Kapitel 8:Folgen

Unendliche Zahlenfolgen
Unendliche Zahlenfolgen mit unendlich vielen Folgengliedern gibt man mit $\langle \mathbf{a_1};\ \mathbf{a_2};\ \mathbf{a_3};\ \ldots \rangle$ oder $(\mathbf{a_1};\ \mathbf{a_2};\ \mathbf{a_3}; \ldots)$ an. **Endliche Zahlenfolgen** mit endlich vielen Folgengliedern werden in der Form $\langle \mathbf{a_1};\ \mathbf{a_2};\ \mathbf{a_3};\ \ldots ; \mathbf{a_n} \rangle$ oder $(\mathbf{a_1};\ \mathbf{a_2};\ \mathbf{a_3}; \ldots ;\ \mathbf{a_n})$ angeführt.

Beispiel:
Für Zahlenfolgen ohne Bildungsgesetz gibt es häufig mehrere Möglichkeiten, die gegebene Folge fortzuführen. Möchte man die Folge $\langle 2; 3; 5; \ldots \rangle$ fortsetzen, so ergeben sich die folgenden Fortsetzungsmöglichkeiten:

- $\langle 2; 3; 5;\ 7;\ 11;\ 13; 17;\ 19; \ldots \rangle \Rightarrow$ Folge der Primzahlen,
- $\langle 2; 3; 5;\ 7; 8;\ 12; 17;\ 23; \ldots \rangle \Rightarrow$ Folge, bei der das nächste Folgenglied um +1; +2; +3; +4; … vergrößert wird
- $\langle 2; 3; 5;\ 2; 3;\ 5; 2;\ 3; 5; \ldots \rangle \Rightarrow$ Folge, deren Folgenglieder sich immer von vorne wiederholen.

Explizite Darstellung von Zahlenfolgen
Bei der **explizite Darstellung** von Zahlenfolgen (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$ wird ein Term für das n-te Folgenglied angegeben. In der expliziten Schreibweise können die einzelnen Folgenglieder a_n für n = 1,2,3, … berechnet werden.

Beispiel:
Berechne die ersten fünf Folgenglieder a_1 bis a_5 der Zahlenfolge $a_n = 2n^2 - 4$ mit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\langle -2;\ 4;\ 14;\ 28;\ 46 \rangle$

Graphische Darstellung von Zahlenfolgen
Die **graphische Darstellung** bildet die Glieder einer Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ als Punkte auf einer Zahlengeraden ab.
Eine weitere Möglichkeit zur graphischen Darstellung einer Zahlenfolgen $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ ist das Abbilden der Punkte $P_n = (\, n \mid a_n \,)$ in einem Koordinatensystem.

Beispiel:
Stelle die Zahlenfolge $a_n = \frac{n}{2} - 1$ für n=1, 2, 3, 4, 5, 6 auf einer Zahlengeraden dar.

$a_1 = -0{,}5;\ a_2 = 0;\ a_3 = 0{,}5;\ a_4 = 1;\ a_5 = 1{,}5;\ a_6 = 2$

Rekursive Darstellung von Zahlenfolgen
Bei der **rekursiven Darstellung** einer Zahlenfolge können die Folgenglieder aus einem gegebenen Folgenglied und einem Bildungsgesetz bestimmt werden. Man gibt den Anfangswert a_1 und die sogenannte Rekursionsgleichung a_{n+1} an. Die restlichen Folgenglieder können berechnet werden.

Beispiel:

a) Gib die ersten vier Glieder a_1 bis a_4 der Folge $a_{n+1} = 2a_n - 2 \cdot n$ mit $a_1 = 4$ an.
Für n = 1: $a_{1+1} = a_2 = 2a_1 - 2 \cdot 1 = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 6$,
n = 2: $a_{2+1} = a_3 = 2a_2 - 2 \cdot 2 = 2 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 8$,
n = 3: $a_{3+1} = a_4 = 2a_2 - 2 \cdot 3 = 2 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 10$.

b) Gib die rekursive Darstellung der Folge $a_n = 5n + 2$ an.
Ersetze n mit n+1 und berechne.
Rekursionsformel: $a_{n+1} = 5 \cdot (n+1) + 2 = 5n + 2 = 5n + 2 + 5 = a_n + 5$
Startwert: $a_1 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$

c) Gib die rekursive Darstellung der Zahlenfolge $\langle 3; 6; 9; 12; 15; \ldots \rangle$ an.
$a_1 = 3$
$a_2 = a_{1+1} = 3 + a_1 = 3 + 3 = 6$
$a_3 = a_{2+1} = 3 + a_2 = 3 + 6 = 9$
$a_4 = a_{3+1} = 3 + a_3 = 3 + 9 = 12$
$a_5 = a_{4+1} = 3 + a_4 = 3 + 12 = 15$
Rekursionsformel: $a_{n+1} = 3 + a_n$; Startwert: $a_1 = 3$

E. DORNER westermann wien

Monotonie von Folgen
Eine Folge $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ mit der Eigenschaft

- $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ heißt **streng monoton wachsend** (bzw. streng monoton steigend).
- $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ heißt **monoton wachsend** (bzw. monoton steigend).
- $a_n = a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ heißt **konstant**.
- $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ heißt **monoton fallend**.
- $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ heißt **streng monoton fallend**.
- Wenn die Vorzeichen der Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind, so ist die Folge **alternierend**.
- Wenn die Folge weder fallend noch steigend ist, so ist die Folge **nicht monoton**.

Beispiel:
Ermittle die ersten fünf Glieder a_1 bis a_5 der Folge $a_n = \frac{n+3}{n}$. Wie entwickeln sich die einzelnen Folgenglieder? Bestimme das Monotonieverhalten der Folge.

$a_1 = \frac{1+3}{1} = 4$ $\quad a_2 = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$ $\quad a_3 = \frac{3+3}{3} = 2$ $\quad a_4 = \frac{4+3}{4} = 1{,}75$ $\quad a_5 = \frac{5+3}{5} = 1{,}6$

Vermutung:
Für die ersten fünf Glieder gilt: $a_n > a_{n+1}$, deswegen kann man vermuten, dass die Folge streng monoton fallend ist.
Monotonieverhalten:
Aufgrund der Vermutung beginnt man mit der Eigenschaft einer streng monoton fallenden Folge:

$a_n > a_{n+1}$ — Term von a_n und a_{n+1} einsetzen

$\frac{n+3}{n} > \frac{(n+1)+3}{n+1}$ — multiplizieren mit $n \cdot (n+1)$

$(n+3) \cdot (n+1) > (n+4) \cdot n$ — Klammern ausmultiplizieren

$n^2 + 4n + 3 > n^2 + 4n$ — $/ - n^2$
$4n + 3 > 4n$ — $/ - 4n$
$3 > 0$

Die Ungleichung ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$ wahr. Damit wurde gezeigt, dass die Folge streng monoton fallend ist.

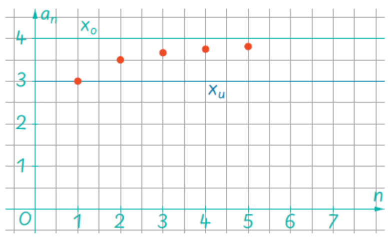
Beschränktheit von Folgen

- Die reelle Zahl X_0 heißt obere Schranke der Folge $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$, wenn für alle Folgenglieder gilt: $X_0 \geq a_n$.
  Die kleinste obere Schranke einer Folge wird als Supremum bezeichnet.
- Die reelle Zahl X_u heißt untere Schranke der Folge $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$, wenn für alle Folgenglieder gilt: $X_u \leq a_n$.
  Die größte untere Schranke einer Folge wird als Infimum bezeichnet.
- Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt beschränkt, wenn sie eine obere und eine untere Schranke besitzt.

Beispiel:
Ermittle die ersten fünf Glieder der Folge $a_n = \frac{4n-1}{n}$ und stelle die Folgenglieder in einem Koordinatensystem dar. Überprüfe die Beschränktheit der Folge und bestimme gegebenenfalls die kleinste obere bzw. die größte untere Schranke.

$a_1 = \frac{4 \cdot 1 - 1}{1} = 3$ $\quad a_2 = \frac{4 \cdot 2 - 1}{2} = 3{,}5$ $\quad a_3 = \frac{4 \cdot 3 - 1}{3} = 3{,}\dot{6}$ $\quad a_4 = \frac{4 \cdot 4 - 1}{4} = 3{,}75$ $\quad a_5 = \frac{4 \cdot 5 - 1}{5} = 3{,}8$

Vermutung: Die ersten fünf Folgenglieder liegen im Intervall [3;4]. In der Abbildung kann man erkennen, dass die ersten fünf Glieder den Wert 3 nicht unterschreiten und den Wert 4 nicht überschreiten.
Für die größte untere Schranke ist $X_u = 3$ und für die kleinste obere Schranke ist $X_o = 4$ zu untersuchen.



Behauptung: Größte untere Schranke ist $X_u = 3$.
Beweis: Allgemein gilt: $X_u \leq a_n$. Setze für $X_u = 3$ und für $a_n = \frac{4n-1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ ein:

$3 \le \frac{4n-1}{n} \quad |\cdot n$
$3n \le 4n - 1 \quad |-4n$
$-n \le -1 \quad |\cdot(-1)$
$n \ge 1$ Die Ungleichung gilt für alle natürlichen Zahlen größer oder gleich 1. Alle Folgenglieder sind daher größer oder gleich 3.

Behauptung: Kleinste obere Schranke ist $X_o = 4$.
Beweis: Allgemein gilt $X_o \ge a_n$. Setze für $X_o = 4$ und für $a_n = \frac{4n-1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ ein:
$4 \ge \frac{4n-1}{n} \quad |\cdot n$
$4n \ge 4n-1 \quad |-4n$
$0 \ge -1$ Die Ungleichung ist wahr. Daher sind alle Folgenglieder kleiner oder gleich als 4.

Grenzwert von Folgen
Die Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert besitzt.
Die Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **divergent**, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.
Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist eine **Nullfolge**, wenn sie den Grenzwert O besitzt (d.h., sie konvergiert gegen 0).

Für die ε-Umgebung einer Zahl a gibt man das offene Intervall $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ an.
Die Zahl **a** ist **Grenzwert** (= Limes) der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn zu jeder beliebig kleinen Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ ein Folgenglied mit dem Index $n_\varepsilon \in \langle a_n \rangle$ mit ne $\mathbb{N}^*$ existiert, sodass für alle $n \ge n_\varepsilon$ gilt: $\mathbf{|a_n - a| < \varepsilon}$.

Man schreibt:	Man sagt:
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$	„Limes (= Grenzwert) von a_n für n gegen unendlich ist a"
kurz: $a_n \to a$	„a_n geht gegen a."

Es lassen sich folgende Eigenschaften über Folgen formulieren:
Jede konvergente Folge ist beschränkt. jedoch muss eine beschränkte Folge nicht konvergieren.
Beispiel:
Die Folge $a_n = 2\cdot(-1)^n = -2;\ 2;\ -2;\ 2;\ -2;\ \ldots$ beschränkt ($X_u = -2$ und $X_o = 2$), hat aber keinen Grenzwert.

Eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge ist konvergent.
Beispiel:
Die Folge $a_n = \frac{-2n+1}{n+1}$ ist streng monoton fallend, besitzt die größte untere Schranke $X_u = -2$ und den Grenzwert $a = -2$.

Eine monoton steigende und nach oben beschränkte Zahlenfolge ist konvergent.
Beispiel:
Die Folge $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ ist streng monoton steigend, besitzt die kleinste obere Schranke $X_o = 2$ und den Grenzwert $a = 2$.

Beispiel:
Ermittle den Folgenindex n_ε ab dem alle weiteren Folgenglieder der Folge $a_n = \frac{32n}{4n+3}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ in der ε-Umgebung mit $\varepsilon = 0{,}001$ um den Grenzwert $a = 8$ liegen.

Setze in die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ die gegebenen Werte ein:

$\left\lvert\frac{32n}{4n+3} - 8\right\rvert < 0{,}001$	bringe den Bruch auf einen gemeinsamen Nenner
$\left\lvert\frac{32n-8\cdot(4n+3)}{4n+3}\right\rvert < 0{,}001$	vereinfache
$\frac{-24}{4n+3} < 0{,}001$	lasse die Betragsstriche weg; der positive Ausdruck wird angeschrieben
$24 < 0{,}004n + 0{,}003$	/– 0,003
$23{,}997 < 0{,}004\,n$	/:0,004
$n > 5999{,}25$	

Ab dem 6000. Folgenglied ist der Abstand zwischen $a = 8$ und allen weiteren Folgengliedern kleiner als 0,001.

Berechne den Grenzwert a der gegebenen Folge $\langle a_n \rangle$.

a) $a_n = \frac{16n^3+3n}{5-4n^3}$

Hebe die höchste vorkommende Potenz n^3 im Zähler und im Nenner heraus und kürze.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \left(16 + \frac{3}{n^2}\right)}{n^3 \cdot \left(\frac{5}{n^3} - 4\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{16 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n^3} - 4} = \frac{16}{-4} = -4 \Rightarrow a = -4$$

Aufgrund der Grenzwertsätze (ohne Beweis) folgt, dass $\frac{3}{n^2}$ und $\frac{5}{n^3}$ für große n gegen null konvergieren, d.h., die Folge a_n konvergiert für $n \to +\infty$ gegen -4.

b) $a_n = \frac{7n^4+1}{n^3}$

Hebe die höchste vorkommende Potenz n^4 im Zähler und n^3 im Nenner heraus und kürze.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 \cdot \left(7 + \frac{1}{n^4}\right)}{n^3 \cdot 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{7 + \frac{1}{n^4}}{1} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(7 + \frac{1}{n^4}\right) = +\infty$$

Aufgrund der Grenzwertsätze (ohne Beweis) folgt, dass die Folge für große n gegen $+\infty$ strebt, d.h., es existiert kein Grenzwert, die Folge ist divergent.

Nullfolgen

Die **Nullfolgen**, also Folgen mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, spielen bei der Berechnung des Grenzwertes eine wichtige Rolle.

Die Folge $\langle an \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist wichtig und wird häufig verwendet. Allgemein lasst sich eine Gesetzmäßigkeit formulieren: **Ist die größte vorkommende Potenz im Nenner größer als die im Zähler, dann liegt eine Nullfolge vor.**

Beispiel für Nullfolgen:

Beispiel: $a_n = \frac{2}{n^4+5}$ oder $a_n = \frac{2n+1}{n^4}$

Folgen in der Form $a_n = r \cdot s^n$ für $r \in \mathbb{R}$ und $-1 < s < 1$ sind Nullfolgen.

Beispiel: $a_n = -5 \cdot 0{,}8^n$

Arithmetische Folgen

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$ heißt **arithmetische Folge**, wenn die Differenz k zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist, in Formeln ausgedrückt: $\mathbf{a_{n+1} - a_n = k}$.

Die arithmetische Folge wird für $k, d \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{a_n = k - n + d}$ angegeben.

Jedes Folgenglied a, mit $n \geq 1$ ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel seines vorhergehenden und nachfolgenden Gliedes, man schreibt: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$

Explizite Termdarstellung: $a_n = k \cdot n + a_0$ **Rekursive Darstellung**: $a_{n+1} = a_n + k$; $a_0 = d$

Eine arithmetische Folge mit $k = 0$ und $a_0 = d$ ist eine **konstante Folge**.

Eine arithmetische Folge mit $k > 0$ ist **streng monoton steigend**.

Eine arithmetische Folge mit $k < 0$ ist **streng monoton fallend**.

Beispiel:

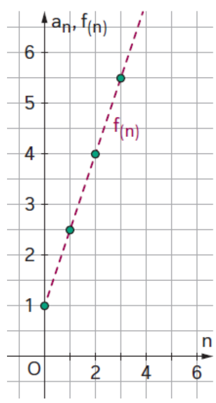
Die graphische Darstellung einer arithmetischen Folge im Koordinatensystem ermöglicht das Auffassen der Zahlenfolge als lineare Funktion f(n).

Dabei gibt man statt $a_n = k \cdot n + a_0$ die auf $\mathbb{N}$ definierte lineare Funktion mit $f(n) = k \cdot n + d$ an. Die angegebenen Eigenschaften einer arithmetischen Folge ergeben sich aus den Eigenschaften einer linearen Funktion.

Arithmetische Folge mit $a_n = 1{,}5\,n + 1$.

Lineare Funktion mit $f(n) = 1{,}5\,n + 1$.

Die im Koordinatensystem als Punkte $P = (n \mid a_n)$ dargestellten Folgenglieder liegen entlang der Funktionsgeraden f(n). Es gilt: $a_0 = d$.



Beschränktheit von arithmetischen Folgen
Die arithmetische Folge $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ mit dem Folgenterm $a_n = k \cdot n + a_0$ ist
- **divergent**, wenn $k \neq 0$ ist,

für $k < 0$ **nach oben beschränkt** und nach unten unbeschränkt,
für $k > 0$ **nach unten beschränkt** und nach oben unbeschränkt und
- **konvergent, nach unten** und **nach oben beschränkt**, wenn $k = 0$ ist.

Beispiel:
Gegeben sind ein Folgenglied und k einer arithmetischen Folge. Stelle eine Formel für a_n auf und formuliere Aussagen über die Monotonie, Konvergenz und Beschränktheit der Folge. Gib, wenn möglich, die untere bzw. obere Schranke an.

$a_2 = 17; k = -1{,}5$
$a_2 = -1{,}5 \cdot 2 + a_0$ eingesetzt: $17 = (-1{,}5) \cdot 2 + a_0 \Rightarrow a_0 = 20$
Formel: $a_n = -1{,}5 \cdot n + 20$
$k \neq 0$ bedeutet, die Folge ist divergent.
$k < 0$ bedeutet, die Folge ist streng monoton fallend und nach oben beschränkt mit $X_0 = a_0 = 20$.

Geometrische Folgen
Eine Folge $\langle a_n \rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$ heißt **geometrische Folge**, wenn der Quotient q zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist, in Formeln ausgedrückt: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
Die geometrische Folge wird für $c, q \in \mathbb{R} / \{0\}$ mit $a_n = c \cdot q^n$ angegeben.

Jedes Folgenglied a_n mit $n \geq 1$ ergibt sich aus dem geometrischen Mittel seines vorhergehenden und nachfolgenden Gliedes, man schreibt: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ (wenn $a_{n-1}, a_{n+1} \in \mathbb{R}^*$).

Explizite Termdarstellung: $a_n = a_0 \cdot q^n$
Rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n \cdot q;\ a_0 = c$

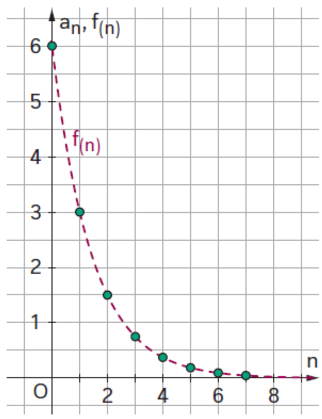
Eine geometrische Folge mit $q = 1$ und $a_0 = c$ ist eine **konstante Folge**.
Eine geometrische Folge mit $c > 0;\ q > 1$ bzw. $c < 0;\ 0 < q < 1$ ist **streng monoton steigend**.
Eine geometrische Folge mit $c > 0;\ 0 < q < 1$ bzw. $c < 0;\ q > 1$ ist **streng monoton fallend**.
Eine geometrische Folge mit $q < 0$ ist **nicht monoton**.

Beispiel:

Die graphische Darstellung einer geometrischen Folge im Koordinatensystem ermöglicht das Auffassen der Zahlenfolge als Exponentialfunktion f(n). Dabei gibt man statt $a_n = a_0 \cdot q^n$ die auf $\mathbb{N}$ definierte Exponentialfunktion mit $f(n) = c \cdot q^n$ an. Die angegebenen Eigenschaften einer geometrischen Folge ergeben sich aus den Eigenschaften einer Exponentialfunktion.

Arithmetische Folge mit $a_n = 6 \cdot 0{,}5^n$
Exponentialfunktion mit $f(n) = 6 \cdot 0{,}5^n$

Die im Koordinatensystem als Punkte $P = (n \mid a_n)$ dargestellten Folgenglieder liegen entlang des Funktionsgraphen f(n).
Es gilt: $a_0 = c$.



Eigenschaften von geometrischen Folgen
Die geometrische Folge $\langle a_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$ mit dem Folgenterm $a_n = a_0 \cdot q^n$ ist
- **divergent**, wenn $q > 1$ oder wenn $q = -1$ ist,
- **konvergent** mit dem **Grenzwert a_0** wenn $q = 1$ ist,
- **konvergent** mit dem **Grenzwert 0**, wenn $|q| < 1$ ist,
- **beschränkt**, wenn $|q| \leq 1$ ist, und **nicht beschränkt**, wenn $|q| > 1$ ist.

Beispiel:

Gegeben sind ein Folgenglied und p einer geometrischen Folge. Stelle eine Formel für a_n auf und formuliere Aussagen über die Monotonie, Konvergenz und Beschränktheit der Folge. Gib, wenn möglich, die untere bzw. obere Schranke und den Grenzwert an.

$a_4 = 0{,}16;\ p = 0{,}2$
$a_4 = a_0 \cdot p^4$ eingesetzt: $0{,}16 = a_0 \cdot 0{,}2^4 \Rightarrow a_0 = 100$
Formel: $a_n = 100 \cdot 0{,}2^n$
$a_0 > 0;\ 0 < p < 1$ bedeutet, die Folge ist streng monoton fallend.
$|p| < 1$ bedeutet, die Folge ist konvergent mit dem Grenzwert $a = 0$.
$|p| \leq 1$ bedeutet, die Folge ist beschränkt mit $X_0 = a_0 = 100$ und $X_u = 0$.