

Eine Festigkeitsauslegung kann ohne weitere Hypothesen für den Fall der mehrachsigen Belastung noch nicht durchgeführt werden. Es darf nicht etwa nur eine der drei Normalspannungen mit  $\sigma_{zul}$  des Werkstoffes verglichen werden. Nähere Ausführungen, wie man bei Mehrachsigkeit verfährt, folgen in Kap. 13.

## 4.8 Wärmedehnungen und Wärmespannungen

Ein weiteres Beispiel für Belastungen unter Zug- und Druckspannungen stellen Wärmespannungen dar. Alle Stoffe ändern in Abhängigkeit von der Temperatur mehr oder weniger ihre äußeren Abmessungen. Aufgrund der mit der Temperatur zunehmenden Schwingungsamplitude der Atome dehnen sie sich üblicherweise beim Erwärmen nach allen Richtungen gleich aus (manche Stoffe zeigen in begrenzten Temperaturbereichen durch überlagerte Effekte ein abweichendes Verhalten). Bei festen Stoffen drückt man diese thermische Formänderung durch die Längenänderung aus:

$$\varepsilon_{th} = \frac{\Delta L}{L_0} \sim \Delta T = T_2 - T_1 \quad (4.25 \text{ a})$$

$T_1$  Ausgangstemperatur  
 $T_2$  Endtemperatur

Differenzen, nicht nur bei Temperaturen, werden allgemein angegeben nach der Merkregel „*hinterher minus vorher*“. Den Proportionalitätsfaktor bezeichnet man als *thermischen Längenausdehnungskoeffizienten*  $\alpha_\ell$ :

$$\boxed{\varepsilon_{th} = \alpha_\ell \Delta T} \quad (4.25 \text{ b})$$

$\Delta T$  ist für Berechnungen stets vorzeichengerecht einzusetzen, d.h.  $\Delta T > 0$  für Aufheizen und  $\Delta T < 0$  für Abkühlen. Es ergibt sich dann entweder eine Dehnung (Vorzeichen: +) oder eine Schrumpfung (Vorzeichen: –). Da die Längenänderung nicht exakt linear mit der Temperatur erfolgt, kennzeichnet der so definierte  $\alpha_\ell$ -Wert die *mittlere* Wärmeausdehnung in dem betrachteten Temperaturintervall. Es ist also stets anzugeben, für welchen Temperaturbereich er gelten soll. Tabellenwerte beziehen sich bei Metallen meist auf den Bereich von 0 bis 100 °C; für Anwendungen bei höheren Temperaturen müssen die jeweils gültigen Werte benutzt werden.

Die thermischen Verformungen sind grundsätzlich reversibel, d.h. bei Rückkehr auf die Ausgangstemperatur verschwinden sie wieder. Allerdings sind mit dem thermischen „Atmen“ bedeutende technische Konsequenzen verbunden. Können sich nämlich die thermischen Dehnungen oder Schrumpfungen nicht ungehindert ausbreiten, und dies ist bei Bauteilen praktisch nie der Fall, rufen sie thermisch induzierte Spannungen – die Wärmespannungen – in den Werkstoffen und damit in den Konstruktionen hervor. Diese bewirken *mechanische* Verformungen, d.h. elastische oder elastisch-plastische Dehnungen oder Stauchungen.

Besonders bei höheren Temperaturen spielen sich verstärkt plastische Vorgänge im Material ab.

Behinderte Wärmedehnung/-schrumpfung kann folgende Ursachen haben, die auch in Kombination auftreten können:

- äußere Behinderung durch die Einspannung des Bauteils;
- innere Behinderung durch stationäre oder instationäre ungleichmäßige Temperaturverteilung über dem Querschnitt;
- innere Behinderung in Verbundwerkstoffen und Werkstoffverbunden mit unterschiedlichem thermischen Ausdehnungsverhalten der beteiligten Stoffe, z.B. bei beschichteten Werkstoffen oder bei Faserverbundwerkstoffen.

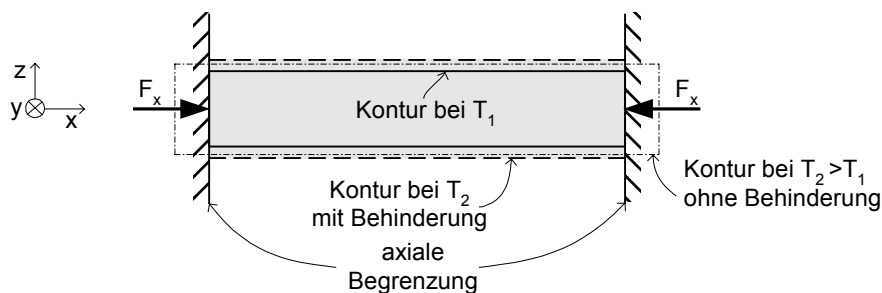
Im ersten Fall spricht man von *erzwungener* Wärmedehnungsbehinderung und *erzwungenen* Wärmespannungen, in den anderen Fällen von *nicht erzwungener* Wärmedehnungsbehinderung oder *nicht erzwungenen* Wärmespannungen.

Im Folgenden werden einige Fälle zur Berechnung der Wärmedehnungen und -spannungen exemplarisch behandelt.

#### 4.8.1 Einaxiale erzwungene Wärmedehnungsbehinderung

Einaxiale erzwungene Wärmedehnungsbehinderung liegt vor, wenn die freie thermische Ausdehnung in *einer* Richtung von *außen* unterdrückt wird, **Bild 4.10**. Wird die Dehnung dabei *vollständig* behindert, so muss die Summe aus thermischer (Index „th“) und entgegengerichteter mechanischer Verformung (Index „m“) null ergeben:  $\varepsilon_{th} = -\varepsilon_m$ . Bei Behinderung in x-Richtung ist somit:

$$\varepsilon_x = 0 = \varepsilon_{th} + \varepsilon_m = \alpha_\ell \Delta T + \frac{\sigma_x}{E} \quad (4.26 a)$$



**Bild 4.10** Prinzip der einaxialen erzwungenen Wärmedehnungsbehinderung bei Erwärmung von  $T_1$  auf  $T_2$

Für die mechanische Dehnung wird hier vorausgesetzt, dass es sich um eine *rein elastische* Verformung handelt, für die das Hooke'sche Gesetz gilt. Die Wärmespannung in x-Richtung, welche entlang der Länge des Körpers konstant ist, beträgt folglich:

$$\sigma_x = E \varepsilon_m = -E \varepsilon_{th} = -E \alpha_\ell \Delta T \quad (4.26 \text{ b})$$

Für den Fall völliger Dehnungsbehinderung von außen errechnen sich Wärmespannungen von 3 MPa/K bei  $E = 200 \text{ GPa}$  und  $\alpha_\ell = 15 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$  (typische Werte für Stähle). Dieser Wert ist hoch und kann bei entsprechend großen  $\Delta T$ -Werten die Streck- oder Stauchgrenze und sogar die Zugfestigkeit – im Falle der Schrumpfbegrenzung bei Abkühlung – übersteigen. Im letztgenannten Fall kommt es dann zu Wärmespannungsrissen (Thermoschockrisse).

#### 4.8.2 Zweiaxiale nicht erzwungene Wärmedehnungsbehinderung

Nicht erzwungene Wärmedehnungsbehinderung tritt überall dort auf, wo Bauteile über der Wanddicke ein Temperaturgefälle aufweisen, z.B. bei Rohrleitungen, in denen heiße Medien transportiert werden, oder bei gekühlten Teilen, wie z.B. Turbinenschaufeln oder einem wassergekühlten Zylinderkopf eines Motors.

Im Folgenden wird vereinfacht eine ebene Platte mit einem Temperaturgefälle betrachtet, **Bild 4.11**. Die Starttemperatur sei  $T_1$ . Nach Erreichen eines stationären, zeitlich sich nicht mehr verändernden Wärmeübertragungszustandes soll auf der warmen Oberseite die Temperatur  $T_{\max}$  (hochgestelltes „w“) herrschen, auf der kälteren Unterseite die Temperatur  $T_{\min}$  (hochgestelltes „k“). Die Wärmeausdehnung in z-Richtung ist frei, die in x- und y-Richtung dagegen behindert. Von der Ober- und der Unterseite wird jeweils ein quadratisches Spannungselement analysiert, wie in Bild 4.11 eingezeichnet. Für diese liegt ein ebener Spannungszustand vor, d.h. es wirken in zwei zueinander senkrecht stehenden Richtungen Normalspannungen: oben Druck-, unten Zugspannungen.

Die Verformungen werden in allen drei Achsen in ihre Einzelkomponenten zerlegt und anschließend summiert. Zunächst wird die heiße Oberseite betrachtet. Folgende Anteile ergeben sich:

##### I) *Rein thermische Verformungen*

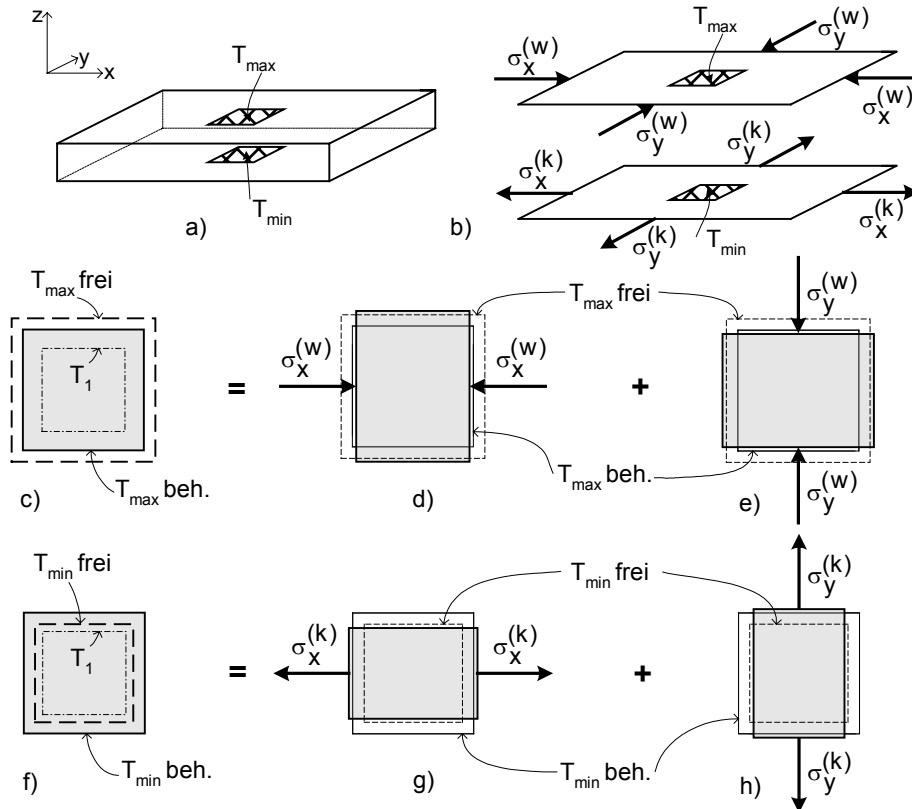
Diese sind bei kubischen Kristallen stets nach allen Richtungen gleich groß (isotrop) vorliegen, Bild 4.11c):

$$\varepsilon_{x_1}^{(w)} = \varepsilon_{y_1}^{(w)} = \varepsilon_{z_1}^{(w)} = \alpha_\ell (T_{\max} - T_1) \quad (4.27 \text{ a})$$

##### II) *Verformung durch die Normalspannung $\sigma_x^{(w)}$*

In y- und z-Richtung tritt aufgrund des Poisson'schen Effektes eine Querverformung auf, Bild 4.11 d). Die Formulierungen werden zunächst allgemein ohne Berücksichtigung des tatsächlichen Vorzeichens angesetzt:

$$\varepsilon_{x_2}^{(w)} = \frac{\sigma_x^{(w)}}{E} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{y_2}^{(w)} = \varepsilon_{z_2}^{(w)} = -\nu \frac{\sigma_x^{(w)}}{E} \quad (4.27 \text{ b})$$



**Bild 4.11** Modell einer ebenen Platte mit Temperaturgefälle über der Wanddicke zur Veranschaulichung stationärer Wärmespannungen ohne äußere Verformungsbehinderung

a) Platte mit warmer Ober- und kalter Unterseite

b) Separat betrachtete Ober- und Unterseite mit den Druck- bzw. Zugwärmespannungen („(w)“: warm bei  $T_{\max}$ ; „(k)“: kalt bei  $T_{\min}$ )

c) Spannungselement der heißen Oberseite mit Konturen im Ausgangszustand bei  $T_1$  (strichpunktiert), nach gedachter freier thermischer Dehnung („frei“, gestrichelt) sowie im behinderten Endzustand bei  $T_{\max}$  („beh.“, durchgezogen)

d) Mechanische Verformung des Elementes wie c) unter Wirkung der Spannung  $\sigma_x^{(w)}$  mit Querverformung in y-Richtung

e) Wie d) unter Wirkung der Spannung  $\sigma_y^{(w)}$  mit Querverformung in x-Richtung

f) Spannungselement der kälteren Unterseite mit Konturen im Ausgangszustand bei  $T_1$  (strichpunktiert), nach gedachter freier thermischer Dehnung (gestrichelt) sowie im behinderten Endzustand bei  $T_{\min}$  (durchgezogen)

g) Mechanische Verformung des Elementes wie f) unter Wirkung der Spannung  $\sigma_x^{(k)}$  mit Querverformung in y-Richtung

h) Wie g) unter Wirkung der Spannung  $\sigma_y^{(k)}$  mit Querverformung in x-Richtung

III) *Verformung durch die Normalspannung*  $\sigma_y^{(w)}$ 

In x- und z-Richtung tritt eine Querverformung auf, Bild 4.11e):

$$\varepsilon_{y_3}^{(w)} = \frac{\sigma_y^{(w)}}{E} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{x_3}^{(w)} = \varepsilon_{z_3}^{(w)} = -\nu \frac{\sigma_y^{(w)}}{E} \quad (4.27 \text{ c})$$

Bei quasi-isotropen Werkstoffen ist der E-Modul in allen Richtungen gleich, so dass die Hooke'schen und Poisson'schen Dehnungsanteile jeweils gleich und auch die Spannungen in den Richtungen x und y identisch sind:

$$\sigma_x^{(w)} = \sigma_y^{(w)} = \sigma^{(w)} \quad (4.27 \text{ d})$$

und

$$\sigma_x^{(k)} = \sigma_y^{(k)} = \sigma^{(k)} \quad (4.27 \text{ e})$$

Summiert man die Einzelanteile der Dehnungen, erhält man:

$$\varepsilon_x^{(w)} = \sum_i \varepsilon_{x_i}^{(w)} = \varepsilon_y^{(w)} = \sum_i \varepsilon_{y_i}^{(w)} = \alpha_\ell (T_{\max} - T_1) + \frac{\sigma^{(w)}}{E} - \nu \frac{\sigma^{(w)}}{E} \quad (4.27 \text{ f})$$

$\varepsilon_z$  ist hier belanglos, weil in z-Richtung freie Ausdehnung erfolgen kann. Analog ergibt sich für die kältere Unterseite:

$$\varepsilon_x^{(k)} = \sum_i \varepsilon_{x_i}^{(k)} = \varepsilon_y^{(k)} = \sum_i \varepsilon_{y_i}^{(k)} = \alpha_\ell (T_{\min} - T_1) + \frac{\sigma^{(k)}}{E} - \nu \frac{\sigma^{(k)}}{E} \quad (4.27 \text{ g})$$

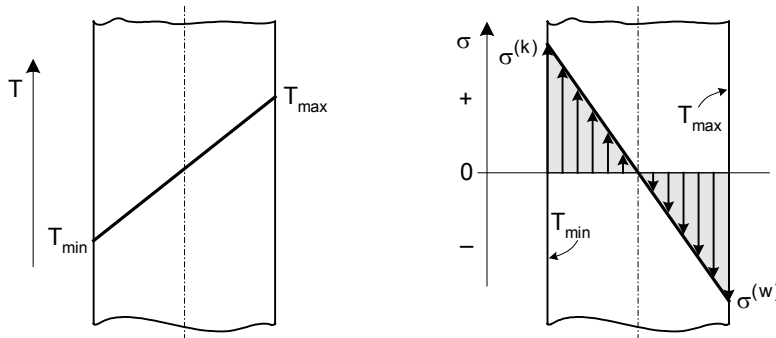
Aufgrund der Verformungskompatibilität müssen die Verformungen in den jeweiligen Richtungen auf der warmen und kalten Seite gleich sein. Man nimmt vereinfachend an, dass der E-Modul in dem Intervall  $\Delta T$  über der Wand konstant sein möge, d.h. es gilt:

$$-\sigma^{(w)} = \sigma^{(k)} \quad (4.28 \text{ a})$$

**Bild 4.12** zeigt den Temperatur- und Spannungsverlauf über der Bauteilwand unter den in der Bildunterschrift genannten Voraussetzungen.

Die Ober- und Unterseite verformen sich in der Summe auf denselben Wert, d.h. es gilt die Verformungsrandbedingung:

$$\varepsilon_x^{(w)} = \varepsilon_y^{(w)} = \varepsilon_x^{(k)} = \varepsilon_y^{(k)} \quad (4.28 \text{ b})$$



**Bild 4.12** Verlauf der Temperatur und Spannung über der Wand bei einem Temperaturgefälle

Annahmen: rein elastische Verformungen; Wärmeleitfähigkeit und E-Modul im betrachteten Temperaturintervall konstant

Man setzt folglich Gl. (4.27 f) und (4.27g) gleich und berücksichtigt Gl. (4.28 a), um die Wärmespannungen auf der Ober- und Unterseite der Platte zu erhalten:

$$\sigma^{(k)} = -\sigma^{(w)} = \frac{E \cdot \alpha_{\ell} (T_{\max} - T_{\min})}{2(1-\nu)} \quad (4.29)$$

Eine Festigkeitsberechnung mit diesen Wärmespannungen kann noch nicht vorgenommen werden, weil Spannungen in zwei Achsen senkrecht zueinander wirken – ähnlich wie im Fall der mehrachsigen belasteten Druckbehälter (Kap. 4.7). Aus dem Zugversuch sind nur Festigkeitskennwerte für einachsige Belastung bekannt. Wie Mehrachsigkeit in den Festigkeitsauslegungen berücksichtigt wird, ist Gegenstand von Kap. 13.

In *dünnwandigen* Bauteilen bauen sich geringere Wärmespannungen auf als in dickwandigen wegen des reduzierten Temperaturgefälles über der Wand (Prinzip „Teeglas“). Selbstverständlich muss die Wanddicke ausreichend bemessen werden, um die Primärspannungen, z.B. durch einen Innendruck bei Rohrleitungen oder Behältern, zu ertragen. Auch eine *gleichmäßige Wanddickenverteilung* verringert die Wärmespannungen an Übergängen.

### 4.8.3 Wärmespannungen in Verbundwerkstoffen und Werkstoffverbunden

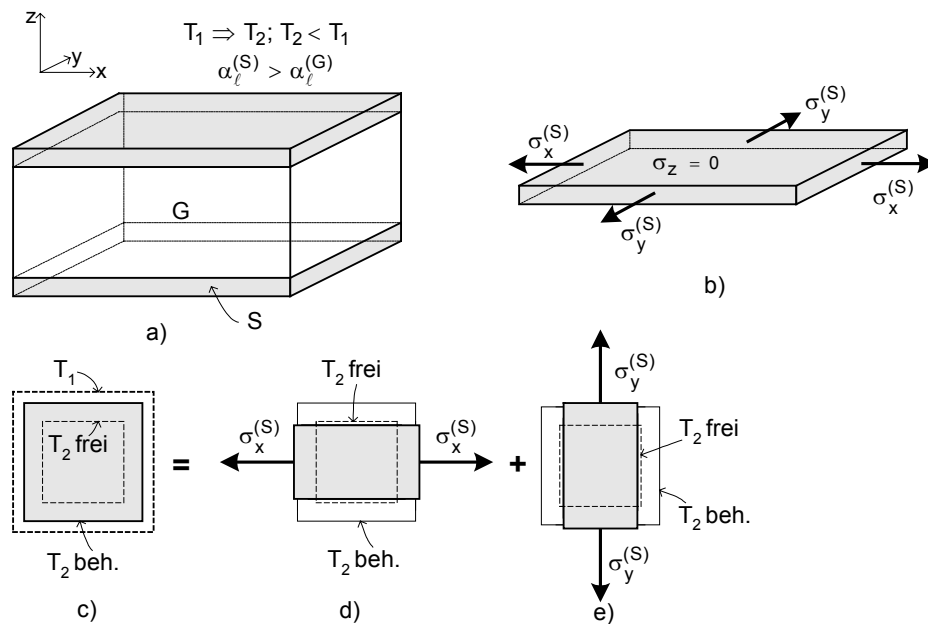
In Verbundwerkstoffen und Werkstoffverbunden kommt es zu Wärmespannungen aufgrund unterschiedlicher thermischer Ausdehnung der beteiligten Stoffe.

**Bild 4.13** zeigt das Beispiel der Abkühlung einer beschichteten Platte, d.h. eines Werkstoffverbundes, wobei die thermische Ausdehnung der Beschichtung stärker als die des Grundwerkstoffes sein soll:  $\alpha_{\ell}^{(S)} > \alpha_{\ell}^{(G)}$  (S: Beschichtung, G: Grundwerkstoff). Um Biegung auszuschließen, soll es sich um eine beidseitig beschichtete Platte handeln. Bei der Starttemperatur  $T_1$  (hier die hohe Tempera-

tur) sei der Verbund frei von Wärmespannungen durch unterschiedliche Wärmedehnung, was immer dann einigermaßen zutrifft, wenn die Schicht bei dieser Temperatur die Spannungen vom vorherigen Zyklus so gut wie vollständig abgebaut (relaxiert) hat.

Die Spannungen in x- und y-Richtung werden gleich groß sein, weil die Wärmeausdehnung und -schrumpfung nach allen Seiten gleich erfolgt:

$$\sigma_x^{(G)} = \sigma_y^{(G)} = \sigma_G \quad \text{und} \quad \sigma_x^{(S)} = \sigma_y^{(S)} = \sigma_S \quad (4.30 \text{ a})$$



**Bild 4.13** Ebener Spannungszustand in einer Beschichtung für den Fall der Abkühlung und mit  $\alpha_\ell^{(S)} > \alpha_\ell^{(G)}$

- Beidseitig beschichtete Platte nach Temperaturänderung (Abkühlung)
- Freigeschnittene Schicht; im dargestellten Fall treten bei der thermischen Verformungsbehinderung gleich große Zugspannungen in der Schicht in x- und y-Richtung auf, in z-Richtung ist die Schrumpfung unbehindert.
- Quadratisches Spannungselement aus der Schichtoberfläche mit den Konturen im Ausgangszustand bei  $T_1$  (gestrichelt), bei gedachter freier Schrumpfung auf  $T_2$  („frei“, gepunktet) sowie nach behinderter Schrumpfung im Verbund mit dem Grundwerkstoff („beh.“, durchgezogen)
- Spannungselement aus der Schichtoberfläche ausschließlich unter der Wirkung der Spannung  $\sigma_x$  mit Querverformung in y-Richtung. Die Konturen für  $T_2$  aus Bild c) sind zur Verdeutlichung mit eingezeichnet.
- Wie d) unter der Wirkung der Spannung  $\sigma_y$  mit Querverformung in x-Richtung

Folgende Randbedingungen ergeben sich:

$$\text{I) Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung: } \sigma_G A_G + 2 \sigma_S \frac{A_S}{2} = 0 \quad (4.30 \text{ b})$$

$$\text{Daraus: } \sigma_S = - \sigma_G \frac{A_G}{A_S} \quad (4.30 \text{ c})$$

Die Flächen  $A_G$  und  $A_S$  sind die jeweiligen Querschnittsflächen in der (x; z)- oder (y; z)-Ebene.

$$\text{II) Verformungskompatibilität: } \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_S = \varepsilon_G \quad (4.30 \text{ d})$$

Analog zu den Wärmespannungsberechnungen unter Fall *b*) werden die Verformungen in den drei Achsen in ihre Einzelkomponenten zerlegt und anschließend summiert:

$$\varepsilon_S = \alpha_\ell^{(S)} \Delta T + \frac{\sigma_S}{E_S} - \nu_S \frac{\sigma_S}{E_S} \quad (4.30 \text{ e})$$

und

$$\varepsilon_G = \alpha_\ell^{(G)} \Delta T + \frac{\sigma_G}{E_G} - \nu_G \frac{\sigma_G}{E_G} \quad (4.30 \text{ f})$$

Durch Gleichsetzen von Gl. (4.30 e) und Gl. (4.30 f) und unter Einfügen von Gl. (4.30 c) erhält man:

$$\sigma_S = \frac{\Delta T E_G (\alpha_\ell^{(G)} - \alpha_\ell^{(S)})}{\frac{E_G}{E_S} (1 - \nu_S) + \frac{A_S}{A_G} (1 - \nu_G)} \quad (4.31 \text{ a})$$

und

$$\sigma_G = \frac{\Delta T E_S (\alpha_\ell^{(S)} - \alpha_\ell^{(G)})}{\frac{E_S}{E_G} (1 - \nu_G) + \frac{A_G}{A_S} (1 - \nu_S)} \quad (4.31 \text{ b})$$

Bei Abkühlung ist  $\Delta T < 0$ , so dass sich für den Fall  $\alpha_\ell^{(S)} > \alpha_\ell^{(G)}$  in der Schicht Zugspannungen (+) und im Grundwerkstoff Druckspannungen (–) einstellen, wie in Bild 4.13 b) für die Schicht gezeigt. Für  $A_G \gg A_S$ , d.h. einer dünnen Schicht auf einer vergleichsweise dicken Bauteilwand, wird  $A_S/A_G \approx 0$ , und Gl. (4.31 a) vereinfacht sich zu:

$$\sigma_S = \frac{\Delta T E_S (\alpha_\ell^{(G)} - \alpha_\ell^{(S)})}{1 - \nu_S} \quad (4.31 \text{ c})$$



Der Nenner von Gl. (4.31 b) wird für diesen Fall groß, so dass  $\sigma_G \approx 0$  gilt. Dieses Ergebnis bedeutet, dass die Schicht *vollständig* die thermische Bewegung des Substrates aufgezungen bekommt und dass umgekehrt auf den Grundwerkstoff so gut wie keine Spannungen durch die Schicht übertragen werden. Dieser Grenzfall trifft bei den meisten Bauteilen ziemlich genau zu. Man stelle sich als Beispiel ein lackiertes Karosserieblech vor, bei dem das Blech praktisch keine Spannungen durch die Lackschicht übertragen bekommt, wohl aber umgekehrt. Die Verformung des Verbundes kann dann einfach aus der thermischen Dehnung des Substrates bestimmt werden:

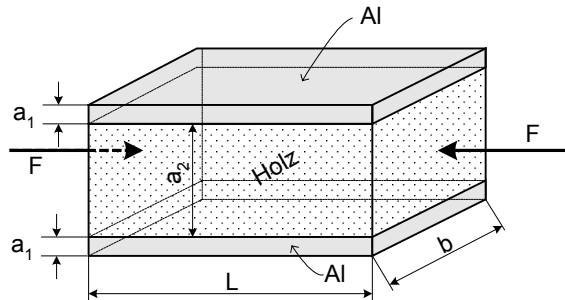
$$\varepsilon_S = \varepsilon_G = \alpha_\ell^{(G)} \Delta T \quad (4.32)$$

Die mit Gl. (4.31 c) errechneten Wärmespannungen stellen Maximalwerte dar; die tatsächlichen Spannungen in der Schicht liegen immer dann tiefer, wenn diese sich plastisch verformt und/oder kriecht und relaxiert.

## Aufgaben zu Kapitel 4

- 4.1 Beschreiben Sie einen Versuch zur experimentellen Ermittlung von E und  $\nu$ . Welche Werte müssen dazu messtechnisch erfasst werden?
- 4.2 An einem 50 m langen Stahlseil eines Großkranes hängt eine Masse von 2000 kg. Welchen Durchmesser muss das Seil mindestens haben, wenn es sich mit einem Sicherheitsbeiwert von 1,5 nicht plastisch verformen darf? Welches Ergebnis kommt heraus, wenn das Seil als masselos betrachtet wird?  
Gegeben:  $R_{p0,2} = 250 \text{ MPa}$ , Werkstoff: Stahl mit  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .  
Lösung:  $d \geq 12,4 \text{ mm}$ ;  $d^* \geq 12,2 \text{ mm}$
- 4.3 An einem 50 m langen Drahtseil hängt eine Last von 5 kN. Das Seil besteht aus 114 Einzeldrähten. Welchen Durchmesser muss jede Ader haben? Das Eigengewicht des Seiles ist zu berücksichtigen.  
Gegeben:  $R_{p0,2} = 250 \text{ MPa}$ ;  $S_F = 1,5$ ; Werkstoff: Stahl mit  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .  
Lösung:  $d \geq 0,59 \text{ mm}$
- 4.4 Ein Drahtseil der Länge L einer Förderanlage besteht aus i Einzeldrähten mit dem Durchmesser d. Welche maximale Nutzlast darf mit der Anlage gefördert werden?  
Gegeben:  $L = 250 \text{ m}$ ;  $i = 150$ ;  $d = 0,8 \text{ mm}$ ;  $\sigma_{zul} = 180 \text{ MPa}$ ; Werkstoff: Stahl mit  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .  
Lösung:  $F_{Nutz} = 12,1 \text{ kN}$
- 4.5 Eine Verbundplatte („Sandwich“) aus Holz und Aluminium wird wie abgebildet seitlich durch starre Platten druckbeansprucht (**Bild 4.14**). Die Werkstoffe sind fest miteinander verbunden, z.B. verklebt. Die Kraft ist zwar als Einzellast eingezeichnet, soll aber auf die Seitenflächen gleichmäßig wirken.
  - a) Welche Spannungen bauen sich im Holz und in den Al-Platten auf?
  - b) Welche Verkürzung erfährt der Verbund?

Gegeben:  $F = -10 \text{ kN}$ ;  $L = 500 \text{ mm}$ ;  $b = 100 \text{ mm}$ ;  $a_1 = 4 \text{ mm}$ ;  $a_2 = 42 \text{ mm}$ ;  
 $E_{\text{Al}} = 76 \text{ GPa}$ ;  $E_{\text{Holz}} = 12 \text{ GPa}$   
 Lösung: a)  $\sigma_{\text{Ho}} = -1,1 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_{\text{Al}} = -6,8 \text{ MPa}$ ; b)  $\Delta L = -0,045 \text{ mm}$



**Bild 4.14** Prinzipskizze einer „Sandwichplatte“ (zu Aufgabe 4.5)

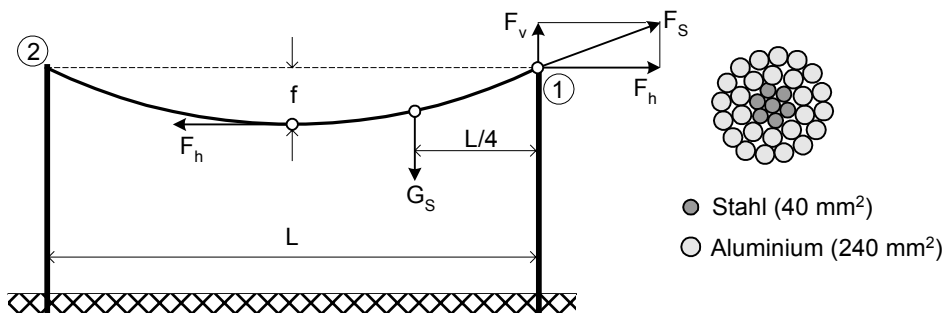
4.6 Ein zylindrischer, keramikbeschichteter Stab aus Stahl wird gezogen.

- a) Wie hoch sind die Spannungen im Stahl und in der Beschichtung?  
 b) Welche Verlängerung und Dehnung stellen sich ein?

Gegeben: Zugkraft  $F = 30 \text{ kN}$ ; Durchmesser des Stabes (Stahl)  $D = 10 \text{ mm}$ ;  
 $L_0 = 100 \text{ mm}$ ; Dicke der Beschichtung  $s = 0,5 \text{ mm}$ ;  $E_{\text{St}} = 210 \text{ GPa}$ ;  $E_{\text{Ker.}} = 380 \text{ GPa}$

Lösung: a)  $\sigma_{\text{St}} = 277 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_{\text{B}} = 501 \text{ MPa}$ ; b)  $\Delta L = 0,132 \text{ mm}$ ;  $\varepsilon = 0,132 \%$

4.7 Eine 110 kV-Hochspannungsfreileitung bestehe aus einem Aluminium/Stahl-Verbundseil mit einem Gesamtquerschnitt aller Al-Adern von  $240 \text{ mm}^2$  und aller Stahl-Adern von  $40 \text{ mm}^2$ , siehe Prinzipskizze **Bild 4.15**. Die Seilzugkraft an den Aufhängungen sei  $F_S$ , die sich als Resultierende aus einer Horizontal- und einer Vertikal-kraft ergibt.



**Bild 4.15** Prinzipskizze einer Freileitung (zu Aufgabe 4.7)

Das rechte Teilbild zeigt im Querschnitt ein Aluminium/Stahl-Verbundseil Al/St 240/40, wie es für Hoch- und Höchstspannungs-Freileitungen verwendet wird.

- a) Bestimmen Sie das spezifische Seilgewicht  $g_s$  (Gewicht pro Länge; nennen Sie die Erdbeschleunigung  $g_E$ , um Verwechslungen zu vermeiden).

- b) Berechnen Sie die horizontale Seilzugkraft  $F_h$ .  
Hinweise: Die Gewichtskraft des *halben* Seiles,  $G_S$ , von der Aufhängung ① bis  $L/2$  wird als Punktlast im Schwerpunkt bei  $L/4$  angenommen ( $f \ll L$ ). Zusätzliche Belastungen (z.B. Vereisung) werden hier nicht angesetzt.
- c) Berechnen Sie die Spannungen, die sich in den Al-Adern und in den Stahl-Adern aufbauen.
- d) Wie ändern sich die Spannungen qualitativ, wenn sich das Seil im Sommer oder bei stärkerer Strombelastung erwärmt?

Gegeben: Spannweite  $L = 250$  m;  $E_{St} = 205$  GPa;  $E_{Al} = 70$  GPa;  $\rho_{St} = 7,8 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>;  $\rho_{Al} = 2,7 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>; Durchhang  $f = 3,8$  m  
Lösung: a)  $g_S = 9,42$  N/m; b)  $F_h = 19,4$  kN; c)  $\sigma_{Al} = 54$  MPa;  $\sigma_{St} = 158$  MPa

- 4.8 Berechnen Sie die Reißlänge eines Stahls mit einer Zugfestigkeit von  $R_m = 350$  MPa und einer Dichte von  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. Wie groß ist die elastische Dehnlänge bei einer Streckgrenze von  $R_e = 220$  MPa? Drücken Sie die Ergebnisse in Worten aus: Wie hat man sich die Verformung und den Bruch über der gesamten Reißstablänge vorzustellen?  
Lösung:  $L_m = 4,574$  km;  $L_e = 2,875$  km
- 4.9 Ein zylindrischer Stab wird mit einer Zugkraft von 85 kN belastet.  
Gegeben:  $L_0 = 3$  m;  $D_0 = 30$  mm; Werkstoff: Al mit  $E = 70$  GPa und  $\nu = 0,3$   
Gesucht:  $\sigma$ ;  $\varepsilon$ ;  $\Delta L$ ;  $\varepsilon_q$ ;  $\Delta D$ ;  $\Delta V$   
Lösung:  $\sigma = 120$  MPa;  $\varepsilon = 0,17$  %;  $\Delta L = 5,15$  mm;  $\varepsilon_q = -0,05$  %;  $\Delta D = -0,015$  mm;  $\Delta V = 1442$  mm<sup>3</sup> =  $1,442$  cm<sup>3</sup>
- 4.10 Diskutieren Sie, was der Sinn von Spannbeton ist. Welche Gefahr bestünde, wenn man keine Stahlseile einzöge (siehe auch Aufgabe 10.1)? Demgegenüber werden die Staumauern von Talsperren in der Regel ohne Stahlarmierung gebaut (weder Stahlbeton noch Spannbeton). Warum funktioniert dies?



Bild 4.16

Spannbetonbrücke  
(hier: Brücke über die Ilmenau bei Uelzen)

- 4.11 Stellen Sie für einen rotierenden Stab mit konstantem Querschnitt  $A$ , der Länge  $L$ , der Dichte  $\rho$  sowie der Drehzahl  $n$  die Funktion für den Spannungsverlauf über der Stablänge auf. Der Stab sei an einem Ende im Drehmittelpunkt verankert; die Ab-

standskoordinate vom Mittelpunkt sei  $r$ . Zeichnen Sie die Funktion auf Millimeterpapier; Maßstäbe:  $\sigma_{\max} \hat{=} 10 \text{ cm}$ ;  $L \hat{=} 15 \text{ cm}$ .

Lösung:  $\sigma(r) = 0,5 \rho \omega^2 (L^2 - r^2)$

4.12 Ein zylindrischer Stahlstab rotiert um die Einspannstelle mit der Drehzahl  $n$ .

- Wie groß ist die Spannung im Stab an der Lagerstelle?
- Der Spannungsverlauf über der Stabachse  $\sigma = f(r)$  ist zu berechnen und zu zeichnen; Maßstäbe:  $1 \text{ MPa} \hat{=} 1 \text{ mm}$ ;  $1 \text{ mm Länge} \hat{=} 1 \text{ mm Zeichnung}$ .

Gegeben:  $L = 200 \text{ mm}$ ;  $n = 10.000 \text{ min}^{-1}$ ;  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

Lösung: a)  $\sigma_{\max} = 171,1 \text{ MPa}$

4.13 Eine dünnwandige Zentrifuge aus Al dreht sich ohne Inhalt.

- Welche maximale Drehzahl  $n_{\max}$  ist durch die Eigengewichtbelastung erlaubt?
- Wie groß ist die Durchmesserzunahme bei  $n_{\max}$ ?

Gegeben:  $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$ ;  $D = 500 \text{ mm}$ ;  $\sigma_{\text{zul}} = 150 \text{ MPa}$ ;  $E = 70 \text{ GPa}$

Lösung: a)  $n_{\max} = 150 \text{ s}^{-1} = 9000 \text{ min}^{-1}$ ; b)  $\Delta D = 1,07 \text{ mm}$

4.14 Ein runder Vollstab wird aufgeheizt.

- Der Stab wird um  $1,5 \text{ mm}$  länger. Wie groß ist  $\Delta T$ ?
- Welche Druckkraft macht die thermische Verlängerung wieder rückgängig (rein elastisch)?
- Welche Spannung ist dann im Material vorhanden?

Gegeben:  $L_0 = 700 \text{ mm}$ ;  $D = 20 \text{ mm}$ ;  $E = 210 \text{ GPa}$ ;  $\alpha_{\ell} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  (Stahl)

Lösung: a)  $\Delta T = +178,6 \text{ K}$ ; b)  $F = -141,4 \text{ kN}$ ; c)  $\sigma = -450 \text{ MPa}$

4.15 Wie groß sind die sich pro K einstellenden thermisch induzierten Spannungen bei einem völlig dehnungsbehinderten Bauteil aus einer Al-Legierung mit  $E = 70 \text{ GPa}$  und  $\alpha_{\ell} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ? Ab welcher Temperaturdifferenz würde sich der Werkstoff mit einer (als temperaturunabhängig angenommenen) Streck- und Quetschgrenze von  $180 \text{ MPa}$  plastisch verformen?

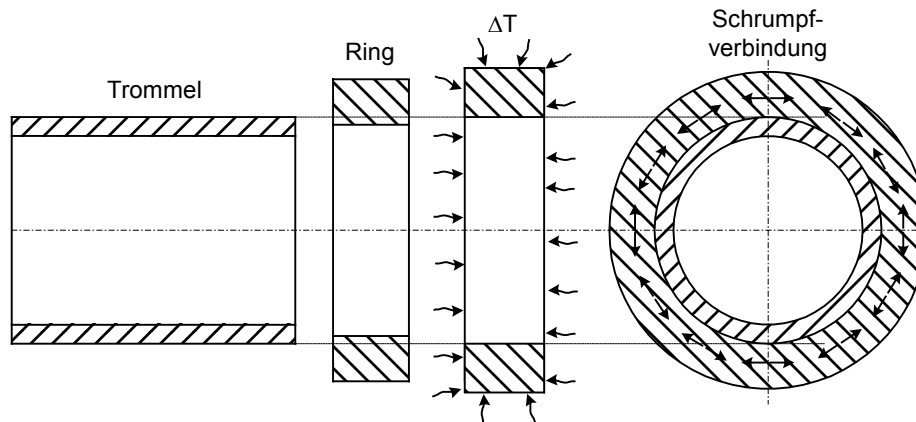
Lösung:  $\sigma_{\text{th}}/\Delta T = -1,4 \text{ MPa/K}$ ;  $\Delta T = 129 \text{ K}$

4.16 Ein Stahlring mit einem Durchmesser von  $849,2 \text{ mm}$  soll auf eine Trommel von  $850 \text{ mm}$  Durchmesser geschumpft werden, **Bild 4.17**.

- Um welche Temperatur muss der Ring mindestens erwärmt werden, um ihn kraftfrei auflegen zu können?
- Welche Spannung herrscht in dem Ring nach dem Erkalten und welche mechanische Dehnung hat er erfahren?
- Bei welcher Drehzahl würde sich der Ring ablösen, wenn die Welle-Nabe-Verbindung rotiert. Die Trommel wird als starr angenommen.

Gegeben:  $\alpha_{\ell} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ;  $E = 210 \text{ GPa}$ ;  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

Lösung: a)  $\Delta T = +78,5 \text{ K}$ ; b)  $\sigma_{\text{th}} = +198 \text{ MPa}$ ;  $\varepsilon = 0,094 \%$ ; c)  $n = 60 \text{ s}^{-1}$



**Bild 4.17** Schrupfverbindung von Trommel und Ring

Rechts ist der Querschnitt der Schrupfverbindung angedeutet mit den umlaufenden Zugspannungspfeilen im Ring. Die Druckspannungen in der Trommel sind nicht gezeigt, ebenso bleiben die zusätzlich auftretenden Radialspannungen unberücksichtigt. Siehe dazu Aufgabe 11.15.

- 4.17 Eisenbahnschienen werden im Sommer bei  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  spannungsfrei verlegt. Bestimmen Sie die im Winter bei  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$  auftretenden Spannungen unter der Annahme, dass die Schienen keine Längenänderung erfahren können.  
Gegeben:  $E = 210\text{ GPa}$ ,  $\alpha_{\ell} = 12 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ .

Lösung:  $\sigma_{\text{th}} = +126\text{ MPa}$

- 4.18 Ein plattenförmiger Hitzeschild wird einseitig erwärmt und erreicht stationär eine Oberflächentemperatur von  $700\text{ }^{\circ}\text{C}$  auf der heißen Seite. Auf der anderen, nicht künstlich gekühlten Seite stellt sich eine Temperatur von  $350\text{ }^{\circ}\text{C}$  ein. Berechnen Sie die Spannungen an der heißen und kalten Oberfläche unter der Annahme, dass die Verformung rein elastisch erfolgt.  
Gegeben:  $E = 170\text{ GPa}$  (als konstant in diesem Temperaturbereich angenommen);  $\nu = 0,3$  und  $\alpha_{\ell} = 16 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ .

Diskutieren Sie, auch wenn für eine gesamtheitliche Betrachtung noch viele Kenntnisse fehlen, was in Wirklichkeit bei diesen Temperaturen geschehen wird (Werkstoff: hitzebeständiger Stahl).

Lösung:  $\sigma^{(k)} = +680\text{ MPa}$ ;  $\sigma^{(w)} = -680\text{ MPa}$

- 4.19 Veranschaulichen Sie sich das thermische „Atmen“ des Zylinderkopfes eines Motors. Was geschieht, wenn der Motor oft im kalten Zustand gestartet und schnell hoch belastet wird? Wodurch kann eine Zylinderkopfdichtung undicht werden? Diskutieren Sie in diesem Zusammenhang den Sinn des Warmfahrens.
- 4.20 Leiten Sie die Gleichungen für die Spannungen in einem dünnwandigen kugelförmigen Druckbehälter her. Vergleichen Sie die Belastung mit einem zylindrischen Behälter bei gleichem Innendruck.  
Lösung:  $\sigma_t = p R / (2 s)$ ;  $\sigma_{r \text{ min}} = -p$

- 4.21 Vergegenwärtigen Sie sich die an einem U-Boot wirkenden Spannungen an der Außen- und Innenoberfläche.
- 4.22 Erläutern Sie, warum Tauchglocken für große Meerestiefen bevorzugt kugelförmig gebaut werden.
- 4.23 Das erste Passagierflugzeug mit Turbinenantrieb, die Comet aus den 50er Jahren, hatte einen Zellendurchmesser von 3,7 m. Die verwendete Al-Legierung besaß eine Mindeststreckgrenze von 325 MPa und die Bleche waren 0,91 mm dick. Die Zelle wurde zu Testzwecken mit einem Überdruck von 0,57 bar belastet, um die Druckdifferenz in großer Reishöhe zu simulieren.  
Berechnen Sie die dabei auftretenden Spannungen, unter der Annahme, dass alle versteifenden Wirkungen durch die Innenkonstruktion vernachlässigt werden.  
Lösung:  $\sigma_t = 115,9 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_a = 57,9 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_r = -0,06 \text{ MPa}$
- 4.24 Erklären Sie, warum eine Heißwurst *längs* aufplatzt, wenn sie zu lange in kochendem Wasser liegt. ☺
- 4.25 Begründen Sie, warum Sie mit den vorhandenen Kenntnissen noch keine Festigkeitsauslegung für Maschinenelemente und Bauteile vornehmen können, bei denen Spannungen in mehreren, senkrecht zueinander liegenden Richtungen wirken (z.B. bei einem Druckbehälter oder bei Wärmespannungen in einer Ebene).