Vorlesungstermin 2:

Graphentheorie II

Markus Püschel
David Steurer

Algorithmen und Datenstrukturen, Herbstsemester 2018, ETH Zürich

Wiederholung: Vollständige Induktion

Ziel: zeige $\forall n \in \mathbb{N}.\ A(n)$ für eine Aussage $A(n)$, z.B.

$A(n)$: die Summe $1 + 2 + \cdots + n$ ist gleich $\frac{1}{2}n \cdot (n+1)$

$A(n)$: jeder Graph mit maximalem Grad Δ und n Knoten ist $(\Delta + 1)$-partit

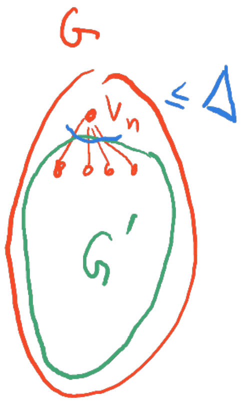
Theorem: um zu zeigen dass eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$ gilt, reicht folgendes aus:

- *Induktionsanfang:* zeige, dass $A(1)$ gilt
- *Induktionsschritt:* zeige $A(n-1) \to A(n)$ für alle $n \geqslant 2$

im Induktionsschritt müssen wir $A(n)$ zeigen, aber dürfen dabei annehmen dass $A(n-1)$ gilt (*Induktionshypothese*)

Induktionsbeispiel 2: Färbung und Knotengrad

$A(n)$: jeder Graph mit n Knoten und maximalem
Knotengrad $\leqslant \Delta$ ist $(\Delta + 1)$-partit



Induktionsanfang: zeige $A(1)$

* wichtig: begründe → Ind. Hyp. greift

in der Tat ist jeder Graph mit nur einem Knoten 1-partit

Induktionsschritt: zeige $A(n-1) \to A(n)$ für all $n \geqslant 2$

entferne Knoten v_n von G (und all inzidente Kanten) und wende *Induktionshypothese* auf resultierenden Graph G' an *

betrachte Färbung von G' mit $\Delta + 1$ Farben und färbe v_n mit einer der $\Delta + 1$ Farben, die nicht von seinen $\leqslant \Delta$ Nachbarn verwendet wird

so erhalten wir gültige Färbung von G mit $\Delta + 1$ Farben $\square$

Induktionsbeispiel 2: Färbung und Knotengrad

$A(n)$: jeder Graph mit n Knoten und maximalem
Knotengrad $\leqslant \Delta$ ist $(\Delta + 1)$-partit

Induktionsschritt: zeige $A(n-1) \rightarrow A(n)$ für all $n \geqslant 2$

entferne Knoten v_n von G (und all inzidente Kanten) und wende *Induktionshypothese* auf resultierenden Graph G' an

betrachte Färbung von G' mit $\Delta + 1$ Farben und färbe v_n mit einer der $\Delta + 1$ Farben, die nicht von seinen $\leqslant \Delta$ Nachbarn verwendet wird

so erhalten wir gültige Färbung von G mit $\Delta + 1$ Farben $\square$

Ausblick: Beweis "enthält" *effizienten Alg.* der solche Färbungen findet

Induktionsbeispiel 3: Summe der Knotengrade

$A(m)$: für jeden Graph mit m Kanten ist die Summe der Knotengrade $2m$

Induktionsbeispiel 3: Summe der Knotengrade

$A(m)$: für jeden Graph mit m Kanten ist die Summe der Knotengrade $2m$

Induktionsanfang: zeige $A(1)$

Induktionsbeispiel 3: Summe der Knotengrade

$A(m)$: für jeden Graph mit m Kanten ist die Summe der Knotengrade $2m$

Induktionsanfang: zeige $A(1)$

ein Graph mit nur einer Kante hat nur zwei Knoten mit Grad 1

daher ist die Summe der Knotengrade 2

Induktionsbeispiel 3: Summe der Knotengrade

$A(m)$: für jeden Graph mit m Kanten ist die Summe der Knotengrade $2m$

Induktionsschritt: zeige $A(m-1) \to A(m)$ für all $m \geqslant 2$

Induktionsbeispiel 3: Summe der Knotengrade

$A(m)$: für jeden Graph mit m Kanten ist die Summe der Knotengrade $2m$

Induktionsschritt: zeige $A(m-1) \to A(m)$ für all $m \geqslant 2$

entferne Kante $e_n = \{v_i, v_j\}$ von G und wende *Induktionshypothese* auf resultierenden Graph G' an

Induktionsbeispiel 3: Summe der Knotengrade

$A(m)$: für jeden Graph mit m Kanten ist die Summe der Knotengrade $2m$

Induktionsschritt: zeige $A(m-1) \to A(m)$ für all $m \geqslant 2$

entferne Kante $e_n = \{v_i, v_j\}$ von G und wende *Induktionshypothese* auf resultierenden Graph G' an

G' hat diesselben Knotengrade wie G bis auf $\deg_{G'}(v_i) = \deg_G(v_i) - 1$ und $\deg_{G'}(v_j) = \deg_G(v_j) - 1$

Induktionsbeispiel 3: Summe der Knotengrade

$A(m)$: für jeden Graph mit m Kanten ist die Summe der Knotengrade $2m$

Induktionsschritt: zeige $A(m-1) \to A(m)$ für all $m \geqslant 2$

entferne Kante $e_n = \{v_i, v_j\}$ von G und wende *Induktionshypothese* auf resultierenden Graph G' an

G' hat diesselben Knotengrade wie G bis auf $\deg_{G'}(v_i) = \deg_G(v_i) - 1$ und $\deg_{G'}(v_j) = \deg_G(v_j) - 1$

$$\deg_G(v_1) + \dots + \deg_G(v_n) \stackrel{\cdot\cdot}{=} \underbrace{\deg_{G'}(v_1) + \dots + \deg_{G'}(v_n)}_{} + 2$$

$$\overset{\text{Ind. Hyp.}}{=} 2\cdot(m-1) + 2$$

$$= 2m \qquad \square$$

Eigenschaft: Bipartite Graphen und Ungerade Kreise

Satz: Ein Graph ist bipartit genau dann wenn er keinen ungeraden Kreis enthält

Eigenschaft: Bipartite Graphen und Ungerade Kreise

Satz: Ein Graph ist bipartit genau dann wenn er keinen ungeraden Kreis enthält

Erstaunlich: *Existenz* einer Färbung ist dasselbe wie *Nichtexistenz* eines ungeraden Kreis

Eigenschaft: Bipartite Graphen und Ungerade Kreise

Satz: Ein Graph ist bipartit genau dann wenn er keinen ungeraden Kreis enthält

Beweise: zwei Richtungen zu zeigen:

1. jeder bipartite Graph enthält keinen ungeraden Kreis
2. jeder Graph ohne ungeraden Kreis ist bipartit

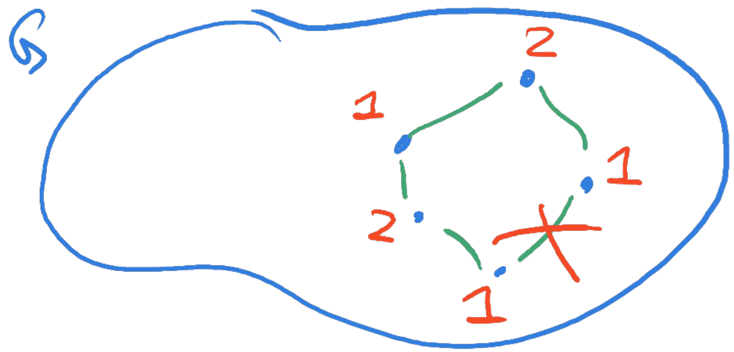
Eigenschaft: Bipartite Graphen und Ungerade Kreise

Satz: Ein Graph ist bipartit genau dann wenn er keinen ungeraden Kreis enthält

Beweise: zwei Richtungen zu zeigen:

1. jeder bipartite Graph enthält keinen ungeraden Kreis
2. jeder Graph ohne ungeraden Kreis ist bipartit

erste Richtung folgt direkt



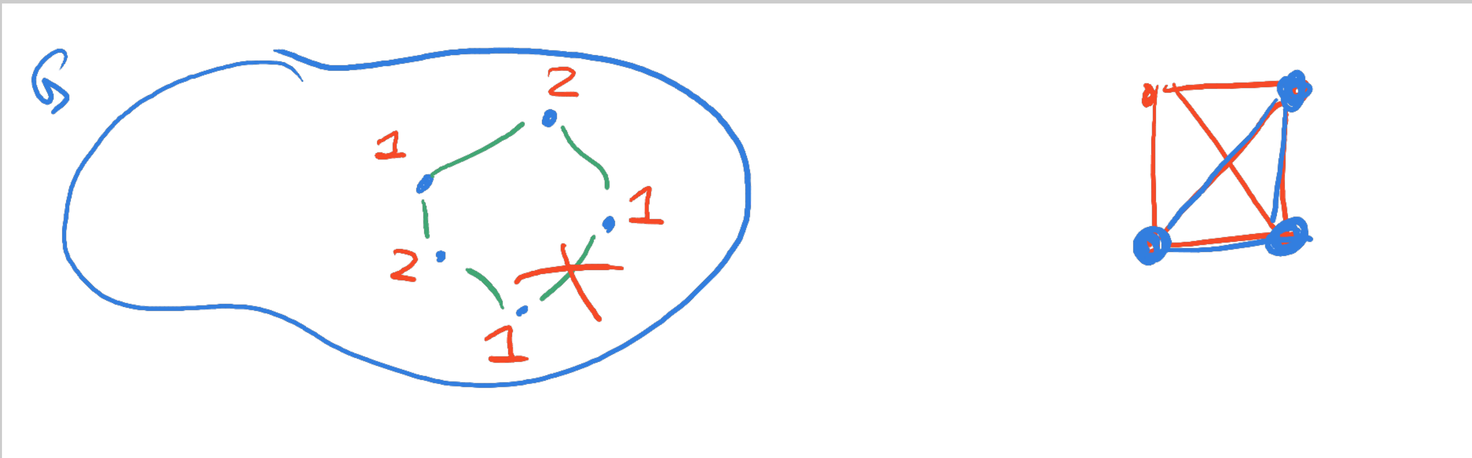
Eigenschaft: Bipartite Graphen und Ungerade Kreise

Satz: Ein Graph ist bipartit genau dann wenn er keinen ungeraden Kreis enthält

Beweise: zwei Richtungen zu zeigen:

1. jeder bipartite Graph enthält keinen ungeraden Kreis
2. jeder Graph ohne ungeraden Kreis ist bipartit

erste Richtung folgt direkt



andere Richtung per Induktion ...

Induktionsbeispiel 4: Graphen ohne ungerade Kreise

$A(n)$: jeder Graph mit $\leq n$ Knoten und ohne ungeradem Kreis ist bipartit

Induktionsbeispiel 4: Graphen ohne ungerade Kreise

$A(n)$: jeder Graph mit $\leqslant n$ Knoten und ohne ungeradem Kreis ist bipartit

Induktionsanfang: zeige $A(1)$

Induktionsbeispiel 4: Graphen ohne ungerade Kreise

$A(n)$: jeder Graph mit $\leq n$ Knoten und ohne ungeradem Kreis ist bipartit

Induktionsanfang: zeige $A(1)$

in der Tat ist jeder Graph mit nur einem Knoten 1-partit

Induktionsbeispiel 4: Graphen ohne ungerade Kreise

$A(n)$: jeder Graph mit $\leqslant n$ Knoten und ohne ungeradem Kreis ist bipartit

Induktionsanfang: zeige $A(1)$

in der Tat ist jeder Graph mit nur einem Knoten 1-partit

Induktionsschritt: zeige $A(n-1) \to A(n)$ für all $n \geqslant 2$

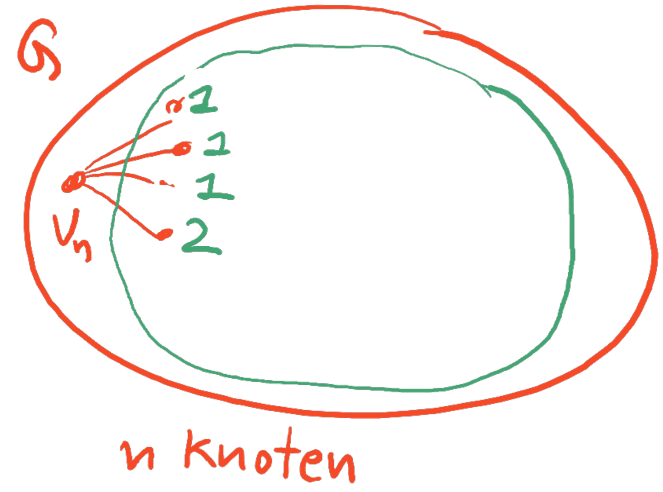
Induktionsbeispiel 4: Graphen ohne ungerade Kreise

$A(n)$: jeder Graph mit $\leqslant n$ Knoten und ohne ungeradem Kreis ist bipartit

Induktionsanfang: zeige $A(1)$

in der Tat ist jeder Graph mit nur einem Knoten 1-partit

Induktionsschritt: zeige $A(n-1) \to A(n)$ für all $n \geqslant 2$



Induktionsbeispiel 4: Graphen ohne ungerade Kreise

$A(n)$: jeder Graph mit $\leqslant n$ Knoten und ohne ungeradem Kreis ist bipartit

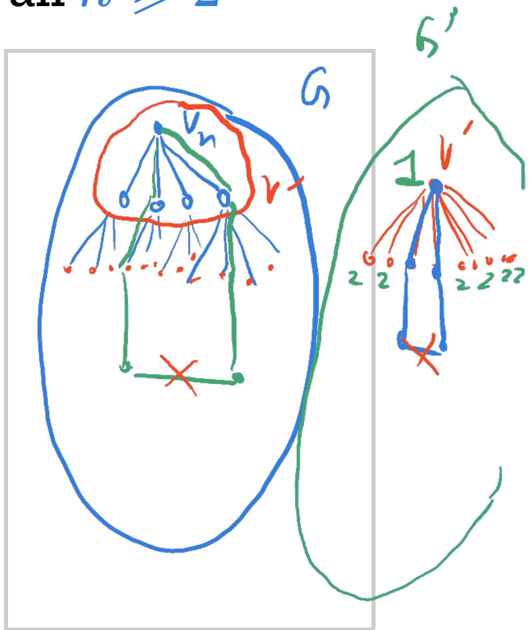
Induktionsanfang: zeige $A(1)$

in der Tat ist jeder Graph mit nur einem Knoten 1-partit

Induktionsschritt: zeige $A(n-1) \to A(n)$ für all $n \geqslant 2$

"verschmelze" Knoten v_n und Nachbarn zu neuem Knoten v' und wende *Induktionshyp.* auf resultierenden Graph G' an

(falls v_n keine Nachbarn hat, füge zuerst Kante $\{v_n, v_1\}$ hinzu)



Induktionsbeispiel 4: Graphen ohne ungerade Kreise

$A(n)$: jeder Graph mit $\leqslant n$ Knoten und ohne ungeradem Kreis ist bipartit

Induktionsanfang: zeige $A(1)$

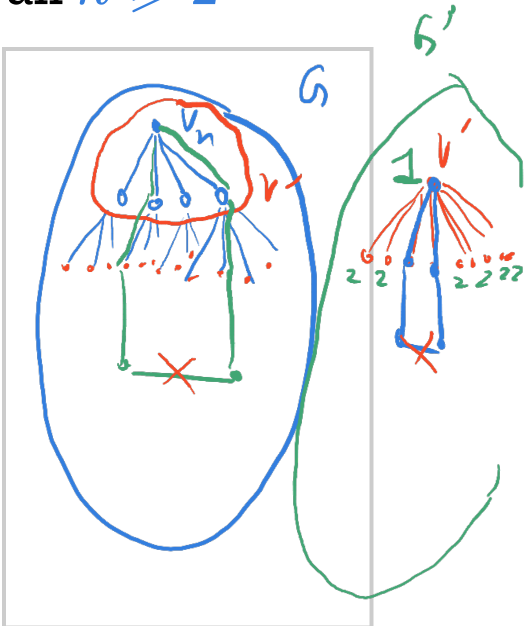
in der Tat ist jeder Graph mit nur einem Knoten 1-partit

Induktionsschritt: zeige $A(n-1) \to A(n)$ für all $n \geqslant 2$

"verschmelze" Knoten v_n und Nachbarn zu neuem Knoten v' und wende *Induktionshyp.* auf resultierenden Graph G' an

(falls v_n keine Nachbarn hat, füge zuerst Kante $\{v_n, v_1\}$ hinzu)

verwende für die Nachbarn von v_n diesselbe Farbe wie für v' und für v_n die übrige Farbe $\square$



Tücken bei Induktionsbeweisen

sowohl *Induktionsanfang* als auch *Induktionsschritt* müssen sorgfältig geführt werden

Tücken bei Induktionsbeweisen

sowohl *Induktionsanfang* als auch *Induktionsschritt* müssen sorgfältig geführt werden

insbesondere müssen alle Werte von n betrachtet werden
(entweder im Induktionsanfang oder im Induktionsschritt)

Tücken bei Induktionsbeweisen

sowohl *Induktionsanfang* als auch *Induktionsschritt* müssen sorgfältig geführt werden

insbesondere müssen alle Werte von n betrachtet werden
(entweder im Induktionsanfang oder im Induktionsschritt)

ansonsten können leicht falsche Aussagen "bewiesen" werden

Beispiel für fehlerhaften Induktionsbeweis

$A(n)$: in jeder Herde von n Kühen haben
alle Kühe diesselbe Farbe

Beispiel für fehlerhaften Induktionsbeweis

$A(n)$: in jeder Herde von n Kühen haben
alle Kühe diesselbe Farbe

Induktionsanfang: die Aussage $A(1)$ gilt offensichtlich

Beispiel für fehlerhaften Induktionsbeweis

$A(n)$: in jeder Herde von n Kühen haben
alle Kühe diesselbe Farbe

Induktionsanfang: die Aussage $A(1)$ gilt offensichtlich

Induktionsschritt: zu zeigen $A(n-1) \to A(n)$

Beispiel für fehlerhaften Induktionsbeweis

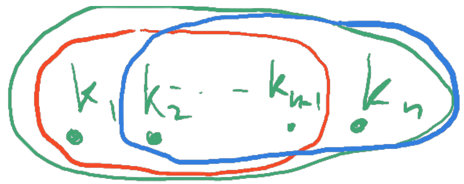
$A(n)$: in jeder Herde von n Kühen haben
alle Kühe diesselbe Farbe

Induktionsanfang: die Aussage $A(1)$ gilt offensichtlich

Induktionsschritt: zu zeigen $A(n-1) \to A(n)$

für $n \geqslant 2$, sei $\{k_1, \ldots, k_n\}$ eine beliebige Herde von n Kühen

$A(n)$: in jeder Herde von n Kühen haben
alle Kühe diesselbe Farbe

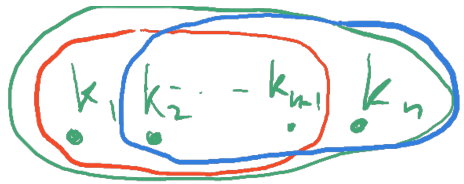


Induktionsschritt: zu zeigen $A(n-1) \rightarrow A(n)$

für $n \geqslant 2$, sei $\{k_1, \ldots, k_n\}$ eine beliebige Herde von n Kühen

betrachte Herden $h = \{k_1, ..., k_{n-1}\}$ und $h' = \{k_2, ..., k_n\}$

$A(n)$: in jeder Herde von n Kühen haben
alle Kühe diesselbe Farbe



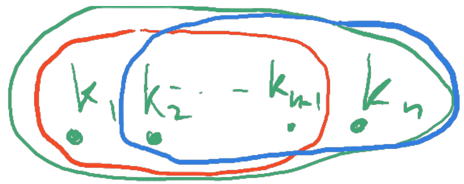
Induktionsschritt: zu zeigen $A(n-1) \to A(n)$

für $n \geqslant 2$, sei $\{k_1, \ldots, k_n\}$ eine beliebige Herde von n Kühen

betrachte Herden $h = \{k_1, ..., k_{n-1}\}$ und $h' = \{k_2, ..., k_n\}$

beide Herden haben $n-1$ Kühe

$A(n)$: in jeder Herde von n Kühen haben
alle Kühe diesselbe Farbe



Induktionsschritt: zu zeigen $A(n-1) \to A(n)$

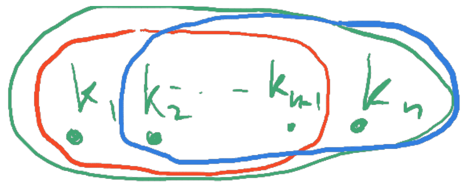
für $n \geqslant 2$, sei $\{k_1, \ldots, k_n\}$ eine beliebige Herde von n Kühen

betrachte Herden $h = \{k_1, ..., k_{n-1}\}$ und $h' = \{k_2, ..., k_n\}$

beide Herden haben $n-1$ Kühe

nach *Induktionshypothese* $A(n-1)$ haben sowohl die Kühe in Herde h also auch die Kühe in Herde h' jeweils diesselbe Farbe

$A(n)$: in jeder Herde von n Kühen haben alle Kühe diesselbe Farbe



Induktionsschritt: zu zeigen $A(n-1) \to A(n)$

für $n \geqslant 2$, sei $\{k_1, \dots, k_n\}$ eine beliebige Herde von n Kühen

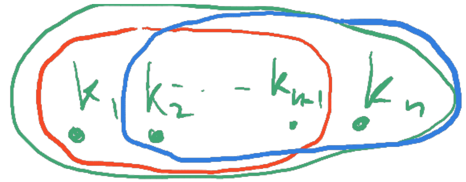
betrachte Herden $h = \{k_1, \dots, k_{n-1}\}$ und $h' = \{k_2, \dots, k_n\}$

beide Herden haben $n-1$ Kühe

nach *Induktionshypothese* $A(n-1)$ haben sowohl die Kühe in Herde h also auch die Kühe in Herde h' jeweils diesselbe Farbe

da Kuh k_2 in beiden Herden h und h' ist, haben beide Herden diesselbe Farbe

$A(n)$: in jeder Herde von n Kühen haben alle Kühe diesselbe Farbe



Induktionsschritt: zu zeigen $A(n-1) \to A(n)$

für $n \geqslant 2$, sei $\{k_1, \dots, k_n\}$ eine beliebige Herde von n Kühen

betrachte Herden $h = \{k_1, ..., k_{n-1}\}$ und $h' = \{k_2, ..., k_n\}$

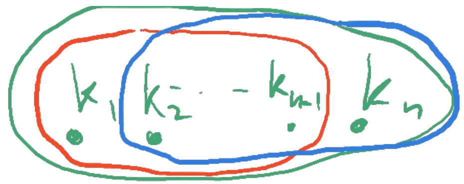
beide Herden haben $n-1$ Kühe

nach *Induktionshypothese* $A(n-1)$ haben sowohl die Kühe in Herde h also auch die Kühe in Herde h' jeweils diesselbe Farbe

da Kuh k_2 in beiden Herden h und h' ist, haben beide Herden diesselbe Farbe

es folgt dass alle Kühe $h_1, \dots, h_n$ diesselbe Farbe haben

$A(n)$: in jeder Herde von n Kühen haben alle Kühe diesselbe Farbe



Induktionsschritt: zu zeigen $A(n-1) \to A(n)$

für $n \geqslant 2$, sei $\{k_1, \dots, k_n\}$ eine beliebige Herde von n Kühen

betrachte Herden $h = \{k_1, ..., k_{n-1}\}$ und $h' = \{k_2, ..., k_n\}$

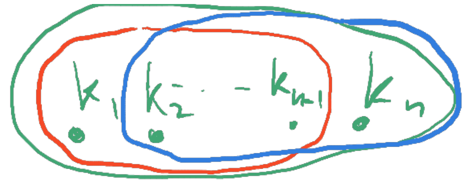
beide Herden haben $n-1$ Kühe

nach *Induktionshypothese* $A(n-1)$ haben sowohl die Kühe in Herde h also auch die Kühe in Herde h' jeweils diesselbe Farbe

~~da Kuh k_2 in beiden Herden h und h' ist,~~ haben beide Herden diesselbe Farbe

es folgt dass alle Kühe $h_1, \dots, h_n$ diesselbe Farbe haben

$A(n)$: in jeder Herde von n Kühen haben
alle Kühe diesselbe Farbe

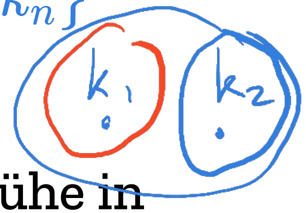


Induktionsschritt: zu zeigen $A(n-1) \to A(n)$

für $n \geqslant 2$, sei $\{k_1, \ldots, k_n\}$ eine beliebige Herde von n Kühen

betrachte Herden $h = \{k_1, \ldots, k_{n-1}\}$ und $h' = \{k_2, \ldots, k_n\}$

beide Herden haben $n-1$ Kühe



nach *Induktionshypothese* $A(n-1)$ haben sowohl die Kühe in Herde h also auch die Kühe in Herde h' jeweils diesselbe Farbe

~~da Kuh k_2 in beiden Herden h und h' ist,~~ haben beide Herden diesselbe Farbe

es folgt dass alle Kühe $h_1, \ldots, h_n$ diesselbe Farbe haben

Induktionsschritt schlägt fehl für $n = 2$,
aber ist korrekt für alle $n \geqslant 3$

Beispiele gerichteter Graphen

- *Graph der Hyperlinks im World Wide Web:* spielt zentrale Rolle für Suchmaschinen (PageRank Algorithmus benannt nach Google-Mitgründer Larry Page)
- *Strassennetz:* wichtig für Navigationssysteme
- *soziale Netzwerke*, z.B. "follower"-Netzwerk bei Twitter

Definition: ein *gerichteter Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer Knotenmenge V und Kantenmenge E, so dass jede Kante $e \in E$ ein (geordnetes) Paar zweier Knoten $u, v \in E$ ist (also: $e = (u, v)$)

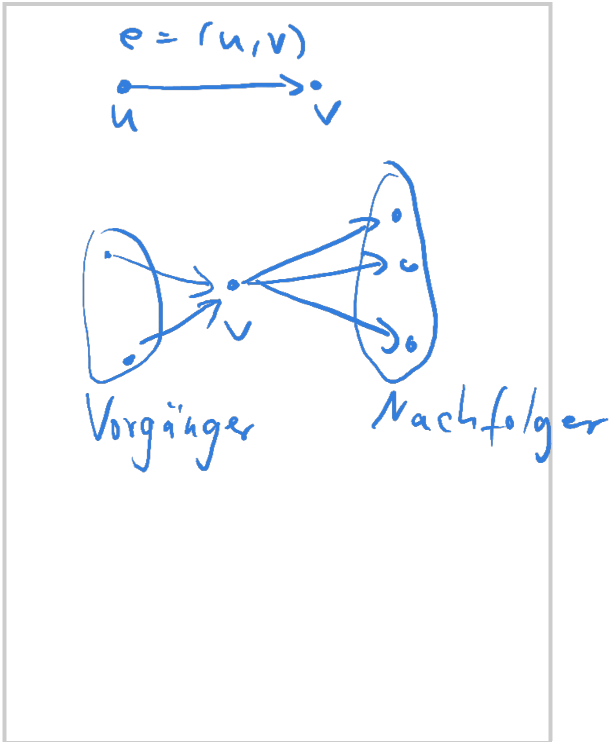
Begriffe: Eine Kante $e = (u, v)$ geht von ihrem *Fuss* u zu ihrem *Kopf* v

Falls $(u, v) \in E$, ist u ein *Vorgänger* von v und v ein *Nachfolger* von u

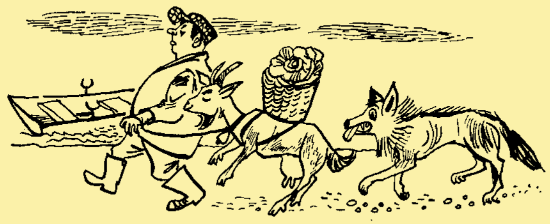
Vorgängerschaft $N_G^-(v)$ ist Menge der Vorgänger von v und *Nachfolgerschaft* $N_G^+(v)$ ist Menge der Nachfolger von v

Eingangsgrad $\deg_G^-(v) := |N_G^-(v)|$

Ausgangsgrad $\deg_G^+(v) := |N_G^+(v)|$

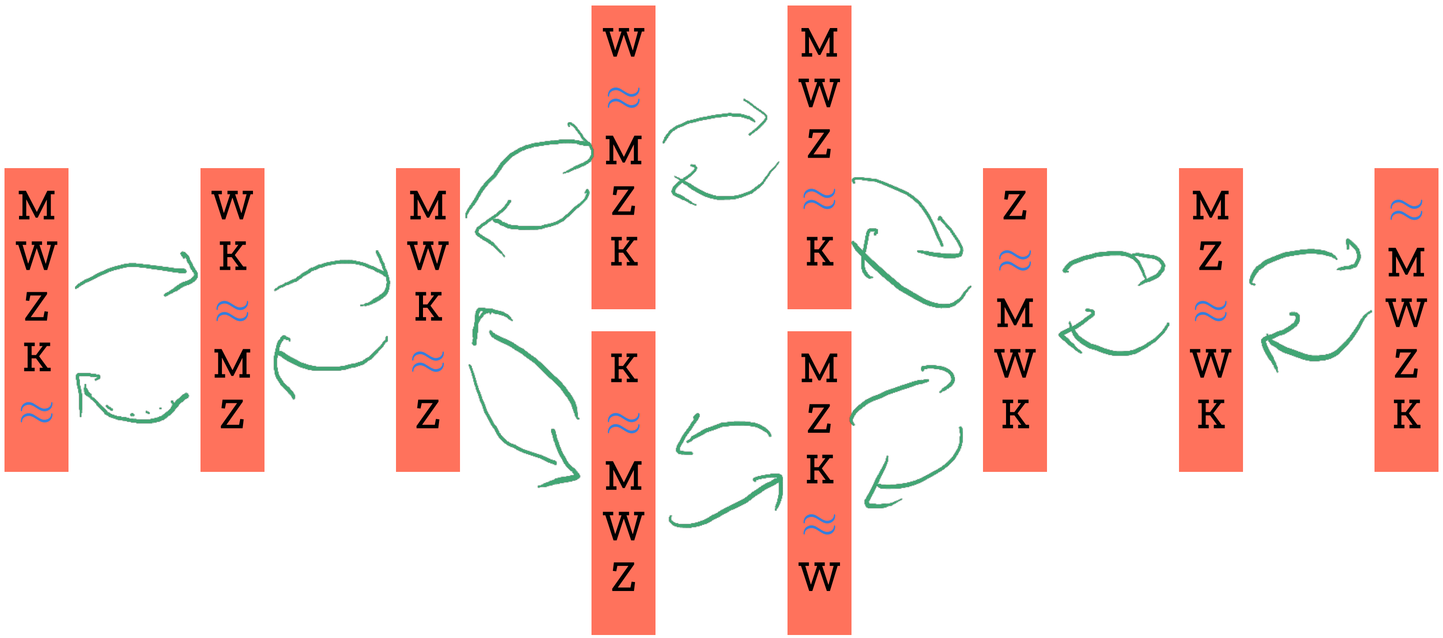


Flussüberquerung



- ein Mann möchte zusammen mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf einen Fluss überqueren
- das Boot fasst ausser ihm nur einen weiteren Passagier
- er kann weder den Wolf mit der Ziege noch die Ziege mit dem Kohl unbeaufsichtigt an einem Ufer lassen

betrachte alle möglichen Zustände und Zustandsübergänge



Wege und Pfade

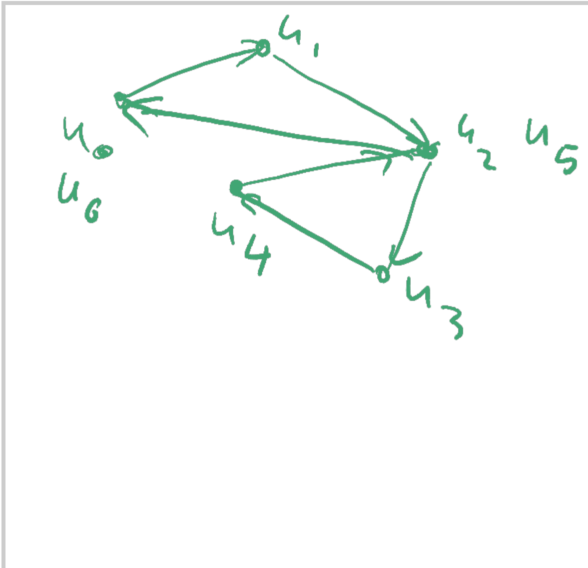
sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph

Begriffe: ein *Weg* mit *Startknoten* $u_0 \in V$ und *Endknoten* $u_\ell \in V$ der *Länge* ℓ ist eine Folge von Knoten $u_0, \ldots, u_\ell \in V$, so dass $(u_0, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_{\ell-1}, u_\ell) \in E$

ein *Zyklus* ist ein Weg mit demselben Start- und Endknoten

ein *Pfad* ist ein Weg bei dem jeder Knoten höchstens einmal vorkommt

ein *Kreis* ist ein Zyklus mit $\ell \geqslant 3$, so dass $u_1, \ldots, u_\ell$ paarweise verschieden sind



Wege und Pfade

sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph

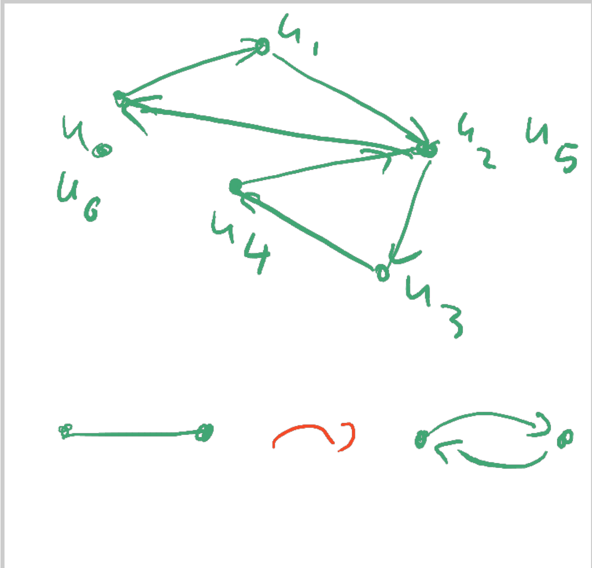
Begriffe: ein *Weg* mit *Startknoten* $u_0 \in V$ und *Endknoten* $u_\ell \in V$ der *Länge* ℓ ist eine Folge von Knoten $u_0, \ldots, u_\ell \in V$, so dass $(u_0, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_{\ell-1}, u_\ell) \in E$

ein *Zyklus* ist ein Weg mit demselben Start- und Endknoten

ein *Pfad* ist ein Weg bei dem jeder Knoten höchstens einmal vorkommt

ein *Kreis* ist ein Zyklus mit $\ell \geqslant 3$, so dass $u_1, \ldots, u_\ell$ paarweise verschieden sind

Bemerkung: diesselben Begriffe gelten für ungerichtete Graphen; wir stellen uns dabei vor dass jede ungerichtete Kante $\{u, v\}$ für beide gerichtete Kanten $(u, v), (v, u)$ steht



Erreichbarkeit und Distanz

sei $G = (V, E)$ ein Graph (gerichtet oder ungerichtet)

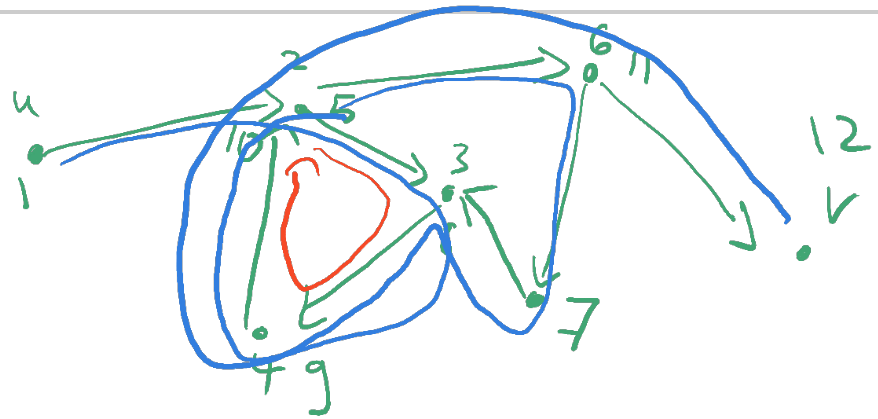
Begriffe: ein Knoten $v \in V$ ist von einem Knoten $u \in V$ *erreichbar*, wenn es einen Weg von u nach v in G gibt

die *Distanz* $d(u, v)$ ist die Länge des kürzesten Wegs von u nach v

Ausblick: sowohl für Erreichbarkeit als auch für Distanzen gibt es effiziente Algorithmen

Behauptung: wenn es einen Weg der Länge ℓ von u nach v gibt und $u \neq v$, dann gibt es einen Pfad von u nach v mit Länge $\leqslant \ell$

Idee: solange Weg abkürzen bis ein Pfad übrig bleibt



hört der Abkürzungsprozess irgendwann auf?

wie können wir das formalisieren?

seien u und v zwei verschiedene Knoten

$A(n)$: wenn es einen Weg von u nach v mit Länge $\leqslant n$ gibt,
dann gibt es einen Pfad von u nach v mit Länge $\leqslant n$

Induktionsanfang: $A(1)$

jeder Weg von u nach v der Länge $\leqslant 1$ ist ein Pfad seien u und v zwei verschiedene Knoten

$A(n)$: wenn es einen Weg von u nach v mit Länge $\leqslant n$ gibt,
dann gibt es einen Pfad von u nach v mit Länge $\leqslant n$

Induktionsschritt: $A(n-1) \to A(n)$ für alle $n \geqslant 2$

sei $w_0 := u$; betrachte beliebigen Weg
$w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}, v$ der Länge n

wir können annehmen dass dieser Weg
kein Pfad ist (ansonsten ist nichts zu tun)

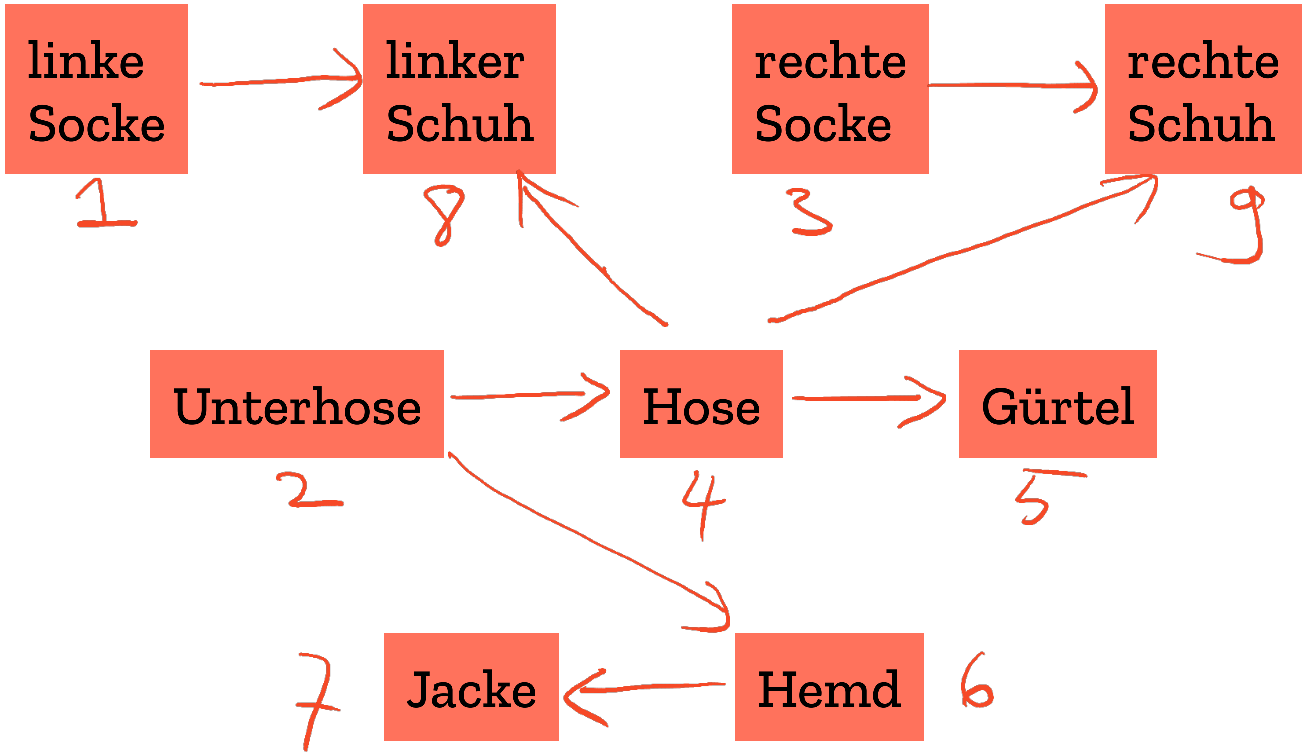
daher $\exists$ Knoten $w_i = w_j$ mit $0 \leqslant i < j$, der
mehr als einmal auf dem Weg vorkommt

dann ist $w_0, \ldots, w_i, w_{j+1}, \ldots, v$ ein Weg
von u nach v der Länge $\leqslant n-1$

nach *Induktionshypothese* gibt es daher einen Pfad von u nach
v der Länge $\leqslant n-1$; q.e.d.

Gerichtete Graphen und Abhängigkeiten

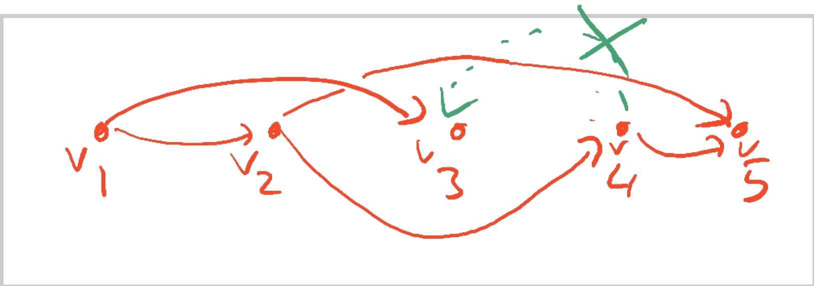
Beispiel: Abhängigkeiten beim Anziehen von Kleiderstücken



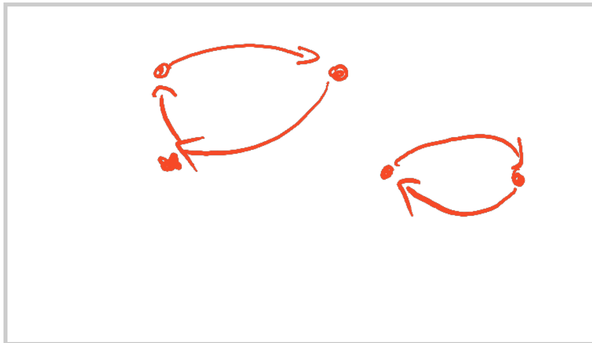
Gesucht: *Reihenfolge, die alle Abhängigkeiten berücksichtigt*

Topologische Sortierung

Definition: eine Folge $v_1, \ldots, v_n$ von Knoten ist eine *topologische Sortierung* von $G = (V, E)$ falls für jede Kante $(v_i, v_j) \in E$ gilt, dass $i < j$, und $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$



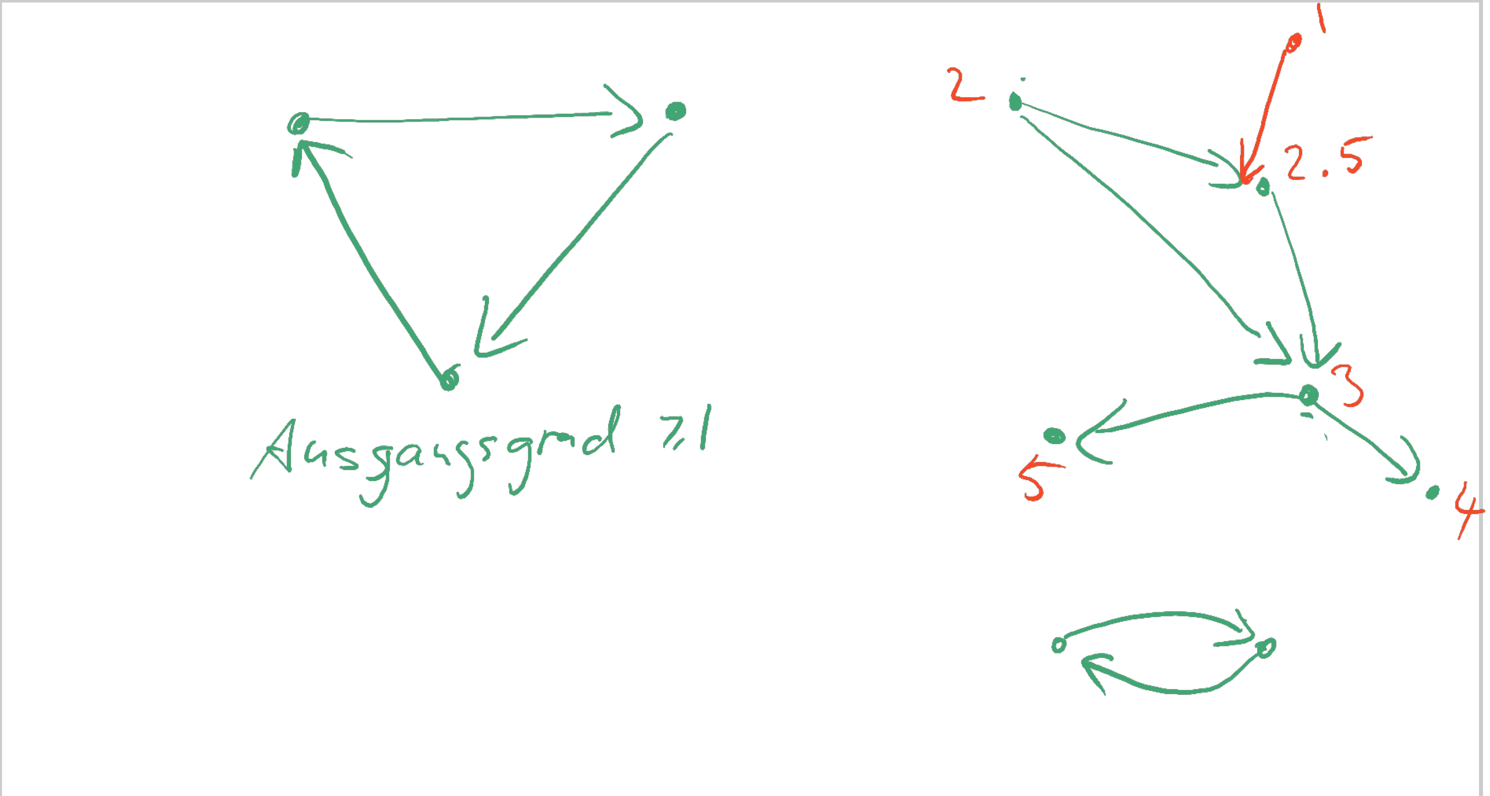
Gibt es immer eine solche Sortierung?



Theorem: ein geri. Graph hat eine topologische Sortierung genau dann wenn er keinen Zyklus enthält (*"azyklisch"*)

Zu zeigen: für einen azyklischen Graphen können wir immer eine topologische Sortierung finden

Lemma: Jeder gerichtete azyklischer Graph enthält eine *Senke* (d.h., Ausgangsgrad 0)



gleiche Beweisstrategie wie um zu zeigen, dass jeder nicht-trivale ungerichte Graph ohne Kreis ein Blatt hat (siehe Übungsblatt)

Theorem: *(wiederholt)* Jeder azyklische Graph hat eine topologische Sortierung

Beweis: Induktion über Knotenanzahl $n \geqslant 1$

Induktionsanfang: "$A(1)$ gilt" ✔

Induktionsschritt: "$A(n-1) \to A(n)$ gilt für alle $n \geqslant 2$"

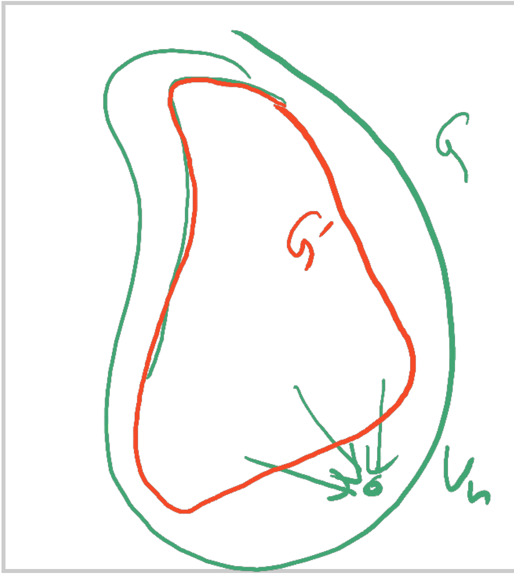
sei v_n eine Senke (existiert laut Lemma)

laut *Induktionshypothese* hat G ohne v_n eine topologische Sortierung

$v_1, \ldots, v_{n-1}$

v_n

dann ist $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ eine topologische Sortierung von G



□

Zusammenhang

sei $G = (V, E)$ ein Graph (gerichtet oder ungerichtet)

Definition: eine Knotenmenge $W \subseteq V$ ist (stark) *zusammenhängend* in G, falls für alle Knoten $u, v \in W$ gilt, dass v von u erreichbar ist (d.h. $\exists$ Weg von u nach v)

Begriff: $G = (V, E)$ ist *zusammenhängend* falls V in G zusammenhängt

Zusammenhangskomponenten

Theorem: für jeden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gibt es eine Partition $\{V_1, \ldots, V_k\}$ von V, so dass $V_1, \ldots, V_k$ jeweils zusammenhängend sind und jede Kante von G in genau einem Teil V_i verläuft

Begriff: die Teile $V_1, \ldots, V_k$ heissen *Zusammenhangskomponenten*

Ausblick in diskrete Mathematik: Zusammenhang in ungerichteten Graph ist eine *Äquivalenzrelation*

Ausblick: bei gerichteten Graphen, kann die Zusammenhangsstruktur komplizierter sein