Logarithmische Skalen

Arbeitsblatt

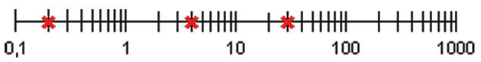
Logarithmische Skalen ermöglichen dir eine übersichtlichere Darstellung von Kurvenverläufen vor allem dann, wenn sie sich über sehr große Zahlenbereiche erstrecken.

1 Berechne die folgenden Logarithmenwerte.
a) $\lg 13{,}5$ b) $\lg 213{,}57$ c) $\lg 0{,}17$ d) $\lg 3845{,}91$

2 Zeichne eine Gerade durch die beiden Punkte $A(3|-1)$ und $B(-2|5)$ und ermittle grafisch und rechnerisch die Steigung der Geraden.

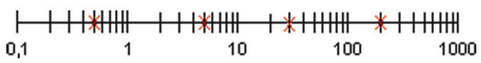
Logarithmische Skalen

In vielen Fällen wird statt einer linearen Skala eine logarithmische Skala verwendet. Diese ist von Vorteil, wenn viele Größenordnungen darzustellen sind. In der gezeigten Skala ist der Bereich von 0,1 bis 1000 erfasst. Sie erstreckt sich also über 4 Größenordnungen.



In dieser logarithmischen Skala sind die Zahlen 0,2; 4 und 30 markiert.
Tabellenkalkulationsprogramme bieten meistens eine logarithmische Unterteilung der x- bzw. y-Achse.

3 Lies ab, welche Zahlen in der logarithmischen Skala markiert sind.

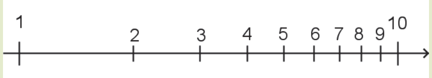


Wie kann man eine logarithmische Skala selbst erstellen?

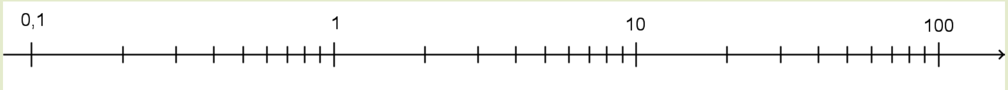
▷ *Beispiel:*
Im Folgenden ist für das Intervall [1; 10] eine logarithmische Skala auf Grundlage des Zehnerlogarithmus mit einer Zeicheneinheit von $\ell = 5$ erklärt.
Die Tabelle hilft dir bei der Erstellung der Skala (Zahlen gerundet auf 2 Dezimalstellen):
In der 1. Zeile sind die Werte x von 1 bis 10 eingetragen.
In der 2. Zeile sind die Werte des Zehnerlogarithmus $\lg x$ berechnet.
In der 3. Zeile werden die Werte des Zehnerlogarithmus $\lg x$ mit der Zeicheneinheit ℓ multipliziert.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = \lg x$	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1
$Y = \ell \cdot \lg x$	0	1,51	2,39	3,01	3,49	3,89	4,23	4,52	4,77	5

Wenn du für das Intervall von 1 bis 10 die Zeicheneinheit $\ell = 5$ aufträgst und die Unterteilung entsprechend aus der obigen Tabelle übernimmst, erhältst du als Ergebnis folgende Skala:



- Logarithmische Skalen können nicht bei 0 beginnen, da der lg 0 (so wie jeder Logarithmus zu einer beliebigen anderen Basis an der Stelle 0) nicht definiert ist.
- Die Teilstriche sind nicht *äquidistant*, sondern die Abstände werden bei größeren Werten immer kleiner.
- Die Skaleneinteilung einer logarithmischen Skala zwischen 1 und 10 deckt sich mit jener von 10 bis 100, von 0,1 bis 1 etc.
- Eine logarithmische Skala mit Hilfslinien, die sich über mehrere Größenordnungen erstreckt, hat folgende Gestalt:

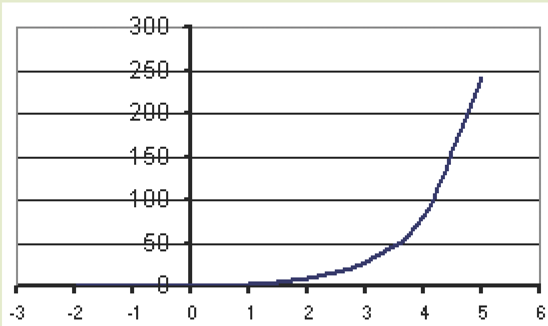


- Es ist egal, ob du zur Erstellung einer logarithmischen Skala den lg, ln oder einen Logarithmus zu einer anderen Basis wählst, da bei der Umrechnung von einem Logarithmus zur Basis a auf einen Logarithmus zur Basis b gemäß ${}^{a}\log x = \frac{{}^{b}\log x}{{}^{b}\log a}$ nur die Konstante ${}^{b}\log a$ zu berücksichtigen ist, und diese durch eine geeignete Wahl der Zeicheneinheit wieder kompensiert wird.

Koordinatensystem mit logarithmischer Ordinate

▹ *Beispiel:*
Wenn du den Graphen der Funktion $f(x) = 3^x$ im Intervall [– 2; 5] zeichnest, stößt du auf das Problem, dass in diesem Diagramm gleichzeitig Funktionswerte im Zehntelbereich als auch im Bereich von einigen Hundert eingezeichnet werden sollen.

x	$f(x) = 3^x$
– 2	0,11
– 1	0,33
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243



Um diese Schwierigkeit in der Darstellung zu beseitigen, gehe folgendermaßen vor:
Wähle als Ordinate (2. Achse) eine logarithmische Skala mit der Zeicheneinheit $\ell = 2\,\text{cm}$.
Zur Berechnung der entsprechenden Skala dient die Tabelle.

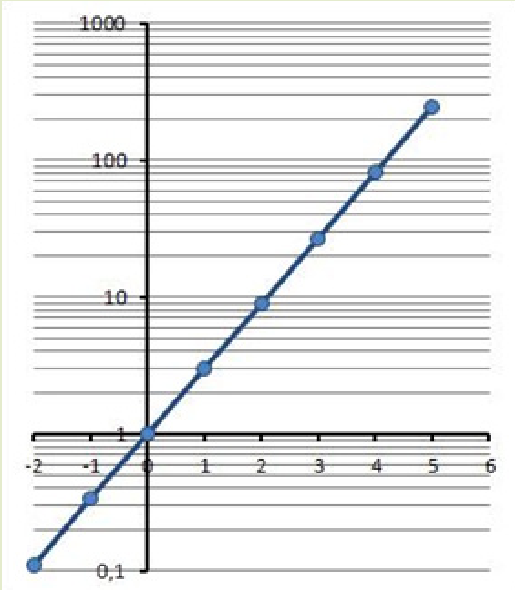
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = \lg x$	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1
$Y = \ell \cdot \lg x$	0	0,60	0,95	1,20	1,40	1,56	1,69	1,81	1,91	2

Zeichne nun die Skalierung für jede Größenordnung, also von 0,1 bis 1, von 1 bis 10 usw., und die entsprechenden Hilfslinien.

Aus der Wertetabelle der Funktion $f(x) = 3^x$ kannst du die Funktionswerte einzeichnen.

Der Graph der Exponentialfunktion ist in Verbindung mit einer logarithmischen Skala eine Gerade.

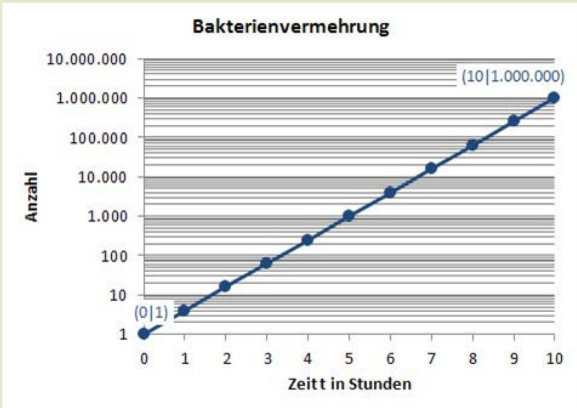
Hinweis: Du kannst auch die Datei www Millimeterpapier öffnen und das Diagramm „Ordinatenlogarithmisches Papier“ ausdrucken, um es als Vorlage zu benutzen.



Satz
Alle Graphen von Exponentialfunktionen der Form $y = c \cdot a^x$ werden auf ordinatenlogarithmischem Papier als Gerade mit der Steigung $k = \lg a$ und dem y-Achsenabschnitt $d = \lg c$ dargestellt.

Beweis: Die Zeicheneinheit wird der Einfachheit halber auf $\ell = 1$ gesetzt.
Auf der Ordinate werden die Logarithmenwerte von y aufgetragen, also $Y = \lg y$.
$Y = \lg y = \lg(c \cdot a^x) = \lg c + x \cdot \lg a$.
Setzt man nun für $\lg c = d$ und für $\lg a = k$, so erhält man die Geradengleichung $Y = k \cdot x + d$.
Aus $\lg a = k$ kannst du erkennen:
Für $a > 1$ ist $\lg a > 0$, damit ist die Steigung k positiv und es handelt sich um eine steigende Gerade.
Für $0 < a < 1$ ist $\lg a < 0$; die Steigung k ist negativ und es handelt sich um eine fallende Gerade.

Beispiel Bakterienvermehrung:
Dem Bericht einer Zeitung (OÖN Tipps, 40. Woche 2003) ist zu entnehmen, dass gegen Antibiotika resistente Keime ein großes Risikopotential in einem Spital darstellen. Mikrobiologische Untersuchungen haben gezeigt, dass sich Bakterien mit großer Geschwindigkeit nahezu exponentiell vermehren. Entnimm dem Diagramm die notwendigen Informationen und gib eine Exponentialfunktion an, die diese Bakterienvermehrung beschreibt.



a) Wie lautet die Funktionsgleichung, wenn die Exponentialfunktion die Form $y = c \cdot a^x$ hat?
b) Wie lautet die Funktionsgleichung, wenn die Exponentialfunktion die Basis 10 haben soll?
c) Wie lauten die Funktionsgleichungen (1) zur Basis 2, (2) zur Basis e?

Lösung:
Es sollen hier mehrere Möglichkeiten zur Bestimmung der Funktionsgleichung vorgestellt werden. Aus dem Diagramm kannst du die Koordinaten der beiden Punkte $(0|1)$ und $(10|1 \cdot 10^6)$ ablesen.

a) Die Funktionsgleichung soll nun in der Form $y = c \cdot a^x$ angegeben werden. Dabei ist die Steigung k gleich lg a, und du kannst die Steigung als Differenzenquotient aus dem Diagramm ablesen.

$$k = \lg a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lg(1 \cdot 10^6) - \lg 1}{10} = \frac{6}{10} \Rightarrow a \approx 3{,}981$$

Der Abschnitt d auf der y-Achse ist 0, deshalb folgt aus $\lg c = 0$, dass $c = 1$ ist.
Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $y = 1 \cdot 3{,}981^x = 3{,}981^x$.

b) Du kannst wiederum die gleiche Vorgangsweise wie in a) wählen, allerdings musst du für den Ansatz $y = c \cdot 10^{b \cdot x}$ einen weiteren noch zu bestimmenden Wert b im Exponenten berücksichtigen, wenn die Basis mit 10 vorgegeben ist.
Durch Logarithmieren von $y = c \cdot 10^{b \cdot x}$ entsteht $Y = \lg y = \lg(c \cdot 10^{b \cdot x}) = \lg c + x \cdot b \cdot \lg 10$.
Du kannst die Steigung (als Koeffizient der Variablen x) berechnen:

$$b \cdot \lg 10 = \frac{\lg(1 \cdot 10^6) - \lg 1}{10} \Rightarrow b = 0{,}6$$

Wie oben folgt aus $\lg c = 0$, dass $c = 1$ ist.
Die gesuchte Funktionsgleichung lautet demnach $y = 10^{0{,}6x}$.

c) (1) Auch hier kannst du wiederum die gleiche Vorgangsweise wie in a) wählen. Mit dem Ansatz $y = c \cdot 2^{b \cdot x}$ kannst du die Steigung analog zu den bisherigen Ausführungen berechnen:

$$b \cdot \lg 2 = \frac{\lg(1 \cdot 10^6) - \lg 1}{10} \Rightarrow b \approx 1{,}993 \text{ und damit folgt } c = 1.$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $y = 2^{1{,}993x}$.

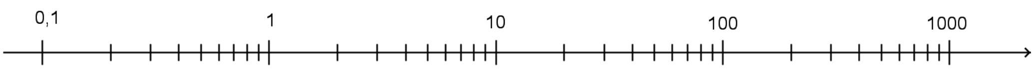
(2) Wenn schließlich als Basis die Zahl e verwendet werden soll, kannst du die Steigung am besten mithilfe des natürlichen Logarithmus ermitteln.

$$\text{Ansatz } y = c \cdot e^{b \cdot x} \Rightarrow b \cdot \ln e = \frac{\ln(1 \cdot 10^6) - \ln 1}{10} \Rightarrow b \approx 1{,}382 \text{ und damit folgt } c = 1.$$

(Mit der Verwendung des lg ergibt sich übrigens derselbe Wert für b. Rechne nach.)
Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $y = e^{1{,}382x}$.

Aufgaben

4 Zeichne die angegebenen Zahlen in einer Skala ein (Einheit $\ell = 3\,cm$).



a) 0,5; 5; 50; 500
b) alle natürlichen Zahlen zwischen 1 und 10
c) 0,3; 0,7; 1,1; 27
d) 60; 120; 250; 600

5 Zeichne mit der angegebenen Zeicheneinheit ℓ eine logarithmische Skala samt Hilfslinien für das gegebene Intervall. Als Hilfe zur Erstellung einer Umrechnungstabelle kann dir das Tabellenkalkulations-Arbeitsblatt www Logarithmische Skalen dienen.

a) [0,01; 10]; $\ell = 3\,cm$
b) [0,1; 1000]; $\ell = 2{,}5\,cm$
c) [100; 10 000]; $\ell = 6\,cm$

6 Öffne die Datei www Millimeterpapier und darin das Diagramm „Ordinatenlogarithmisches Papier“. Passe die Skalierung der Achsen an das jeweilige Beispiel an und drucke das Diagramm aus. Du kannst selbstverständlich auch jedes andere ordinatenlogarithmische (Millimeter-)Papier verwenden.
Zeichne auf diesem Papier die Graphen der folgenden Funktionen im angegebenen Intervall.

a) $y = 2^x$; $[-4; 4]$
b) $y = 10^x$; $[-3; 2]$
c) $y = e^x$; $[0; 4]$
d) $y = 2^{-x}$; $[-3; 4]$
e) $y = 4 \cdot 1{,}5^x$; $[-5; 6]$
f) $y = 3 \cdot e^{-1{,}5 \cdot x}$; $[-2; 3]$

7 Zeichne mit einer Tabellenkalkulation die Graphen der Funktionen in ordinatenlogarithmischer Darstellung.

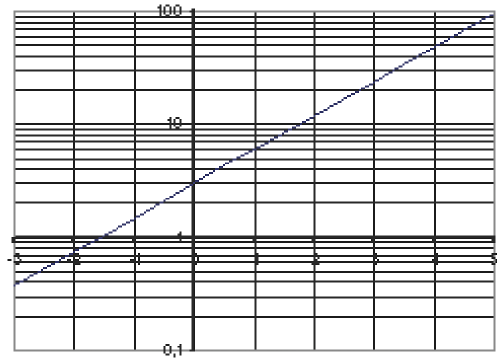
a) $y = 3^x$ im Intervall $[-3; 4]$
b) $y = 2{,}5 \cdot 10^{1{,}2x}$ im Intervall $[-2; 5]$
c) $y = e^{0{,}5x}$ im Intervall $[-5; 5]$
d) $y = 5 \cdot e^{-2{,}7x}$ im Intervall $[-3; 5]$

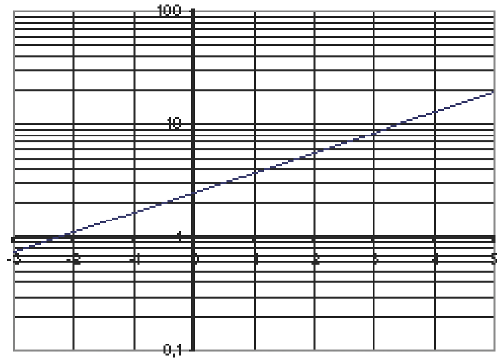
8
a) Führe den Beweis, dass jede Exponentialfunktion der Form $y = a \cdot b^x$ für den Fall einer beliebigen Zeicheneinheit ℓ für die 2. Achse mit ordinatenlogarithmischer Skala als Gerade dargestellt wird.
b) Führe den Beweis für den Fall, dass für die 1. Achse die Zeicheneinheit ℓ_x und für die 2. Achse die Zeicheneinheit ℓ_y gewählt werden.

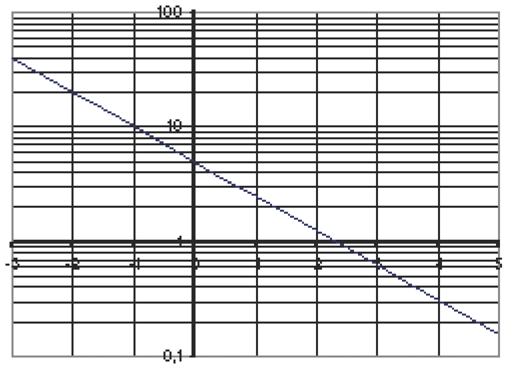
9 Löse die Aufgabe a) des Beispiels *Bakterienvermehrung*, indem du ausgehend von der Funktionsgleichung $y = c \cdot a^x$ und den beiden Punkten auf dem Graphen ein Gleichungssystem aufstellst und dieses löst.

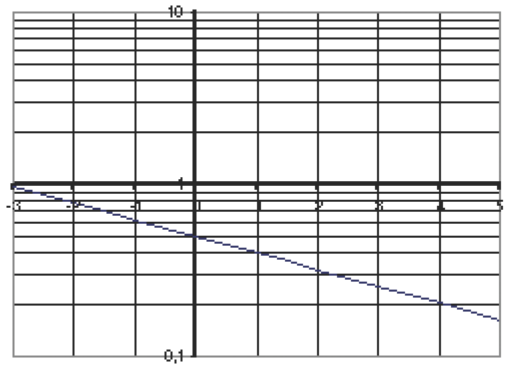
10 Zeige, dass bei einer Exponentialfunktion der Form $y = c \cdot e^{k \cdot x}$ in ordinatenlogarithmischer Darstellung mit dem natürlichen Logarithmus die Zahl k der Steigung der Geraden entspricht.

11 Bei den dargestellten Graphen handelt es sich um Funktionen der Art $y = c \cdot a^x$.
Wie lauten die Funktionsgleichungen?

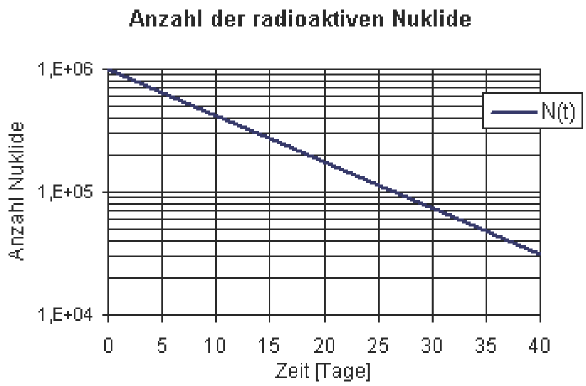
a)


b)


c)


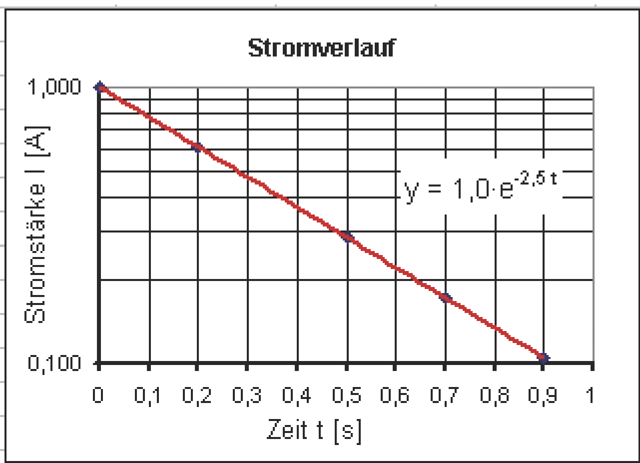
d)


12 Das Zerfallsgesetz für radioaktive Substanzen lautet $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau} \cdot t}$
(N Anzahl der Atome (Nuklide), λ Zerfallskonstante, τ Halbwertszeit)
Berechne aus dem Diagramm die Halbwertszeit, indem du die Steigung der Geraden ermittelst.
Um welches der folgenden Isotope könnte es sich der Berechnung nach handeln?
(1) Tritium H-3, $\tau = 12$ Jahre;
(2) Radon Rn-222, $\tau = 3{,}8$ Tage



13 Beim Ausschalten eines Stromkreises, in dem sich eine Spule befindet, nimmt der Strom gemäß der Formel $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$ (I, I_0 Stromstärke, R Widerstand, L Induktivität, t Zeit) ab. In einem Versuch soll nun aus dem gemessenen Stromverlauf die Induktivität L berechnet werden, wenn der Widerstand mit $R = 50\,\Omega$ bekannt ist. Die im Versuch erhaltenen Messwerte liegen in einem logarithmischen Diagramm auf einer Geraden.

Widerstand R =	**50**	Ω
Zeit t [s]	**Stromstärke I [A]**	
0	1,000	
0,2	0,607	
0,5	0,287	
0,7	0,174	
0,9	0,105	



a) Zeige, dass die Gerade die Gleichung $I(t) = 1{,}0 \cdot e^{-2{,}5t}$ besitzt.
b) Berechne aus der gegebenen Geradengleichung die Induktivität L der Spule.