Binomialkoeffizient

Arbeitsblatt

Die Binomialkoeffizienten
Wird ein Binom der Form (a + b) potenziert, so treten die Koeffizienten in den einzelnen Summanden nach einem bestimmten Muster auf. Sie lassen sich aus dem Pascal'schen Dreieck ablesen. Diese Koeffizienten werden als **Binomialkoeffizienten** bezeichnet.

$(a+b)^0 = 1$							1						
$(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b$						1	+	1					
$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot a\cdot b + 1\cdot b^2$					1	+	2	+	1				
$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2 b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3$				1		3	+	3		1			
$(a+b)^4 = \ldots$			1		4	+	6	+	4		1		
$(a+b)^5 = \ldots$		1		5		10		10		5		1	
$(a+b)^6 = \ldots$	1		6		15		20		…		…		…

Um den Binomialkoeffizienten an einer bestimmten Stelle im Pascal'schen Dreieck bzw. an einer bestimmten Stelle im Polynom von $(a + b)^n$ bezeichnen zu können, gibt es eine symbolische Schreibweise.

Definition

Binomialkoeffizienten werden mit dem Symbol $\binom{n}{k}$ beschrieben und „n über k" gesprochen.

$\binom{n}{k}$ ist im Pascal'schen Dreieck in der (n + 1)-ten Zeile und dort an der (k + 1)-ten Stelle zu finden. Beginnt man mit 0 zu zählen, ist es in der n-ten Zeile die k-te Stelle.

n ist der Exponent, mit dem das Binom potenziert wird: $(a + b)^n$.
k bezeichnet die Stelle (den Summanden) des entsprechenden Polynoms, wenn mit 0 zu zählen begonnen wird.
Es gilt $n \geq k$ mit $n, k \in \mathbb{N}$.

Anmerkung:
Sowohl in den Zeilen als auch bei den Stellen des Polynoms wird mit 0 zu zählen begonnen.
Die erste Potenz ist $(a + b)^0$, daher beginnt die Zählung der Zeilen mit n = 0.
Auch bei den Summanden wird mit 0 zu zählen begonnen.

Beispiel:
Wegen $a^0 = 1$ und $b^0 = 1$ gilt

$$(a + b)^{\underset{n=2}{2}} = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = \underbrace{1\cdot a^2\cdot b^0}_{k=0} + \underbrace{2\cdot a^1\cdot b^1}_{k=1} + \underbrace{1\cdot a^0\cdot b^2}_{k=2}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{2}{1} = 2$$

$(a+b)^0 \quad \rightarrow \quad \binom{0}{0}=1$

$(a+b)^1 \quad \rightarrow \quad \binom{1}{0}=1 \quad \binom{1}{1}=1$

$(a+b)^2 \quad \rightarrow \quad \binom{2}{0}=1 \quad \binom{2}{1}=2 \quad \binom{2}{2}=1$

$(a+b)^3 \quad \rightarrow \quad \binom{3}{0}=1 \quad \binom{3}{1}=3 \quad \binom{3}{2}=3 \quad \binom{3}{3}=1$

Beispiel:

$\binom{3}{2}$ beschreibt den Binomialkoeffizienten von $(a + b)^3$, der mit a^1b^2 multipliziert wird: $\binom{3}{2} \cdot a^1b^2 = 3 \cdot a^1b^2$

1 Welche Potenz von (a + b) und welche Stelle wird durch den Binomialkoeffizienten beschrieben? Wie lautet der entsprechende Summand des Polynoms?

a) $\binom{2}{2}$ b) $\binom{4}{0}$ c) $\binom{4}{3}$ d) $\binom{5}{5}$ e) $\binom{6}{1}$ f) $\binom{5}{2}$

In der nachfolgenden Formel zur Berechnung der Binomialkoeffizienten wird eine weitere Definition zur Vereinfachung der Schreibweise benötigt.

Definition

Als **Fakultät** wird für $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ für $n \geq 1$ und $0! = 1$ definiert.

Sie ist das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n. Sprechweise: „n Fakultät“

Satz

Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ wird für $n \geq k$ mit $n, k \in \mathbb{N}$ mit der Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ berechnet.

Beispiel:

$2! = 1 \cdot 2 = 2$ $\quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $\quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = \frac{120}{12} = 10$

Überprüfe den Wert im Pascal’schen Dreieck:
Der Koeffizient an zweiter Stelle des Polynoms von $(a + b)^5$ ist 10, wenn bei 0 zu zählen begonnen wird.
Der entsprechende dritte Summand lautet $10 \cdot a^3 \cdot b^2$.

2 Berechne.

a) 4! b) 6! c) 10! d) 5! e) 3! f) 7!

3 Berechne den Binomialkoeffizienten und gib die entsprechende Potenz des Binoms (a + b) sowie den entsprechenden Summanden an.

a) $\binom{4}{3}$ b) $\binom{6}{2}$ c) $\binom{7}{5}$ d) $\binom{4}{2}$ e) $\binom{6}{3}$ f) $\binom{7}{1}$

4 Finde heraus, mit welcher Tastenkombination dein Taschenrechner die Fakultät berechnet. Gib die höchste Fakultät an, die du mit deinem Taschenrechner exakt berechnen kannst.

Technologietipp: Berechnen von Fakultät und Binomialkoeffizienten

	n! berechnen	$\binom{n}{k}$ berechnen
CAS-TR	n $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{W}}$	kombinat(n,k)
TI-Nspire	n!	nCr(n,k)
Derive	n!	COMB(n,k) und Klick auf $\boxed{=}$
GeoGebra	n!	Binomialkoeffizient[n,k] Tipp: Verwende die Auswahlliste der Befehle.
TK	=FAKULTÄT(n)	KOMBINATIONEN(n;k)

Für die Berechnung von Binomen $(a + b)^n$ kann mithilfe der Binomialkoeffizienten eine Formel angegeben werden.

Binomischer Lehrsatz
Für die Berechnung eines mit $n \in \mathbb{N}$ potenzierten Binoms $(a + b)^n$ gilt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

5 Schreibe den binomischen Lehrsatz für $(a + b)^7$ an und berechne die auftretenden Binomialkoeffizienten.

6 Ergänze deine Formelsammlung.

Aufgaben

7 Führt Recherchen im Internet und/oder in der Schulbibliothek durch und bereitet eine Präsentation vor.
Thema A: Zahlenreihen und Muster im Pascal'schen Dreieck
Thema B: Blaise Pascal (1623 – 1662)

8 Berechne.
a) 8! b) 9! c) 12! d) 20!

9 Berechne.
a) $\binom{7}{2}$ b) $\binom{6}{3}$ c) $\binom{8}{8}$ d) $\binom{10}{1}$ e) $\binom{12}{9}$ f) $\binom{25}{12}$

10 Berechne
a) den 5. Summanden von $(a + b)^{13}$,
b) den 20. Summanden von $(x - y)^{23}$,
c) den 11. Summanden von $(1 + u)^{30}$,
d) den 7. Summanden von $(s - 2)^{14}$.

11 Überprüfe mit selbst gewählten Zahlen für n und k, dass gilt:
(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (3) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ (4) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$