen met de schatting van tussen de 4,5 en 5.

[3] In Figuur 1b zijn [1; 1,6], [1,6; 2,2], [2,2; 2,8], [2,8; 3,4] en [3,4; 4] de vijf deelintervallen van [1, 4].
[4] Δx en n zijn omgekeerd evenredig; als Δx naar 0 gaat, gaat n naar oneindig.
[5] De opdracht *Bereken* $\int f(x)dx$ is hetzelfde als *Bereken de primitieven van* $f(x)$. Vergeet C dus niet.

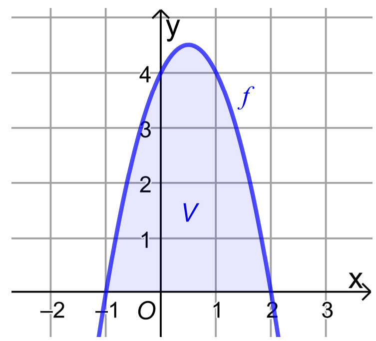
Meer oppervlakteberekeningen

Het berekenen van de oppervlakte van vlakdeel *V* uit Figuur 1a was nog relatief eenvoudig. In deze paragraaf worden steeds wat complexere situaties uitgelegd aan de hand van voorbeelden. Bij elke integratie-opgave is het aan te raden om de grafiek ook te tekenen. Dat geeft je meer overzicht, zodat je minder snel fouten maakt. Zorgvuldig met haakjes werken is heel erg belangrijk.

Zelf integratiegrenzen berekenen

(b) Een vlakdeel *V* wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$ en de *x*-as. Bereken exact de oppervlakte van *V*.

De situatie is getekend in de figuur hiernaast. Omdat *V* wordt ingesloten door de grafiek van *f* en de *x*-as, moeten de nulpunten van *f* eerst worden berekend. De kwadratische vergelijking $f(x) = 0$ geeft uiteindelijk $x = -1$ en $x = 2$ als oplossingen. Er moet dus over het interval [−1, 2] geïntegreerd worden.



$$O(V) = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} =$$

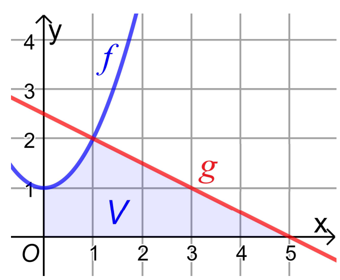
$$= -\tfrac{2}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 4 \cdot 2 - (-\tfrac{2}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 4 \cdot -1) = \mathbf{9}$$

Let op: de integrand moet tussen haakjes staan, want elke term waaruit *f* bestaat moet met *dx* vermenigvuldigd worden. In de uitwerking van de integraal wordt $F(-1)$ van $F(2)$ afgehaald; omdat $F(-1)$ uit meerdere termen bestaat, moet $F(-1)$ tussen haakjes worden gezet.

Meer dan één integraal nodig

(c) Een vlakdeel *V* wordt ingesloten door de grafieken van de functies $f(x) = x^2 + 1$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$, de *x*-as en de *y*-as. Bereken exact de oppervlakte van *V*.

De situatie is getekend in de figuur hiernaast. Het is vrij eenvoudig te berekenen dat *f* en *g* elkaar snijden bij $x = -1\frac{1}{2}$ en bij $x = 1$ en dat $x = 5$ het nulpunt van *g* is.



Er moet over het interval [0, 5] geïntegreerd worden. De oppervlakte kan niet met één integraal berekend worden. Op het interval [0, 1] begrenst de grafiek van *f* het vlakdeel van boven, maar op het interval [1, 5] begrenst de grafiek van *g* het vlakdeel van boven. De oppervlakte wordt dus met twee integralen berekend. Op [0, 1] integreren we *f* en op [1, 5] integreren we *g*.

$$O(V) = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 1)dx + \int_1^5 \left(-\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{2}\right)dx =$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 + \left[-\tfrac{1}{4}x^2 + 2\tfrac{1}{2}x\right]_1^5 = \tfrac{1}{3} \cdot 1^3 + 1 - (0 + 0) + -\tfrac{1}{4} \cdot 5^2 + 2\tfrac{1}{2} \cdot 5 - (-\tfrac{1}{4} \cdot 1^2 + 2\tfrac{1}{2} \cdot 1) =$$

$$= \tfrac{1}{3} + 1 - 0 - 6\tfrac{1}{4} + 12\tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{4} + 2\tfrac{1}{2}\right) = 1\tfrac{1}{3} + 6\tfrac{1}{4} - 2\tfrac{1}{4} = \mathbf{5\tfrac{1}{3}}$$

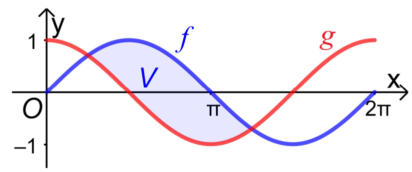
Vlakdeel tussen twee grafieken

Als op een interval [*a*, *b*] geldt dat *f*(*x*) ≥ *g*(*x*), dan is de oppervlakte van een vlakdeel *V* dat wordt ingesloten door de lijnen *x* = *a* en *x* = *b* en de grafieken van *f* en *g* als volgt:[6]

$$O(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

(d) Een vlakdeel *V* wordt ingesloten door de grafieken van de functies *f*(*x*) = sin(*x*) en *g*(*x*) = cos(*x*) op het interval [0, 2π]. Bereken exact de oppervlakte van *V*.

De situatie is getekend in de figuur hiernaast. Door de vergelijking sin(*x*) = cos(*x*) op te lossen, kun je berekenen dat *f* en *g* elkaar op [0, 2π] snijden bij $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{5}{4}\pi$. In de figuur zie je ook dat *f*(*x*) ≥ *g*(*x*) op $[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$.



$$O(V) = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin(x) - \cos(x))dx = [-\cos(x) - \sin(x)]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} =$$

$$= -\cos\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) - \sin\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) - \left(-\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) - \sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\right) = - -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

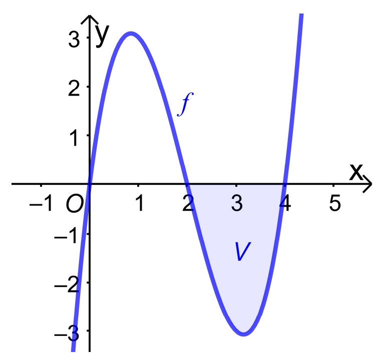
Vlakdeel aan de bovenkant begrensd door de *x*-as

Als op een interval [*a*, *b*] geldt dat *f*(*x*) ≤ 0, dan is de oppervlakte van een vlakdeel *V* dat wordt ingesloten door de lijnen *x* = *a* en *x* = *b*, de *x*-as en de grafiek van *f* als volgt:

$$O(V) = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

(e) Een vlakdeel *V* wordt ingesloten door de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ waarvoor geldt dat *f*(*x*) ≤ 0 en de *x*-as. Bereken exact de oppervlakte van *V*.

De situatie is getekend in de figuur hiernaast. De nulpunten van *f* zijn *x* = 0, *x* = 2 en *x* = 4. Uit de vraagstelling blijkt dat het vlakdeel tussen *x* = 2 en *x* = 4 bedoeld wordt, want daar is *f*(*x*) ≤ 0. Omdat de oppervlakte van een vlakdeel altijd een positief getal moet zijn, moet de functie −*f*(*x*) geïntegreerd worden over het interval [2, 4].



$$O(V) = \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)dx = \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x)dx =$$

$$= \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 4x^2\right]_2^4 =$$

$$= -\tfrac{1}{4} \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 - \left(-\tfrac{1}{4} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2\right) =$$

$$= -64 + 128 - 64 - (-4 + 16 - 16) = 0 - -4 = \mathbf{4}$$

[6] Als *g*(*x*) ≥ *f*(*x*), dan is de integrand *g*(*x*) − *f*(*x*).

Inhoud van omwentelingslichaam

Een **omwentelingslichaam** ontstaat door het wentelen van een vlakdeel om een as; vaak is dat de *x*-as of de *y*-as. Met behulp van een integraal kan de inhoud van het omwentelingslichaam exact berekend worden.

Wentelen om de *x*-as

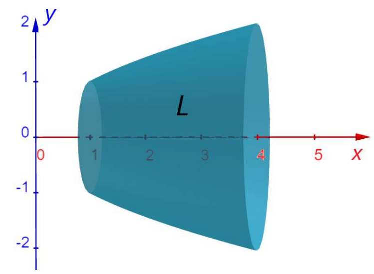
Vlakdeel begrensd door een grafiek en de *x*-as

Een vlakdeel *V*, ingesloten door de lijnen *x* = *a* en *x* = *b*, de *x*-as en de grafiek van *f*, wordt gewenteld om de x-as, zodat omwentelingslichaam *L* ontstaat. De inhoud van *L* is als volgt:[7]

$$I(L) = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

(f) Het vlakdeel *V* uit Figuur 1a wordt gewenteld om de *x*-as om omwentelingslichaam *L* te geven. Bereken exact de inhoud van *L*.

Rechts zie je hoe het omwentelingslichaam eruitziet.



$$I(L) = \pi \int_1^4 (f(x))^2 dx = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx =$$

$$= \pi \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^4 = \pi\left(\tfrac{1}{2}\cdot 4^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 1^2\right) = \pi\left(8 - \tfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{7\tfrac{1}{2}\pi}$$

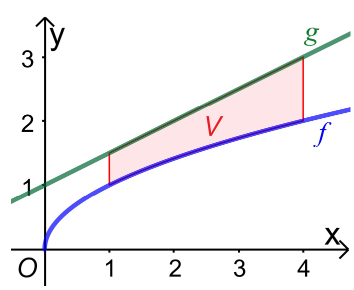
Vlakdeel begrensd door twee grafieken

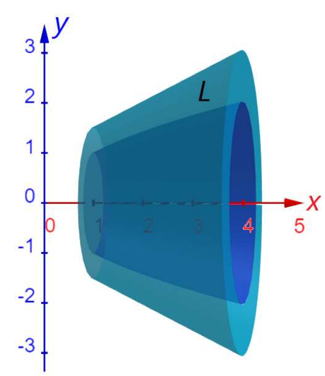
Stel dat op een interval [*a*, *b*] geldt dat *f*(*x*) ≥ *g*(*x*) ≥ 0. Een vlakdeel *V*, ingesloten door de lijnen *x* = *a* en *x* = *b* en de grafieken van *f* en *g*, wordt gewenteld om de x-as, zodat omwentelingslichaam *L* ontstaat. De inhoud van *L* is als volgt:

$$I(L) = \pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx$$

(g) Een vlakdeel *V*, ingesloten door de lijnen *x* = 1 en *x* = 4 en de grafieken van *f*(*x*) = $\sqrt{x}$ en *g*(*x*) = $\frac{1}{2}x + 1$, wordt gewenteld om de *x*-as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam *L*.

Rechts zie je hoe het vlakdeel en het omwentelingslichaam eruitzien. Op het interval [1, 4] geldt *g*(*x*) ≥ *f*(*x*) ≥ 0, dus de integrand is $(g(x))^2 - (f(x))^2$. Bij het uitwerken van de integraal is gebruik gemaakt van het antwoord verkregen bij opgave f.





[7] Let op: $\int f(x)dx = F(x)$, maar $\int (f(x))^2 dx \neq (F(x))^2$. De gekwadrateerde functie moet worden geprimitiveerd.

$$I(L) = \pi \int_1^4 \left((g(x))^2 - (f(x))^2\right) dx = \pi \int_1^4 (g(x))^2 dx - \pi \int_1^4 (f(x))^2 dx =$$

$$= \pi \int_1^4 \left(\tfrac{1}{2}x + 1\right)^2 dx - 7\tfrac{1}{2}\pi = \pi \int_1^4 \left(\tfrac{1}{4}x^2 + x + 1\right) dx - 7\tfrac{1}{2}\pi = \pi \left[\tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + x\right]_1^4 - 7\tfrac{1}{2}\pi =$$

$$= \pi \left(\tfrac{1}{12} \cdot 4^3 + \tfrac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 - \left(\tfrac{1}{12} \cdot 1^3 + \tfrac{1}{2} \cdot 1^2 + 1\right)\right) - 7\tfrac{1}{2}\pi = \pi \left(17\tfrac{1}{3} - 1\tfrac{7}{12}\right) - 7\tfrac{1}{2}\pi = \boldsymbol{8\tfrac{1}{4}\pi}$$

Wentelen om de *y*-as

Vlakdeel begrensd door een grafiek en de y-as

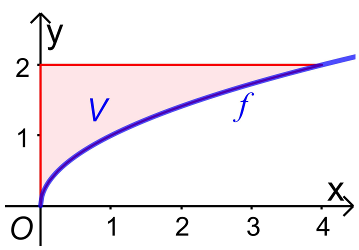
Een vlakdeel *V*, ingesloten door de lijnen *y* = *a* en *y* = *b*, de *y*-as en de grafiek van *f*, wordt gewenteld om de *x*-as, zodat omwentelingslichaam *L* ontstaat. De inhoud van *L* is als volgt:

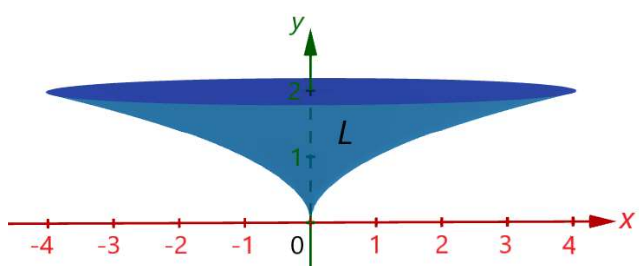
$$I(L) = \pi \int_a^b x^2 dy$$

Waar bij het wentelen om de *x*-as $f(x)^2$ oftewel y^2 de integrand is, is dit x^2 bij het wentelen om de *y*-as. Dit betekent dat je bij het wentelen om de *y*-as eerst de functie moet omschrijven zodat *x* is uitgedrukt in *y*.

(h) Een vlakdeel *V*, ingesloten door de lijn *y* = 2, de *y*-as en de grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$, wordt gewenteld om de *y*-as. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam *L*.

Hieronder zie je hoe het vlakdeel en het omwentelingslichaam eruitzien.





De functie $y = \sqrt{x}$ kan worden omgeschreven tot $x^2 = y^4$ door twee keer te kwadrateren. Er moet over het interval [0, 2] geïntegreerd worden.

$$I(L) = \pi \int_0^2 x^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy = \pi \left[\tfrac{1}{5}y^5\right]_0^2 = \pi \left(\tfrac{1}{5} \cdot 2^5 - \tfrac{1}{5} \cdot 0^5\right) = \boldsymbol{6\tfrac{2}{5}\pi}$$