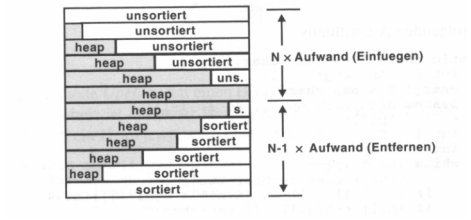
Heapsort

- Beispiel für einen eleganten Algorithmus, der auf einer effizienten Datenstruktur (dem Heap) beruht [Williams, 1964]
- Daten liegen in einem Array der Länge *n* vor

1. Erstelle aus dem gegebenen Array einen Heap (**DownHeap**)
2. Tausche erstes und letztes Element des Arrays
   - dann ist das größte Element an der letzten Position – wo es hingehört
   - es bleiben *n*-1 Elemente, die an die entsprechende Position müssen
   - das Array von *n*-1 Elementen ist jedoch kein Heap mehr
   - verschiebe das (neue) Element der Wurzel in einen ihrer Unterbäume, damit das Array wieder ein Heap wird (**DownHeap**)
   - wiederhole Schritt 2 bis das Array sortiert ist

- Trick: verwende Array selbst zur Speicherung des Heaps



Erstellung eines Heaps

- benutze **DownHeap** um ein Array *A* in einen Heap umzuwandeln
- rufe **DownHeap** für jedes Element nach der Bottom-Up-Methode auf

```
BuildHeap(A)
for i in range( len(A)/2-1, -1, -1 ):
  DownHeap( A, i, len(A) )
```

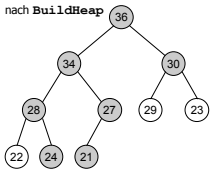
```
DownHeap(A, l, r)
# A = array
# A[l…r-1] = Bereich, der "heap-ifiziert" werden soll
# A[l] = Wurzel, die "versickert" werden soll
```


Beispiel

Eingabe-Array

24	21	23	22	36	29	30	34	28	27

nach **BuildHeap**



Korrektheit von `BuildHeap`

- Schleifeninvariante: zu Beginn jeder Iteration der for-Schleife ist jeder Knoten i+1, i+2, …, n-1 die Wurzel eines Heaps
- Initialisierung:
  - vor der ersten Iteration ist $i = \lfloor n/2 \rfloor$
  - Knoten $\lfloor n/2 \rfloor$, $\lfloor n/2 \rfloor$+1, … n-1 sind Blätter und daher Wurzeln von Heaps
- Erhaltung der Invariante:
  - durch die Schleifeninvariante sind die Kinder des Knotens i Heaps
  - daher macht `DownHeap(i)` aus Knoten i eine Heap-Wurzel (die Heap-Eigenschaft von höher nummerierten Knoten bleibt erhalten)
  - Verminderung von i stellt die Schleifen-Invariante für die nächste Iteration wieder her.

Laufzeit von `BuildHeap`

- lockere obere Schranke (*loose upper bound*):
  - Kosten von einem `DownHeap`-Aufruf × Anzahl von `DownHeap`-Aufrufen → $O(\log(n)) \cdot O(n) = O(n \log(n))$
- engere Schranke (*tighter upper bound*):
  - Kosten für einen Aufruf von `DownHeap` an einem Knoten hängen von seiner Höhe h ab → $O(h)$
  - Knotenhöhe h liegt zwischen 0 und $\lfloor \log(n) \rfloor$ (hier: Blätter = Höhe 0!)
  - Anzahl der Knoten mit Höhe h ist $\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$

- festere Schranke für T(`BuildHeap`):

$$T(\texttt{BuildHeap}) \in \sum_{h=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h)$$

$$= O\left(n \underbrace{\sum_{h=1}^{\lfloor \log(n) \rfloor} \frac{h}{2^h}}_{\leq \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = 2} \right)$$

$$= O(n)$$

→ Erstellt einen Heap von einem unsortierten Array in linearer Zeit!

`HeapSort(A)`

```
HeapSort(A)
BuildHeap(A)
for i in range( len(A)-1, -1, -1):
    A[0] <-> A[i]
    DownHeap(A,0,i)
```

- BuildHeap benötigt $O(n)$ und jeder der n-1 Aufrufe von `DownHeap` benötigt $O(\log(n))$
- daher gilt $T(n) \in O(n + (n\text{-}1) \cdot \log(n)) = O(n \log(n))$

State-of-the-Art für Heapsort-Verfahren

- HEAPSORT (Floyd 1964):
  $$C_{max}(n) = 2n \log n + O(n)$$
- BOTTOM-UP-HEAPSORT (Wegener 1993):
  $$C_{max}(n) = 1,5n \log n + O(n)$$
- WEAK-HEAPSORT (Dutton 1993):
  $$C_{max}(n) = n \log n + 0.1n$$
- RELAXED-HEAPSORT:
  $$C_{max}(n) = n \log n - 0.9n$$

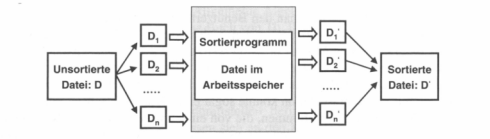
Laufzeitvergleiche

- Laufzeiten der schnellen Sortieralgorithmen
  - zufällige Daten (Laufzeit in Sekunden)
  - Java, 450 MHz Pentium II

	N=1000000	N=2000000	N=3000000	N=4000000
ShellSort	2,5	5,8	9,5	13,2
QuickSort	0,8	1,7	2,6	3,5
MergeSort	2,0	4,1	6,2	8,6
HeapSort	2,5	5,6	9,1	12,7
DistributionSort	0,6	1,2	1,8	2,5

Externes Sortieren

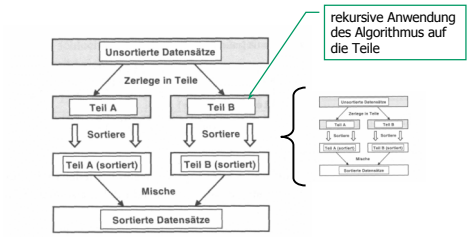
- Was macht man, wenn die Daten nicht alle auf einmal in den Speicher passen?
  - Teile die große, externe Datei D in n Teile D_1, ..., D_n, die jeweils im Speicher intern sortiert werden können
  - die jeweils sortierten Dateien D_1', ..., D_n' werden anschließend zu der insgesamt sortierten Datei D' zusammengemischt
- meist Variante von Mergesort



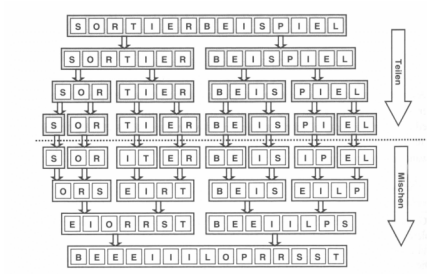
Mergesort

- Idee:
  - teile die ursprüngliche Menge an Datensätzen in zwei Hälften
  - sortiere die beiden Teilmengen
  - mische die beiden sortierten Hälften wieder zusammen (engl. *merge*)
    - wähle dazu das kleinere der beiden Elemente, die an der jeweils ersten Stelle der beiden Datensätze stehen
  - wende das Verfahren rekursiv auf die beiden Hälften an, um diese zu sortieren

- Prinzip



- Beispiel




```
def mergesort( A ):
    return rek_mergesort( A, 0, len(A)-1 )


def rek_mergesort( A, lo, hi ):
    if hi <= lo:
        return
    mid = (lo + hi) / 2
    A1 = rek_mergesort( A, lo, mid )
    A2 = rek_mergesort( A, mid+1, hi )
    return merge( A1, A2 )
```



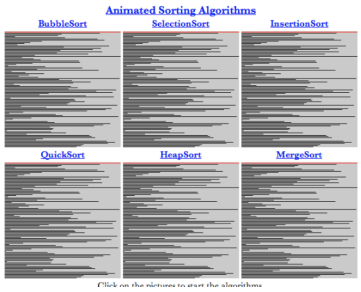
```
def merge(a, b):
    result = []
    if len(a) == 0:  return b
    if len(b) == 0:  return a

    i = j = 0
    while i < len(a) and j < len(b):
        if a[i] <= b[j]:
            result.append( a[i] )
            i += 1
        else:
            result.append( b[j] )
            j += 1

    while i < len(a):
        result.append( a[i] )
    while j < len(b):
        result.append( b[j] )

    return result
```

Eigenschaften

- Algorithmus ist sehr übersichtlich und einfach
- Optimierung:
  - Anlegen von Hilfsarrays kostet Zeit
  - besser ein großes Hilfsarray anlegen und immer wieder benutzen
- *In-place* Sortierung (also ohne Hilfsarray) (aka *in situ*) möglich, aber sehr kompliziert
- Aufwand:
  - N*log(N)
    - log(N) viele Etagen, Aufwand pro Etage proportional N, gilt auch im worst case
- sonst nicht besonders schnell, da viel umkopiert wird

- Vorteile:
  - Besser geeignet, wenn sequentieller Zugriff schnell, und "random" Zugriff langsam (z.B.: Listen, Bänder, langsames RAM aber schneller Cache)
  - Leichter parallelisierbar
  - Stabiler Sortier-Algo

Algorithmus-Animationen



http://www.inf.ethz.ch/~staerk/algorithms/SortAnimation.html

Untere Schranke für allgemeine Sortierverfahren

- Viele Verfahren bis jetzt, manche mit $O(n^2)$ manche mit $O(n \log n)$
- Prinzipielle Frage: wie schnell können wir überhaupt werden?

- Satz:
  Zum Sortieren einer Folge von n Schlüsseln mit einem allgemeinen Sortierverfahren sind im Worst-Case ebenso wie im Average-Case mindestens $\Omega(n \log n)$ Vergleichsoperationen zwischen zwei Schlüsseln erforderlich.

- Beweis durch Modellierung von allgemeinen Sortierverfahren als Entscheidungsbäume

Wichtiges Charakteristikum von allgemeinem Sortieren

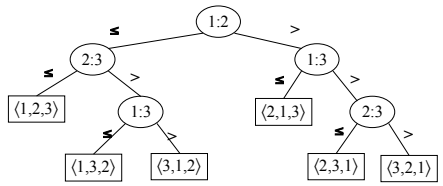
- Allgemeines Sortieren = Vergleichsbasiertes Sortieren:
  - Nur Vergleich von Elementpaaren wird benutzt, um die Ordnung einer Folge zu erhalten
  - Für alle Algos gilt: pro Vergleich eine konstante Anzahl weitere Operationen (z.B. 2 Elemente kopieren, Schleifenzähler erhöhen, ...)
  - → Daher: untere Schranke der Vergleichsanzahl = untere Schranke für die Komplexität eines vergleichsbasiertes Sortieralgorithmus'
- Alle bisher behandelten Sortierverfahren sind vergleichsbasiert
- Die bisher beste Worst-Case-Komplexität ist $O(n \log n)$ (Mergesort, Heapsort)
- Voriger Satz besagt: worst-case Komplexität von Merge- und Heapsort ist optimal (ebenso average-case von Quicksort)

Entscheidungsbaum

- Abstraktion eines Sortierverfahrens durch einen Binärbaum
- Entscheidungsbaum stellt Folge von Vergleichen dar
  - von irgendeinem Sortieralgorithmus
  - für Eingaben einer vorgegebenen Größe
- lässt alles andere (Kontrollfluß und Datenverschiebungen) außer Acht, es werden nur Vergleiche betrachtet
- interne Knoten bekommen Bezeichnung $i:j$ = die Positionen der Elemente im Eingangsfeld, die verglichen werden
- Blätter werden mit Permutationen $\langle \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n) \rangle$ bezeichnet, die der Algorithmus bestimmt

Beispiel

- Entscheidungsbaum für Insertionsort mit drei Elementen



  - beinhaltet 3! = 6 Blätter

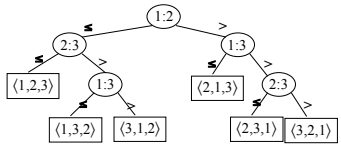
- Ausführen des Sortieralgorithmus' für bestimmte Eingabe entspricht dem Verfolgen eines Weges von der Wurzel zu einem Blatt
- Entscheidungsbaum bildet alle möglichen Ausführungsabläufe ab
- Bei jedem internen Knoten findet ein Vergleich $a_i \le a_j$ statt.
  - für $a_i \le a_j$, folge dem linken Unterbaum
  - sonst, folge dem rechten Unterbaum
- An einem Blatt ist Ordnung $a_{\pi(1)} \le a_{\pi(2)} \le \ldots \le a_{\pi(n)}$ festgelegt.
- Ein korrekter Sortieralgorithmus *muß* alle Permutationen erzeugen können
  - M.a.W.: jede der $n!$ Permutationen muß bei mindestens einem Blatt des Entscheidungsbaumes vorkommen

Untere Schranke für Worst-Case

- Anzahl der Vergleiche im Worst-Case eines Sortieralgorithmus' = Länge des längsten Weges im Entscheidungsbaum von der Wurzel zu irgendeinem Blatt = die Höhe des Entscheidungsbaumes
- untere Schranke für die Laufzeit = untere Schranke für die Höhe aller Entscheidungsbäume, in denen jede Permutation als erreichbares Blatt vorkommt

Beispiel: Optimales Sortierverfahren für drei Elemente

- Der Entscheidungsbaum für das Sortierproblem auf drei Elementen hat
  - 6 Blätter
  - 5 interne Knoten
  - Unabhängig von Anordnung der Knoten: es muß einen Worst-Case-Weg mit einer Länge ≥ 3 geben.



- Satz: Jeder vergleichsbasierte Sortieralgorithmus benötigt $\Omega(n \log n)$ Vergleiche im Worst-Case.
- Beweis:
  - Es reicht, die Höhe eines Entscheidungsbaumes zu bestimmen.
  - h = Höhe, l = Anzahl der Blätter im Entscheidungsbaum
  - Im Entscheidungsbaum für n Elemente gilt: $l \geq n!$
  - Im Binärbaum mit der Höhe h gilt: $l \leq 2^h$
  - also: $n! \leq l \leq 2^h \Rightarrow n! \leq 2^h \Rightarrow h \geq \log(n!)$
  - Stirling Approximation: $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$
  - somit : $h \geq \log(n!) \geq \log\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$
    $= n\log(n) - n\log(e)$
    $= \Omega(n\log(n))$

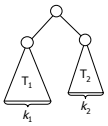
Untere Schranke für Average-Case

- Satz:
  Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren benötigt $\Omega(n \log(n))$ Vergleiche im Mittel (Average-Case)
- Wir beweisen zunächst …
- Lemma:
  Die mittlere Tiefe eines Blattes eines Binärbaumes mit k Blättern ist mindestens $\log_2(k)$.
- Beweis durch Widerspruch
  - Annahme: Lemma ist falsch
  - Sei T der kleinste Binärbaum, der Lemma verletzt; T habe k Blätter

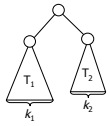
Beweis von Lemma

- $k \geq 2$ muss gelten (Lemma gilt ja für $k = 1$)
- T hat linken Teilbaum T_1 mit k_1 Blättern und rechten Teilbaum T_2 mit k_2 Blättern
  - es gilt $k_1 + k_2 = k$
  - bezeichne mit $\overline{d}(T)$ die mittlere Tiefe von Baum T
  - da $k_1, k_2 < k$ sind, gilt Lemma für T_1, T_2:

$$\overline{d}(T_1) \geq \log(k_1)$$
$$\overline{d}(T_2) \geq \log(k_2)$$



- für jedes Blatt von T gilt: Tiefe dieses Blattes, bezogen auf die Wurzel von T = Tiefe + 1, bezogen auf die Wurzel von T_1 bzw. T_2



- $k\overline{d}(T) = \sum_{\substack{\text{Blätter } b \\ \text{in } T}} \text{Tiefe von } b$
- also:
  Summe aller Blattiefen in T = $k_1\left(\overline{d}(T_1)+1\right) + k_2\left(\overline{d}(T_2)+1\right)$

$$\Rightarrow \overline{d}(T) = \frac{1}{k}\left(k_1(\overline{d}(T_1)+1) + k_2(\overline{d}(T_2)+1)\right)$$
$$\geq \frac{k_1}{k}(\log(k_1)+1)) + \frac{k_2}{k}(\log(k_2)+1))$$
$$= \frac{1}{k}(k_1\log(2k_1) + k_2\log(2k_2)) =: f(k_1, k_2)$$

- Funktion $f(k_1,k_2)$ nimmt, unter der Nebenbedingung $k_1 + k_2 = k$, Minimum bei $k_1 = k_2 = k/2$ an
- also

$$\overline{d}(T) \geq \frac{1}{k}\left(\frac{k}{2}\log(k) + \frac{k}{2}\log(k)\right) = \log(k)$$

- Widerspruch zur Annahme!

Beweis des Satzes

- Mittlere Laufzeit eines Sortierverfahrens = mittlere Tiefe eines Blattes im Entscheidungsbaum
- Entscheidungsbaum hat $k \geq N!$ viele Blätter
- also

$$\overline{d} \geq \log N! \geq \log\left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N}{2}} = \frac{N}{2}\log\left(\frac{N}{2}\right)$$

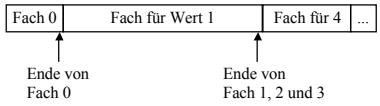
$$\overline{d} \in \Omega(N\log(N))$$

Lineare Sortierverfahren

- Bisherige Sortieralgorithmen basieren auf den Operationen
  - Vergleich zweier Elemente
  - Vertauschen der Elemente
- führt bestenfalls zum Aufwand N·log(N) [schneller geht es nicht]
- Distributionsort: Klasse von Sortierverfahren, die zusätzliche Operationen (neben Vergleichen) verwenden, z.B. arithmetische Operationen, Zählen, Zahldarstellung als Ziffernfolge, …
  - Allgemeines Schema (ganz grob):
    - Verteilung der Daten auf Fächer (*distribute*)
    - Einsammeln der Daten aus den Fächern, wobei Ordnung innerhalb der Fächer erhalten bleiben muß(!) (*gather*)

Counting-Sort

- Vorbedinung: Keys kommen aus einem diskreten Bereich
- Zunächst simple Idee: reserviere für jeden mögl. Wert ein Fach
  - Problem: jedes Fach müsste potentiell Platz für alle Datensätze bieten
- Trick: verwende nur ein Ausgaberarray B und mache die Fächer genau so groß, wie sie benötigt werden. Dazu muß man sich in einem zweiten Array C die Fächergrenzen merken:



Algorithmus

- Annahme: Es gibt einen, dem Algorithmus Countingsort bekannten Parameter k, so daß für die Eingabefolge $(a_1,\ldots,a_n)$ gilt: $\forall i : 0 \le a_i \le k$
- Algorithmusidee:
  1. für alle i, 0 ≤ i ≤k, bestimme Anzahl C_i der a_j mit $a_j \le i$:

$$C_i := \left|\{a_j \in A \mid a_j \le i\}\right|, \quad C_{-1} = 0$$
$$C_i - C_{i-1} = \left|\{a_j \in A \mid a_j = i\}\right|$$

  2. erzeuge Array B, genauso groß wie A
  3. kopiere a_j mit $a_j = i$ in Felder

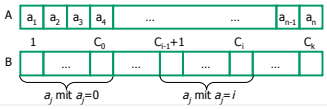


Illustration von Countingsort

```
C = [0] * (k+1)
for j in range( 0, len(A) ):
    C[A[j]] += 1
# C[i] = # elements a_j = i
for i in range( 1, k+1 ):
    C[i] += C[i-1]
# C[i] = # elements a_j <= i
for j in range( len(A), 0 ):
    C[A[j]] -= 1
    B[ C[A[j]] ] = A[j]
```

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	0	1	2	3	4	5
C	2	2	4	7	7	8

	0	1	2	3	4	5
C	2	0	2	3	0	1

Illustration von Countingsort

```
C = [0] * (k+1)
for j in range( 0, len(A) ):
    C[A[j]] += 1
# C[i] = # elements a_j = i
for i in range( 1, k+1 ):
    C[i] += C[i-1]
# C[i] = # elements a_j <= i
for j in range( len(A), 0 ):
    C[A[j]] -= 1
    B[ C[A[j]] ] = A[j]
```

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	2	5	3	0	2	3	0	3

	0	1	2	3	4	5
C	0	2	2	4	7	7

	0	1	2	3	4	5	6	7
B	0	0	2	2	3	3	3	5

Analyse

```
C = [0] * (k+1)                    } O(k)
for j in range( 0, len(A) ):       } O(n)
    C[A[j]] += 1
# C[i] = # elements a_j = i
for i in range( 1, k+1 ):          } O(k)
    C[i] += C[i-1]
# C[i] = # elements a_j <= i
for j in range( len(A), 0 ):       } O(n)
    C[A[j]] -= 1
    B[ C[A[j]] ] = A[j]
```

- Satz: Counting-Sort besitzt Laufzeit $O(n+k)$
- Korrolar: Gilt $k \in O(n)$, so besitzt Counting-Sort Laufzeit $O(n)$