Ellipsen aus Keplers Daten?

Konstruiere mit deiner Gruppe die Positionen von Erde und Mars (Aufgabe 1, fett umrandet):

0. Wir legen ein Koordinatensystem fest:
   Polarkoordinaten, Ursprung = *Sonne* in der Mitte, Platzbedarf in jede Richtung 250 Mio km.
   Zeichne einen Kreis mit Radius 150 Mio km für die Erdbahn,
   markiere 0° mit dem Symbol ♈ . (*1)

1. Wir teilen die Tabelle in fünf Gruppen A bis E auf.

Jede Gruppe konstruiert drei Positionen von Erde und Mars (siehe braune Felder in der Tabelle):

Wähle einen feinen Stift in einem Blauton. Lege das Blatt mit den Polarkoordinaten unter deine Folie.

In der Spalte ♁ `helioz. Länge` steht der Azimut der *Erde* (vom Ursprung aus; abh. vom Datum).
Trage die *Erde* und das zugehörige Datum im Diagramm ein.

In der Spalte ♂ `geoz. Länge` steht der Azimut, unter dem man den Mars
von der *Erde* aus sieht.
Trage in diese Richtung vom Punkt *Erde* aus einen Strahl fast bis zum Blattrand ein.

Wiederhole die Konstruktion für alle deine drei Zeilen. (*2)

Deine Strahlen schneiden sich im Idealfall.
Markiere an dieser Stelle den *Mars* in Rot.

Die einzelnen Positionen des *Mars* ergeben eine geschlossene Kurve, die *Marsbahn.*
Konstruiere sie! `(Hier fließt deine Hypothese ein.)`

2. Ziehe den *Durchmesser* durch die *Sonne* und den *Mittelpunkt* der *Marsbahn* in Violett.

Die *Marsbahn* schneidet den *Durchmesser* in den Punkten *Perihel* und *Aphel*.

Spiegle die *Sonne* am *Mittelpunkt* der *Marsbahn*. Der neue Punkt heißt *Äquant*.

Kannst du einen **Kreis** um den *Mittelpunkt* mit dem Radius der *Marsbahn* unterscheiden
von einer **Ellipse** mit den Brennpunkten *Sonne* und *Äquant* ?
`(Passe den Schwierigkeitsgrad an deine mathematischen Fähigkeiten an.)`

3. Wähle einen willkürlichen Punkt *A* auf der *Marsbahn*, ein paar Grad neben *Aphel*
(dort sei Mars kurze Zeit d*t* später).
Die Gerade durch *Aphel* und *Äquant* schneidet die *Marsbahn* auf der anderen Seite (nahe *Perihel*) in *P* .

Wenn Mars bezüglich *Äquant* eine konstante Winkelgeschwindigkeit hat,
ist er in *P* kurze Zeit d*t* später als in *Perihel*.

Vergleiche den Flächeninhalt der beiden Dreiecke Δ *Sonne Aphel A* und Δ *Sonne Perihel P* .

Führe zur Begründung diese Aussage über in Δ *Äquant Aphel A* ~ Δ *Äquant Perihel P* (für kleine d*t*).

Anmerkungen zum Verständnis, ohne Belang für die Konstruktion:

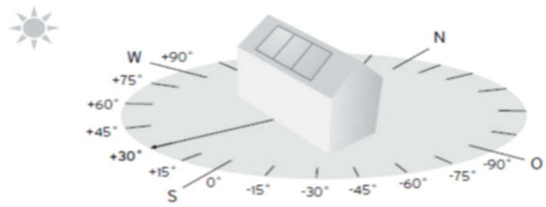
(*1) Kepler hat, um die Genauigkeit zu steigern, diese Aufgabenfolge iteriert
und damit auch für die Erde eine Ellipsenbahn gewonnen.

(*2) Aus der siderischen Umlaufzeit des Mars war bekannt, wann er wieder an der gleichen Stelle steht.

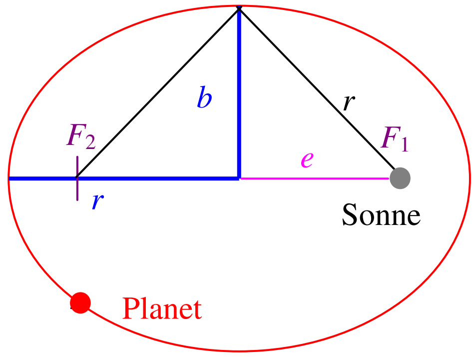
$$\frac{1}{sider.} = \frac{1}{a} - \frac{1}{synod.} = \frac{1}{365\text{d}} - \frac{1}{780\text{d}} = \frac{1}{687\text{d}}$$

Formelsammlung

1. **Azimut (Winkel)**



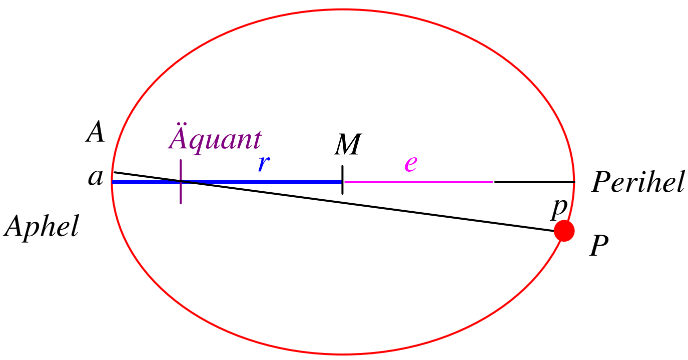
2. **Ellipse**



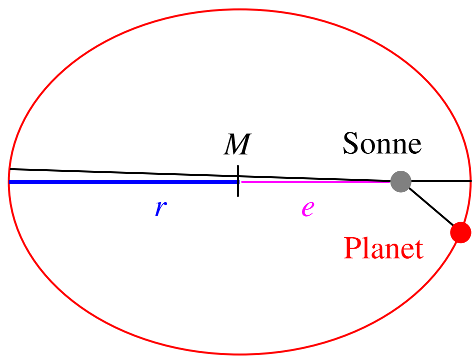
r, b große und kleine Halbachse
e Exzentrizität
F_1, F_2 Brennpunkte der Ellipse

3. **Geschwindigkeiten**

Konstante Winkelgeschwindigkeit



Zweites Keplersches Gesetz



Δ *Äquant Aphel A* ~ Δ *Äquant Perihel P*

(für kleine Scheitelwinkel).

$$^{(r-e)}/_{a} = {}^{(r+e)}/_{p}$$

$$m\mathbf{r}_1 \times {}^{d\mathbf{r}_1}/_{dt} = m\mathbf{r}_2 \times {}^{d\mathbf{r}_2}/_{dt}$$

$\Rightarrow$

$$\tfrac{1}{2}\, r_1 \cdot dr_1 = \tfrac{1}{2}\, r_2 \cdot dr_2$$

$$(r-e) \cdot p = (r+e) \cdot a$$

MARSBEOBACHTUNGEN VON TYCHO BRAHE, Z.T. VON KEPLER SELBST UND Z.T. INTERPOLIERT

Kap. A.N.	Datum/Uhrzeit h m	☉ wahre Sonne ° ' ''	☉ geoz. Länge ° ' ''	♁ helioz. Länge ° ' ''	♂ wahrer Mars ° ' ''	♂ geoz. Länge ° ' ''	∢♂☉ ° ' ''	♂ exz. Marsort ° ' ''	♂ helioz. Länge ° ' ''	∢♁☉ ° ' ''	∢♁♂ ° ' ''	Entfernung E–S	Entfernung S–M
26	4. 3.1590 19 10	24 00 25 ♓	354 00 25	174 00 25	24 20 ♈	24 20	30 19 35	14 15 4 ♉	44 15 4	19 55 4	129 45 21	99603	147626
	20. 1.1592 18 45	10 17 8 ♒	310 17 8	130 17 8	9 24 ♈	9 24	59 6 52	14 16 40 ♉	44 16 40	34 52 40	86 0 28	98525	147866
E	7.12.1593 18 15	25 53 24 ♐	265 53 24	85 53 24	3 4 30 ♈	3 4 30	97 11 6	14 18 16 ♉	44 18 16	41 13 46	41 35 8	98230	147654
	25.10.1595 17 45	11 41 34 ♏	221 41 34	41 41 34	19 42 ♉	49 42	171 59 34	14 19 52 ♉	44 19 52 44°17'	5 22 8	2 38 18	98910	147251 147654
27	10. 5.1585 6 11	28 55 45 ♉	58 55 45	238 55 45	26 54 30 ♌	146 54 30	87 58 45	5 22 2 ♎	185 22 2	38 27 32	53 33 43	101430	162982
	28. 3.1587 5 42	16 50 24 ♈	16 50 24	196 50 24	18 12 ♍	168 12	151 21 36	5 23 38 ♎	185 23 38	17 11 38	11 26 46	100350	162710
C	12. 2.1589 5 13	3 41 40 ♓	333 41 40	153 41 40	8 48 15 ♏	218 48 15	114 53 5	5 25 14 ♎	185 25 14	33 23 1	31 43 34	99035	163274
	31.12.1590 4 44	19 6 48 ♑	289 6 48	109 6 48	9 47 10 ♏	219 47 10	69 19 38	5 26 50 ♎	185 26 50 185°24'	34 20 20	76 20 2	99260	164636 163401
28	23. 4.1583 8 10	12 10 3 ♉	42 10 3	222 10 3	1 29 30 ♌	121 29 30	79 19 27	8 13 5 ♍	158 13 5	36 43 35	63 56 58	101049	166055
	10. 3.1585 7 40	29 41 4 ♓	359 41 4	179 41 4	11 48 20 ♌	131 48 20	132 7 16	8 14 41 ♍	158 14 41	26 26 21	21 26 23	99770	166205
B	26. 1.1587 7 10	16 5 55 ♒	316 5 55	136 5 55	4 41 45 ♎	184 41 45	131 24 10	8 16 17 ♍	158 16 17	26 25 28	22 10 22	98613	166213
	13.12.1588 6 45	1 44 53 ♑	271 44 53	91 44 53	13 35 40 ♎	193 35 40	78 9 13	8 17 53 ♍	158 17 53	35 17 47	66 33 0	98203	166339
	31.10.1590 6 15	17 28 33 ♏	227 28 33	47 28 33	2 57 20 ♎	182 57 20	44 31 13	8 19 29 ♍	158 19 29 158°16'	24 37 51	110 50 56	98770	166196 166196
42 PERIGÄUM	1.11.1589 18 10	19 13 56 ♏	229 13 56	49 13 56	20 59 15 ♑	290 59 15	61 45 19	29 54 33 ♒	329 54 33	38 55 18	79 19 23	98730	138438
	19. 9.1591 17 42	5 47 3 ♎	185 47 3	5 47 3	14 18 30 ♑	284 18 30	98 31 27	29 56 30 ♒	329 56 30	45 38 0	35 50 33	99946	138319
D	6. 8.1593 17 14	23 26 13 ♌	143 26 13	323 26 13	16 56 ♓	346 56	156 30 13	29 58 6 ♒	329 58 6 329°56'	16 57 54	6 31 53	101183	138254 138319
42 APOGÄUM	17. 2.1585 22 00	9 22 37 ♓	339 22 37	159 22 37	15 12 30 ♌	135 12 30	155 49 53	29 17 0 ♌	149 17 0	14 4 30	10 5 37	99170	166957
	5. 1.1587 21 31	25 21 16 ♑	295 21 16	115 21 16	2 8 30 ♎	182 8 30	113 12 46	29 18 36 ♌	149 18 36	32 49 54	33 57 20	98300	166630
	22.11.1588 21 2	10 55 8 ♐	250 55 8	70 55 8	2 35 40 ♎	182 35 40	68 19 28	29 20 12 ♌	149 20 12	33 15 28	78 25 4	98355	166665
A	10.10.1590 20 35	26 58 46 ♎	206 58 46	26 58 46	20 13 30 ♍	170 13 30	36 45 16	29 21 48 ♌	149 21 48	20 51 42	122 23 2	99300	166857
	6. 3.1600 18 17	26 31 36 ♓	356 31 36	176 31 36	29 18 30 ♋	119 18 30	122 46 54	29 29 51 ♌	149 29 51 149°23'	30 11 21	27 1 45	99667	166636 166749