Algebraisieren von Sachkontexten

Die Bedeutsamkeit der Wechselwirkung zwischen relationaler und operationaler Denk – und Sichtweise beim Lernen von Algebra

Dissertation zur
Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat.
der Fakultät für Mathematik an der
Universität Duisburg-Essen
vorgelegt von

Annegret Nydegger - Haas
aus Burgdorf (Schweiz)

Datum der Abgabe: 9. September 2016

1. Gutachterin: Prof. Dr. Bärbel Barzel, Universität Essen
2. Gutachter: Prof. Dr. Andreas Eichler, Universität Kassel

Vorsitzender des Prüfungsausschusses:
Prof. Dr. Anita Winter

Tag der mündlichen Prüfung:
16. November 2016

Teil I Einleitung und Fragestellung

Algebra wird in unserer modernen Gesellschaft an Bedeutung gewinnen.
Sie gilt als Schlüssel, um in der zukünftigen Gesellschaft partizipieren zu können.

> „... because it is not only the gatekeeper to higher mathematics but also "the gatekeeper for citizenship; and people who don't have it are like the people who couldn't read and write in the industrial age" (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi, & Battey, 2007, p. 258)

Die Forderung, *Algebra für alle!,* ist demzufolge eine logische Folgerung. Heymann (Heymann, 1996) präzisiert diesbezüglich, dass Inhalte der Algebra unter dem Gesichtspunkt der Allgemeinbildung zu überprüfen sind. Algebra soll ein taugliches Werkzeug zum Lösen außermathematischer Problemstellungen sein.
Diese Ausrichtung ist jedoch eine große didaktische Herausforderung. Oft können Schulabgängerinnen und Schulabgänger recht sicher Terme und Gleichungen umformen. Sie sind jedoch nicht in der Lage, Algebra zur Klärung und Lösung einfacher Sachsituationen einzusetzen. Konkret ist es für viele Schülerinnen und Schüler schwierig, Texte in der folgenden Art algebraisch wiederzugeben.

> *Beispiel: In einem dreistöckigen Haus wohnen im ersten Stock vier Personen mehr als im Parterre. Im Dachgeschoss wohnen doppelt so viele Personen wie im ersten Stock.*

Für viele Schülerinnen und Schüler ist es schwierig, einen solchen Sachverhalt algebraisch wiederzugeben.
Insbesondere Lehrpersonen, die mit Schülerinnen und Schülern des unteren Leistungsniveaus arbeiten, weisen darauf hin, dass das Anwenden der Algebra in Sachkontexten für viele eine Überforderung ist. Eher könnten die Schülerinnen und Schüler ein regelgeleitetes Umformen erlernen.

Lehrpersonen sind oft ratlos, welche Hilfestellungen sie den Schülerinnen und Schüler anbieten könnten. Ihnen fehlt die entsprechende fachdidaktische Unterstützung, um Lernende in diesem Bereich weiterzubringen und somit die Forderung *Algebra für alle* umzusetzen.

Forschungsanliegen

Trigueros und Ursini weisen pointiert darauf hin, dass sich solche Lernschwierigkeiten nicht einfach damit begründen lassen, dass Algebra für viele zu anspruchsvoll ist.

> We consider that students' difficulties are not of a cognitive or epistemological nature, but that they are a consequence of current didactical approaches.“ Trigueros and Ursini (1999, p. 3)

Demzufolge ist ein Scheitern im Algebraunterricht nicht bloß eine Lern- sondern auch eine Lehrschwierigkeit. Die Fachdidaktik ist gefordert, Zugänge zur Algebra aufzuzeigen, die einen Einstieg auch für Schülerinnen und Schüler des unteren Leistungsniveaus möglich machen. Lernende müssen die Algebra so weit verstehen, dass diese für sie als Werkzeug nutzbar ist, das heißt, dass damit unter anderem auch einfache Sachkontexte algebraisiert werden können.

Sfard (1991) ortet eine Lernschwierigkeit darin, dass algebraische Objekte nicht in ihrer dualen Eigenschaft erfasst werden. Einerseits kann ein Term vernetzend als Beschreibung einer Relation gelesen werden, andererseits steht ein Term aber auch für eine oder mehrere Zahlen, mit welchen operiert werden kann. Dazu braucht es zwei unterschiedliche Denk- oder Sichtweisen, die relationale, also eine vernetzende oder interpretierende und die operationale, mit welcher der Term als Rechenobjekt gedeutet wird.

Um Terme in Anwendungen nutzen zu können, müssen beide Sichtweisen verfügbar sein.

Zielsetzung und Fragestellungen

In der vorliegenden Arbeit werden Unsicherheiten, die beim Algebraisieren eines Sachkontextes auftreten, systematisch untersucht. Die Vermutung, dass sich eine Vielzahl dieser Hürden auf den Wechsel zwischen den beiden Sichtweisen operational und relational zurückführen lässt, ist Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit.

Damit ist die Problemstellung dieser Arbeit eingegrenzt und führt zu folgenden Fragestellungen:

- Inwiefern können die beiden Sicht-, respektive Denkweisen in den beobachteten Lösungsprozessen erfasst werden?
- Gibt es Hinweise, dass die Wechsel zwischen beiden Perspektiven für das Algebraisieren einfacher Sachkontexte bedeutsam sind?
- Welche Unsicherheiten und Schwierigkeiten können in den Lösungsprozessen beobachtet werden, die auf einen fehlenden Wechsel zwischen den beiden Denkweisen zurückzuführen sind?
- Welche Strategien und tragenden Ideen können beobachtet werden, die diesen Wechsel zwischen den beiden Denkweisen unterstützen?
- Lassen sich Umsetzungsideen und didaktische Hinweise für den Unterricht ableiten?

Die vorliegende Arbeit hebt sich von anderen Studien durch eine konsequente Erfassung der beiden Denkweisen innerhalb von Lösungsprozessen ab.

Das dazu entwickelte Modell ermöglicht die komplexen Denkschritte in Lösungsprozessen so weit zu erfassen, dass sich die Bedeutung der beiden Sichtweisen und der Wechsel zwischen ihnen herausschälen lässt und diesbezüglich allgemeine Aussagen zum Lösungsprozess formuliert werden können.

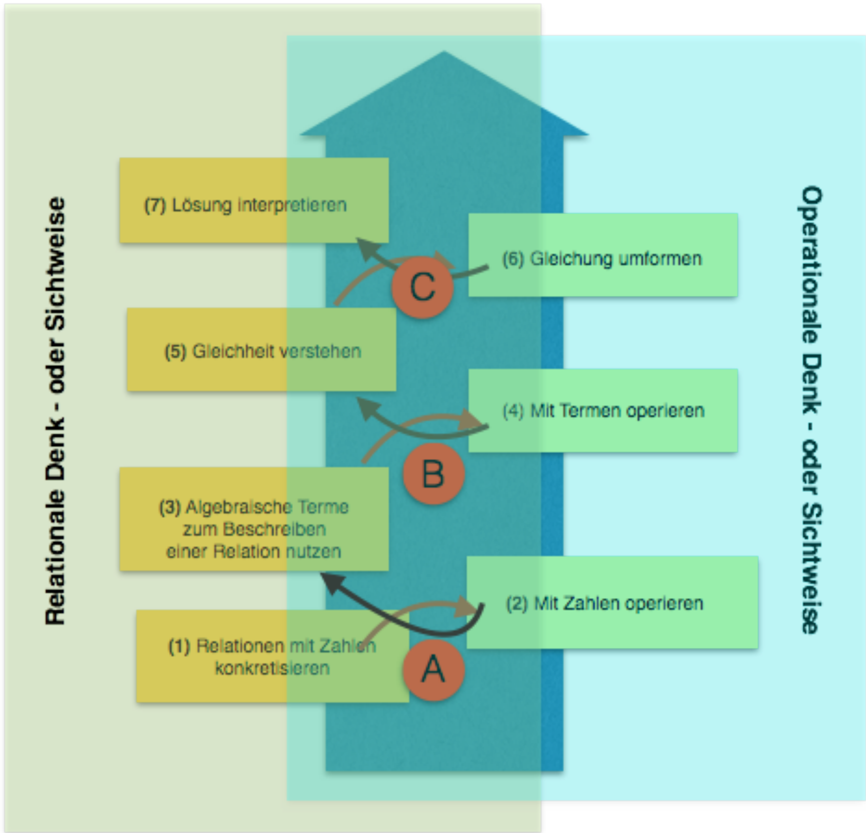


Abbildung 1 Modell der beiden Sichtweisen in einem Algebraisierungsprozess

Mithilfe des Modells wird der Lösungsprozess strukturiert. Einerseits werden die verschiedenen zu durchlaufenden Lösungsschritte (vertikal)ausgehend vom Konkretisieren der Relationen mit Zahlenbeispielen (1) bis hin zum Interpretieren der Lösungen (7) erfasst. Dabei muss immer wieder die Denk-, respektive die Sichtweise gewechselt werden (horizontal). A, B, und C illustrieren die verschiedenen Wechsel zwischen den beiden Denk- und Sichtweisen. Es finden Wechsel (A und C) von der relationalen Perspektive zur operationalen statt. Mathematische Objekte werden aus ihren Vernetzungen und Relationen herausgelöst und umgedeutet, so dass der Term nur noch als Platzhalter für eine Zahl steht. Umgekehrt erfolgt ein Perspektivenwechsel (B), wenn das Objekt, das nur als Platzhalter einer Zahl steht, interpretiert und wieder in einen Kontext eingebunden wird.
Das Modell wird weiter hinten detailliert ausgeführt.

Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist in vier Bereiche unterteilt.

Teil I Einleitung und Fragestellungen

Teil II Theoretische Grundlagen zum Algebraisieren von Sachkontexten

Teil III Datenerhebung und Auswertung

Teil IV Ergebnisse und Umsetzungsvorschläge für die Praxis

Schülerinnen und Schüler verschiedenen Alters und verschiedener Leistungsniveaus werden beim Lösen eines Aufgabensets beobachtet und videografiert, mit dem Ziel, eine möglichst große Vielfalt von Strategien und Unsicherheiten zu erfassen. Diese erhobenen Daten werden anschließend kategoriengeleitet qualitativ analysiert und vor dem Hintergrund theoretischer Erkenntnisse ausgewertet. Zwei Durchgänge, enthaltend eine Datenerhebung und eine Analyse werden zeitverschoben durchgeführt, dazwischen wird das Unterrichtsdesign weiterentwickelt.

Gestützt auf die Analysen werden Ergebnisse herausgearbeitet, die als Grundlage zur Entwicklung von Unterrichtsvorschlägen dienen können. Lehrpersonen sollen dahingehend unterstützt werden, dass Schülerinnen und Schülern ein erleichterter Zugang zur Algebra, fokussiert auf das Algebraisieren von Sachkontexten, ermöglicht werden kann.

Teil II Theoretische Grundlagen zum Algebraisieren von Sachkontexten

Was macht das Algebraisieren von Sachkontexten schwierig?

Verschiedene Aspekte sind für diese Untersuchung bedeutsam. Die Übersicht illustriert den Aufbau des Theorieteils.

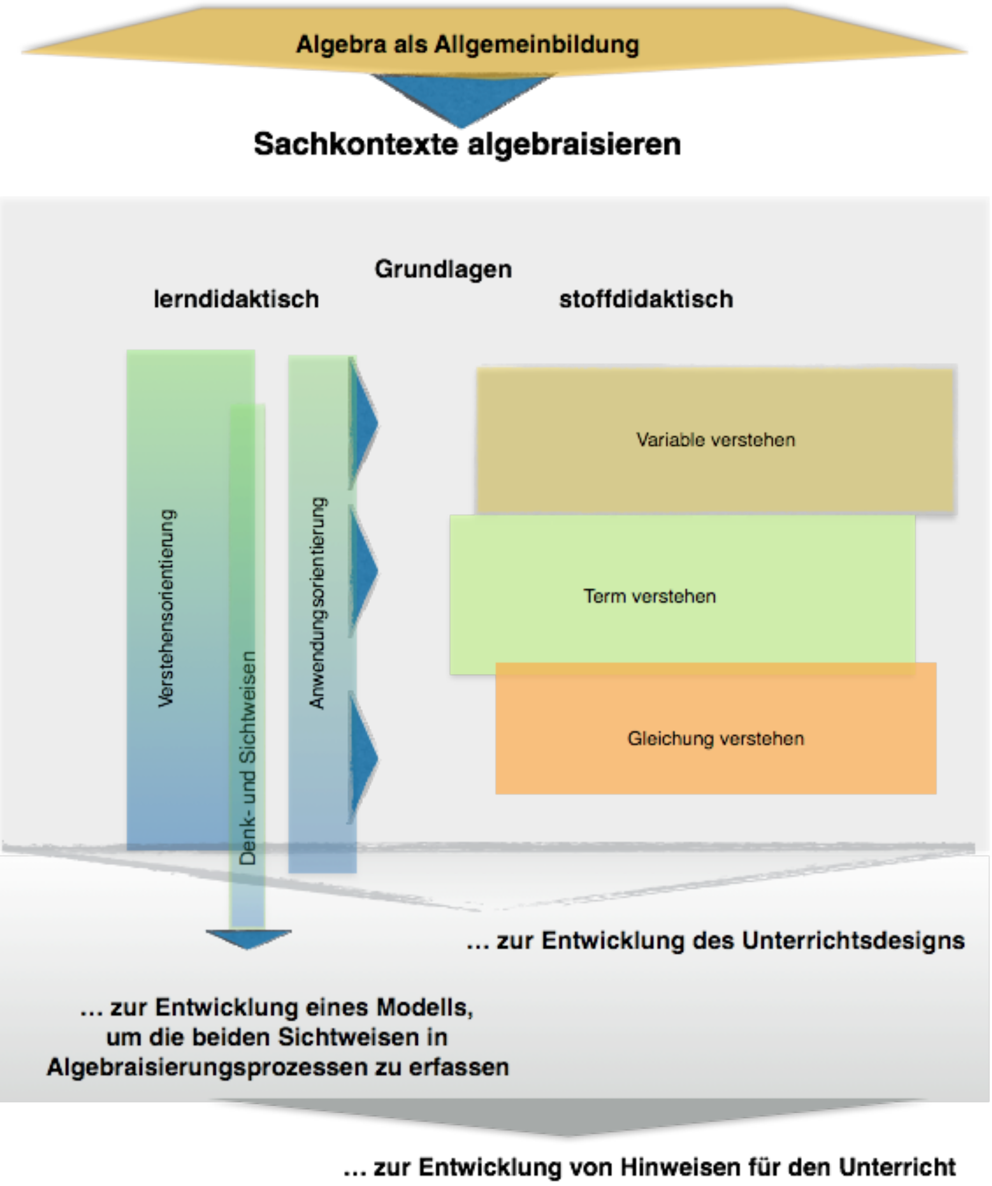


Abbildung 2 Übersicht Theorieteil

Als Ausgangslage wird geklärt, wie Algebra im Zusammenhang mit dieser Arbeit zu deuten ist und inwiefern sie als Allgemeinbildung gelten soll (Algebra als Allgemeinbildung (Heymann, 1996)).

Anschließend folgen theoretische Ausführungen, aufgeteilt in einen *lerndidaktischen* und in einen *stoffdidaktischen* Teil. (Dies wird in der Grafik mit den beiden vertikal getrennten Hälften illustriert.) Die lerndidaktischen Grundlagen enthalten theoretische Erkenntnisse zur Unterstützung von Lern- und Verstehensprozessen. Die Ausführungen zur Stoffdidaktik beinhalten eine Analyse der algebraischen Inhalte und den entsprechenden bekannten Herausforderungen, die beim Erlernen dieser Inhalte auftreten können. Beide Bereiche sind Grundlagen zur Entwicklung des Forschungsdesigns inklusive des Aufgabensettings. Die Theorierecherche bezüglich der beiden Denk- und Sichtweisen *operational und relational* hat dabei eine klärende Funktion. Darauf stützt sich die Entwicklung des Modells, welches zur Interpretation der Datenanalyse eingesetzt wird.

1 Algebra als Allgemeinbildung

1.1 Was ist Algebra?

Mathematik ist die Wissenschaft von Mustern und Strukturen (Devlin, 1998). Das Erkennen von Mustern ist grundsätzlich eine Vereinfachung und hilft, auf einen Schlag eine Vielzahl von Einzelfällen erfassen zu können (Oldenburg, 2013). Diese Abstraktion, ein Trennen der für die Verarbeitung bedeutsamen von den unbedeutenden Eigenschaften, führt hin zu Verallgemeinerungen. Je stärker diese Abstraktion gelingt, desto leichter kann eine Übersicht ausgebaut oder eine Struktur (ein Muster) sichtbar gemacht werden.
Mithilfe der algebraischen Sprache kann erleichtert über Mathematik kommuniziert werden. Komplexe Sachverhalte können knapp und verständlich festgehalten werden. Die Darstellung erfolgt in einer definierten Notationsform. Eine geregelte Verwendung macht es möglich, intuitives Wissen so zu präzisieren, dass die Kommunikation darüber weitgehend eindeutig ist (Cohors-Fresenborg, (2001)).
Algebraische Objekte, die in ihrer Entstehung zuerst noch inhaltsgebunden vorliegen, können aus dem Kontext gelöst werden. Diese Loslösung macht es möglich, mit diesen Objekten zu operieren. Dadurch wird die Vorstellung entlastet. Regeln ermöglichen auch Umgestaltungen. Regelhaftes Umformen kann zu neuen Erkenntnissen führen. Innerhalb der Formelsprache können neue Produkte erzeugt werden.
Alle diese Aspekte machen die Algebra zu einem Werkzeug von besonderer Leistungsfähigkeit. In dem Sinn ist Algebra ein Hilfsmittel zur Unterstützung des Denkens (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015).

Im Folgenden werden mit dem Begriff ‚elementare Algebra' (kurz Algebra) die Inhalte der Schulmathematik bezeichnet. (Malle & Wittmann, 1993).

Historische Rückschau

Algebra zeichnet sich durch einen hohen Abstraktionsgrad aus. Der Blick auf die historische Entwicklung erlaubt, den fortschreitenden Aufbau dieser Abstraktion bewusst zu machen. Diese Loslösungsschritte werden hier in Form einer Treppe illustriert. Von Stufe zu Stufe werden Objekte aus ihren Kontexten herausgeschält, um sie auf einer höheren Stufe regelgeleitet zu verarbeiten. Diese Verarbeitungen machen es möglich, neue Strukturen und somit neue Inhalte zu schaffen. Somit entstehen wieder inhaltsgebundene Objekte, die wiederum eine Stufe höher in einem nächsten Abstraktionsschritt aus dem Inhalt gelöst werden können.

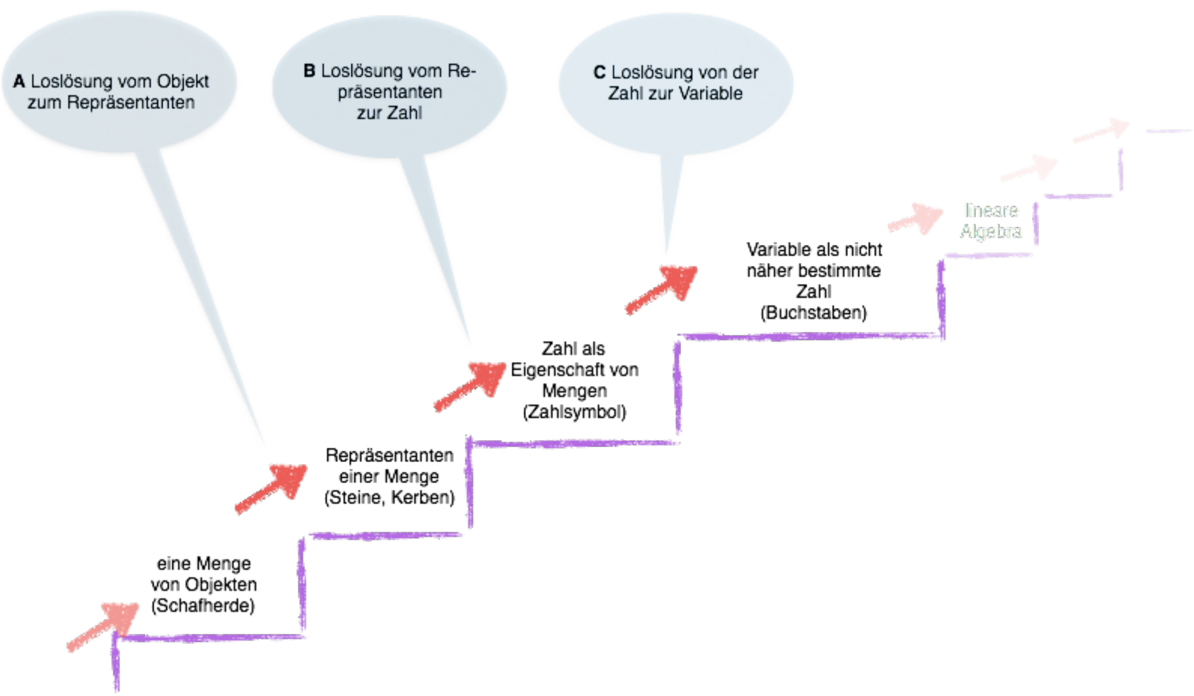


Abbildung 3 Abstraktionsschritte hin zur algebraischen Sprache

Die einzelnen Stufen lassen sich auch (Krämer, 1988) historisch-genetisch erkennen. Nachdem Menschen sesshaft geworden sind und Handel aufkam, wurde es wichtig, Mengen und entsprechende Anzahlen verschiedener Güter

zu erfassen. Die Entwicklungsschritte zur nächst höheren Stufe werden in der Grafik mit den Buchstaben A, B und C gekennzeichnet.
(A) Eine Loslösung vom Objekt zu einem Repräsentanten geschah beispielsweise durch Einritzungen auf Knochen, welche die Kardinalität bestimmter Mengen repräsentierten. So kann etwa eine Anzahl von Objekten mit Kerben auf einem Knochen erfasst werden. Diese Zeichen sind als Verfahren einer Loslösung vom Gegenständlichen zu deuten. Die Kerben lassen keine Rückschlüsse mehr zu auf die Eigenschaften wie Aussehen, Gesundheit, oder Größe der einzelnen Individuen. Die einzige Information, die erhalten bleibt, ist die Anzahl der Objekte. Einzelne Objekte verlieren ihre Eigenschaften bis auf ihre Abzählbarkeit, entsprechend repräsentiert die Menge eine Anzahl.
Als man begann, Ersatzmengen in Form von Muscheln und Steinen zu repräsentieren, wurde auch ein Operieren möglich. Die Zahlen wurden zu eigenständigen Denkobjekten. (Hefendehl-Hebeker & Schwank, 2015).
Dieser *Kniff* der Loslösung von Objekten findet sich im Erstrechenunterricht wieder. Kinder verwenden zum Zählen ihre Finger oder sie legen vorgegebene Anzahlen mit Plättchen. Die Mengen der Plättchen sind vergleichbar, die Plättchen sind verschiebbar, mit ihnen kann operiert werden. Beispielsweise können Plättchen, im Gegensatz zu den in der Situation gezeichneten Kindern auf dem Spielplatz, hin und her geschoben werden. Damit wird ein handelnder Zugang zum Ergründen der Rechenoperationen eröffnet.
(B) Erst wenn anstelle der Repräsentanten Zahlsymbole eingesetzt und gedeutet werden, kann von einer Zahlvorstellung die Rede sein (Krämer, 1988). Dieser Schritt kann als Loslösung von Repräsentanten hin zu Zahlen gedeutet werden. Damit können nun Operationen allgemein und regelgeleitet durchgeführt werden.
Dies ist die erste große Errungenschaft der Mathematik. Zahlen gehören mittlerweile so selbstverständlich zu unserem Kulturgut, dass wir uns oft nicht mehr bewusst sind, welch großen Entwicklungsschritt sie darstellen. Situationen werden aus ihrem Kontext gelöst und auf den mathematischen

Gehalt reduziert. Auf diese Weise können Problemstellungen berechenbar und vergleichbar gemacht werden (Bruder, Hefendehl-Hebecker, Schmidt-Thieme, & Weigand, 2013, p. 75).

(C) Von der Arithmetik zur Algebra erfolgt ein weiterer großer Abstraktionsschritt, die Loslösung von Zahlen hin zu Variablen. Im Gegensatz zur Loslösung der Zahlen vom Gegenständlichen, werden nun Variablen und Terme von bestimmten Zahlwerten gelöst. Dieser Abstraktionsschritt wird als Einkapselung (*encapsulation*, beispielsweise Sfard (1994)) bezeichnet. Mit der Sprache der Algebra steht ein Instrument zur Verfügung, mit welchem nicht nur bestimmte Zahlen, sondern beliebig gewählte oder nicht näher bestimmte Zahlen oder Muster von Zahlen beschrieben werden können. Quantifizierbare Situationen lassen sich auf diese Weise allgemein beschreiben.

Das Bewusstmachen dieser historischen Entwicklungsschritte soll didaktische Überlegungen, im Sinne eines genetischen Lernens (Wagenschein, 1966) stützen. Der Aufbau der Fachsprache muss sorgfältig erfolgen. Die verschiedenen Loslösungsprozesse sind, historisch gesehen, in einer langen Entwicklungszeit entstanden. Dies lässt vermuten, dass im Unterricht Abstraktionsschritten dieser Art genügend Zeit eingeräumt werden muss und dass sie die entsprechende Aufmerksamkeit benötigen.

> „So wie sich im Arithmetikunterricht die Zahlen und Zahloperationen allmählich vom Handeln mit Gegenständen lösen, müsste sich im Algebraunterricht das Rechnen von speziellen Zahlwerten lösen und die Aufmerksamkeit auf die Erfassung von Mustern verlagern." *(Hefendehl-Hebeker, 2003, p. 7)*

Als didaktische Konsequenz lässt sich aus der historischen Entwicklung ableiten, dass ein Untersuchen der algebraisch beschriebenen Muster auf der unteren Abstraktionsebene, der Zahlebene, unterstützend sein kann. Dadurch werden die mathematischen Objekte wieder aus den

Verallgemeinerungen herausgelöst und auf diese Weise überprüfbar und verständlich gemacht.

Die Dualität der Mathematik und Algebraisches Denken

Algebra ist die zentrale Sprache der Mathematik. Mit ihren Zeichen und Ausdrücken werden Sachverhalte knapp und stringent beschrieben. Sie ist die Sprache der Verallgemeinerungen und Systematisierungen und hat dadurch diesen bedeutsamen, unverzichtbaren formalen Charakter. Das Operieren mit Begriffen und Gedanken wird durch regelgeleitetes Operieren ersetzt. Regeln und Verfahren entlasten unser Denken und erlauben eine Vereinfachung und Präzisierung der Denkschritte (Wittmann & Müller, 2008). Formales ist objektiver und überprüfbarer, weil es aus den Interpretationen gelöst ist.

Neben dieser operationalen Perspektive kann Mathematik auch als referentielles System betrachtet werden (Heymann, 1996, p. 220). Mit mathematischen Symbolen wird nicht nur operiert, sie dienen auch dazu, Sachverhalte zu modellieren. Dies ist sowohl bei innermathematischen wie auch in außermathematischen Problem-stellungen möglich.
Kognitive Leistungen, die im Bereich des referentiellen Systems liegen, werden in der Fachdidaktik als *algebraisches Denken* bezeichnet. Dieses beinhaltet vernetzendes Denken und kontrastiert den Begriff des Kalküls.
Der Begriff algebraisches Denken wird insbesondere dazu verwendet, um eine Deutungserweiterung der elementaren Algebra bewusst zu machen. Die Schulalgebra soll nicht nur die formale Sprache fokussieren und im Unterricht hauptsächlich das Beherrschen von Regeln und Umformungen thematisieren. Wird algebraisches Denken eingefordert, so müssen Lernangebote vorliegen, mit welchen Zusammenhänge untersucht oder entdeckt werden können.

Allgemeine Denkhandlungen, die auch dem algebraischen Denken zugeschrieben werden, sind beispielsweise Strukturieren, Systematisieren, Verallgemeinern, Abstrahieren, Konkretisieren, Darstellen, ... Sie sind Teil unseres Alltagsdenkens und kommen auch in anderen Schulfächern zum Tragen. Sie werden jedoch im Fach Mathematik in besonderem Maß *kultiviert* (Hefendehl-Hebeker, 2007, p. 5).

Als spezifisch algebraische Denkhandlungen gelten unter anderen

- Mathematisieren: Außermathematische Kontexte mathematisch beschreiben und umgekehrt mathematische Terme oder Gleichungen Sachkontexten zuordnen können (deencapsulation und encapsulation, (Sfard, 1991)).
- Mathematische Muster untersuchen und neue Muster entwickeln.
- Rechenregeln und mathematische Modelle untersuchen und verstehen (Hefendehl-Hebeker, 2007, p. 5).

Verschiedene Studien weisen darauf hin, dass ein gezielter Aufbau des algebraischen Denkens bereits in der Primarschule erfolgen kann. Die Studie von Jacobs (2007) beispielsweise beschäftigt sich mit dem algebraischen Denken von Schülerinnen und Schülern der Primarstufe. Es können positive Effekte sowohl bei der Entwicklung des algebraischen Denkens der Schülerinnen und Schüler wie auch in der Lehrerweiterbildung ausgewiesen werden. Die teilnehmenden Lehrpersonen kennen, im Gegensatz zu den nicht teilnehmenden, eine breitere Palette an möglichen Strategien, insbesondere solche, die auch eine Reflexion im Gebrauch des algebraischen Denkens anstoßen. Auch die Schülerinnen und Schüler, die an der betreffenden Studie teilgenommen haben, verstehen das Gleichheitszeichen signifikant besser. Sie können während des Interviews besser ihre Vorgehensweisen beim Lösen der Aufgaben reflektieren, als die nicht teilnehmenden.

Solche Ergebnisse bestärken die schon breit akzeptierte Forderung, algebraisches Denken auch in der Primarschule zu thematisieren.

1.2 Algebra als Teil der Allgemeinbildung

Algebra ist der Schlüssel zur Zukunft einer gerechten Gesellschaft. Mit diesem Statement betonen Moses und Cobb (2001), dass Algebra nicht nur für solche wichtig ist, die sich später mit höherer Mathematik beschäftigen wollen. Algebraische Inhalte sollen Teil der Allgemeinbildung sein. So wie vor 150 Jahren die Herausforderung bestand, den Schülerinnen und Schülern einen Zugang zum Lesen und Schreiben zu ermöglichen, ist nun die Didaktik gefordert, Inhalte der Algebra so bereitzustellen, dass sie von der Mehrheit der Schülerinnen und Schüler aufgenommen und verstanden werden kann.

Diese Forderung ist neu und entspricht bis heute nicht den Traditionen. So waren Inhalte der elementaren Algebra noch bis vor kurzem nur für das höhere Leistungsniveau der Volksschule bestimmt. Zum Beispiel finden sich im Lehrplan des Kantons Bern von 1983, der bis 1995 seine Gültigkeit hatte, für das untere Leistungsniveau (das waren ca. 50% aller Schülerinnen und Schüler) keine obligatorischen Lernziele im Bereich der elementaren Algebra. Ein ähnliches Bild zeigt sich auch in Deutschland. Man traute den Hauptschülern das Verstehen von Algebra nicht zu (Vollrath & Weigand, 1994, p. 17).
In den letzten 20 Jahren scheint sich der Konsens herauszukristallisieren, dass Algebra als obligatorisches Bildungsziel gelten soll. In aktuellen Katalogen zu Bildungsstandards (zum Beispiel Harmos [1]) wie auch in Lehrplänen gehören die Inhalte der elementaren Algebra zu den allgemeinen Bildungszielen. Zum Beispiel im Lehrplan 21 der Schweiz wird der Kompetenzbereich *Zahl und Variable* aufgeführt. Explizit werden ein Grundverständnis für Zahlen, Operationen und Terme als Bildungsinhalte

[1] Das Harmos – Konkordat ist eine schweizerische, interkantonale Vereinbarung über die Harmonisierung der obligatorischen Schule und enthält Bestimmungen zur Dauer und zu den Zielen der Bildungsstufen.

gefordert, mit dem Ziel, sich in der Welt von heute orientieren zu können (EDK, 2015, p. MA 5).
Schülerinnen und Schüler sollen die Formelsprache verstehen und richtig anwenden können. Dazu braucht es ein grundlegendes Verständnis von Variable und Term. Die Algebra muss als Ausdruckmittel verfügbar sein, damit sie in Anwendungsbereichen wie etwa in der Technik oder im Rechnungswesen als hilfreiches Instrument eingesetzt werden kann (Vollrath & Weigand, 1994, p. 14).

Im Weiteren kann die Algebra auch ein Hilfsmittel sein, um Grundlegendes der Mathematik besser zu verstehen, wie beispielsweise ein Grundverständnis im Bereich der Rechenoperationen.
Entsprechende Vorstellungen können mithilfe der Algebra ausgeweitet und aufgebaut werden, wie etwa

- Mithilfe der Algebra kann der Aufbau des Dezimalsystems geklärt werden. Die algebraische Schreibweise macht die Strukturen des Dezimalsystems sichtbar. Eine zweistellige Zahl wird algebraisch mit 10 a + b beschrieben. In dieser Darstellung bleibt die Struktur des Dezimalsystems sichtbar.
- Mithilfe von Termen werden Operationen allgemein beschrieben. Dabei sind die Zahlen im Hintergrund, die Struktur der Operation rückt in den Vordergrund.. So können Überlegungen der Art: Welche Zahlenbeispiele beschreibt der Term ‚2a/2' ?, die Idee der Umkehroperation thematisieren.

Wichtige, allgemeine Denkhandlungen, wie Generalisieren, Abstrahieren, Analysieren, Strukturieren werden dabei praktiziert (Schwank & Nowinska, 2007).

Insbesondere gewinnt Algebra im Hinblick auf die Entwicklung von elektronischen Hilfsmitteln an Bedeutung, etwa zur Nutzung von Tabellen-

kalkulationsprogrammen. Algebra ist eine Schnittstelle zwischen Computer und Mathematik (Oldenburg, 2013). Der Computer bietet Möglichkeiten, modellhaft gegenseitige Vernetzungen und Veränderungen verschiedener Größen zu untersuchen. Die dabei entstehenden Muster können wiederum algebraisch gefasst und zu verallgemeinernden Erkenntnissen geführt werden. Elektronische Hilfsmittel im Mathematikunterricht eingesetzt verändern dementsprechend dessen Inhalte. Sie erleichtern das Umformen und Lösen von Gleichungen. Umformen von komplexeren Termen und das Lösen von Gleichungen übernimmt die Technologie. Die Kalkülorientierung verliert zugunsten der Verständnisorientierung an Bedeutung. Der Computer entlastet vom Kalkül und schafft neue Freiräume. Diese können reichhaltig genutzt werden, wenn auf ein entsprechend ausgebautes algebraisches Grundverständnis zurückgegriffen werden kann.
In einer Expertise von Barzel wird darauf hingewiesen, dass mit dem Aufkommen der elektronischen Hilfsmittel in der Schule eine Akzentverschiebung im Unterricht einhergeht. Die Kalkülorientierung rückt zugunsten einer Stärkung eines vernetzenden Denkens in den Hintergrund (Zeller & Barzel, 2011, p. 51).

Aufgrund der sich verändernden Gesellschaft müssen Bildungsziele permanent überprüft (Heymann, 1996, p. 29) und angepasst werden. Dies wird unter anderem auch im Lehrplan 21 der Schweiz gefordert. Dieser weist auf den Gesellschaftswandel hin, der in der letzten Zeit eine Veränderung der Arbeitsplätze zur Folge hatte. Daten und Ergebnisse wurden vor Jahren noch durch Menschen erhoben. Heutzutage werden automatisierbare Abläufe von Computern und Maschinen ausgeführt. Andere Tätigkeiten wie ein Recherchieren, Interpretieren und Vernetzen rücken stärker in den Vordergrund.

> „In Beruf und Freizeit bestehen mathematische Herausforderungen heute vermehrt darin, Daten einzugeben, zu beurteilen, in Beziehung

> zu setzen, zu interpretieren und zu kommunizieren.“ (EDK, 2015, p. MA 1)

Heymann (1996) fordert, dass Inhalte der Algebra unter dem Gesichtspunkt der Allgemeinbildung zu überprüfen sind. Algebra soll als taugliches Werkzeug nutzbar sein, um außermathematische Problemstellungen lösen zu können. Dabei sollen Lernende aktiv und konstruierend Problemstellungen angehen. Mathematik soll ein Verstärker des Alltagsdenkens sein (Heymann, 1996, p. 279).

Die Erweiterung der Bildungsziele, *Algebra für alle,* ist jedoch nicht ganz unproblematisch. Der heutige Algebraunterricht wird stark kritisiert. Verschiedene Didaktiker und Didaktikerinnen weisen auf dieses Problemfeld hin.
Heymann beanstandet, dass ein Lernen von Formeln, die man nicht versteht, die Denkfähigkeit eher einschläfert als anregt, geschweige denn zu einem kritischen Denken beiträgt (Heymann, 1996, p. 102).
Fischer schreibt im Zusammenhang mit der Kritik am Algebraunterricht von erlebter Sinnlosigkeit (Fischer, Hefendehl-Hebeker, & Prediger, 2010) und Schwank weist darauf hin, dass die großartige Errungenschaft der Algebra sich als Fluch erweisen kann, wenn sie zu einer sinnarmen Schreibtätigkeit verkommt. Dann, so Schwank, ebnet sie den Weg zur Entwicklung geistiger Schwäche (Schwank & Nowinska, 2007, p. 4).

In sechs Jahren Algebraunterricht wird viel Zeit und Energie verwendet. Die Bilanz Aufwand und Ertrag fällt dementsprechend schlecht aus, insbesondere im Bereich der Anwendung der Algebra.

> „The dissatisfaction with the teaching of Algebra, the recognition of the importance of algebraic habit of minds and the necessity of making the study of Algebra more accessible to all students have led to

> mathematics educators to look for more effective ways of teaching Algebra.“ (Jacobs et al., 2007)

Die didaktischen Probleme der elementaren Algebra sind bekannt. Prediger legt dar, dass die zu starke Gewichtung der Kalkülorientierung im Mathematikunterricht schon ein solch bekanntes Allgemeingut ist, dass man nicht weiter darauf eingehen muss (Prediger, 2003, p. 6).

In der Praxis konnte und kann jedoch zu großen Teilen noch nicht entsprechend reagiert werden. Einige Lehrpersonen stützen sich beim Aufbau der Inhalte der elementaren Algebra auf eine eher behavioristisch geprägte Lerntheorie. Das illustrieren Aussagen aus der Praxis:

- Die Inhalte der elementaren Algebra können nicht selber entdeckt werden. Diese müssen vermittelt werden.
- Eine Sprache muss zuerst gelernt werden, bevor man mit ihr kommunizieren kann. (Eng geführtes schrittweises Erarbeiten der Inhalte, siehe alte Lehrmittel z.B. Algebra 1, Kanton Bern...)
- Sachkontexte sind zu komplex. Sie können erst algebraisch erfasst werden, wenn man über die Grundkenntnisse der algebraischen Sprache verfügt. Somit können Anwendungen im Unterricht erst später, wenn eine Sicherheit im Sprachgebrauch erarbeitet ist, thematisiert werden.
- Das Umformen und Lösen von Gleichungen ist einfacher als das Algebraisieren von Sachkontexten. Mit leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern können höchstens diese Lerninhalte erarbeitet werden.

Lehrer - Überzeugungen dieser Art machen es namentlich für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler besonders schwierig, einen Zugang zu den Grundlagen der elementaren Algebra zu finden. Die Lernenden sind auf einen sorgfältigen Aufbau angewiesen, so dass sie

genügend Zeit und gute Gelegenheiten erhalten, die neuen Lerninhalte mit dem eigenen Wissen und den Erfahrungen zu vernetzen. Ihnen müssen vielfältige Möglichkeiten geboten werden, um entsprechende Sinnzusammenhänge erkennen zu können. Im Sinne des algebraischen Denkens muss zuerst der Aufbau von Verständnis und Vorstellungen im Vordergrund stehen, bevor regelgeleitetes Umformen und ‚Gleichungen Lösen' geübt werden soll (Prediger, 2009).
Wenn Verständnisorientierung und Sinnhaftigkeit für diese Schülerinnen und Schüler nicht eingelöst werden, ist die Gefahr groß, dass die Forderung *Algebra für alle* zu einem *Leidensweg* für Lernschwächere wird. Einmal mehr müssen sie sich im Unterricht mit Inhalten auseinandersetzen, die aus ihrer Sicht keinen Sinn ergeben und die sie so nicht verstehen. Damit werden sie in ihren negativen Überzeugungen bestärkt, dass sie wohl zu dumm sind, um diese Inhalte zu verstehen.

Es ist eine Aufgabe der Didaktiker und Didaktikerinnen Wege aufzuzeigen, in welcher Form Zugänge zur Algebra für alle möglich sind und wie entsprechende Grundvorstellungen aufgebaut werden können. Angebracht ist eine ‚angemessene Differenzierung' (Vollrath & Weigand, 1994, p. 17). Leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler sollen sich vermehrt mit Verständnisaufbau und Anwendungsorientierung auseinandersetzen. Unterstützt mit elektronischen Werkzeugen (z.B. Tabellenkalkulationen) können sie Erfahrungen zu Strukturierungen, Verallgemeinerungen und Generalisierungen machen. Parallel dazu lernen sie einfache Sachkontexte zu algebraisieren. Nur so sind sie in der Lage zu erkennen, wozu Algebra in Alltagssituationen nützlich ist und wie Algebra als Verstärker des Alltagsdenkens genutzt werden kann.
In diesem Sinn hat die Anwendungsorientierung eine besondere Bedeutung. Übersetzungen vom Sachkontext zum Term (und umgekehrt) nehmen eine Schlüsselstelle ein. Wer diese Hürde nicht schafft, für den werden Fertigkeiten wie Umformen von Termen und Auflösen von Gleichungen zu

‚toten Lerninhalten’ (Malle & Wittmann, 1993). Sie verlieren im Bereich der Alltagsmathematik ihre Bedeutung.

Zusammengefasst: Die Grundlagen der elementaren Algebra sind so bedeutsam, dass sie als allgemeine Bildungsziele gelten sollen. Verständnisorientierung und Sinnhaftigkeit müssen jedoch als Leitgedanken die Unterrichtskultur prägen.
Dazu gehören unter anderen folgende Elemente:

- Generalisierungen und Begründungen müssen bewusst angebahnt und nachhaltig eingefordert werden
- Die formale Sprache muss sorgfältig aufgebaut werden und die verschiedenen algebraischen Objekte sind bewusst zu diskutieren
- Es müssen vielfältige Gelegenheiten geboten und reflektiert werden, um Algebra als nützliches Werkzeug kennen zu lernen

Das Algebraisieren von Sachkontexen ist dabei bedeutsam. Algebra ist ein Hilfsmittel zur Strukturierung von Sachkontexten. Davon ausgehend können Sinnzusammenhänge aufgezeigt und Verstehensorientierung unterstützt werden.

2 Lerndidaktische Grundlagen zum Algebraisieren von Sachkontexten

Um der Frage, ‚Was macht das Algebraisieren von Sachkontexten schwierig?', nachzugehen, werden entsprechende theoretische Grundlagen aufgearbeitet.

Im Abschnitt *Verstehensorientierung* wird das zugrunde gelegte Lernverständnis geklärt. Ergänzend sind theoretische Erkenntnisse zu *Sprachen und Sprachebenen* und *Vorstellungen und Vorstellungsumbrüche* zusammengefasst. Eine Recherche zu theoretischen Ausführungen im Bereich *Denk- und Sichtweisen* wird zur Klärung beigezogen.
Der Abschnitt *Anwendungsorientierung* umfasst Beschreibungen zu Formen des Anwendens. In einer didaktischen Diskussion zu Anwendungsaufgaben werden Aufgaben, die auf einen bestimmten mathematischen Inhalt fokussieren und offene, eher projektartige Aufgaben, bei welchen das Modellieren im Zentrum steht, dargelegt.

2.1 Verstehensorientierung

Lernen ist ein komplexer Prozess. Roth beschreibt Lernen als aktive Bedeutungserzeugung und weist darauf hin, dass dieser Prozess in jedem Gehirn viel unterschiedlicher abläuft, *„als wir alle wahrhaben wollen"* (G. Roth, 2004, p. 496). Nach heutigem Erkenntnisstand der Mathematikdidaktik werden vernetztes Wissen und Kompetenzen durch aktive Auseinandersetzung mit reichhaltigen Problemstellungen aufgebaut. Diese Erkenntnis stützt sich auf ein ‚moderat – konstruktivistisches Lernverständnis'. (Gerstenmaier & Mandl, 2000).

Wittmann (1990, S. 153) beschreibt den Wechsel von behavioristischem hin zu einem konstruktivistischen Lernverständnis aus Schülersicht und aus der Unterrichtsperspektive. Der Schüler stellt sich nicht mehr auf Empfangen ein, sondern auf Erarbeiten und die Lehrperson wird weniger Vorgehen und Methoden anleiten, ihre Aufgabe zeichnet sich durch Organisation und Aktivität aus (Wittmann, 1990).

Lernen ist zu großen Teilen selbstgesteuert. Verstehen ist, im Sinne eines konstruktivistischen Lernverständnisses, eine Sinnkonstruktion. Verstehen kann sich auf unterschiedliche Themenbereiche beziehen. Redewendungen wie *Ich verstehe einen Menschen, Ich verstehe eine Sprache, Ich verstehe einen Text, Ich verstehe komplexe Zusammenhänge*, usw. zeigen die Deutungsvielfalt auf.
Mathematisches Verstehen bezieht sich auf grundlegende Phänomene der Mathematik, auf ein Bewusstmachen von Strukturen und auf das Erkennen ihrer Zusammenhänge. Es geht nicht nur um die Kenntnis eines Sachverhalts sondern darum, den Sachverhalt zu durchdringen und ihn mit anderem Wissen zu vernetzen. Es ist davon auszugehen, dass Konstruktion von Verstehen am eigenen Vorwissen anknüpft und somit eng an Sinnhaftigkeit und an das Erkennen von Sinnzusammenhängen gekoppelt ist.

Sinnzusammenhänge

Lernende sind darauf angewiesen, dass eigenes Denken und Wissen aktiviert werden und dadurch eine Sinnstiftung geschaffen werden kann. Fehlende Sinnzusammenhänge führen zu unerwünschtem Schülerverhalten. So beschreibt zum Beispiel Baruk (1989) das *Kapitänssyndrom.* Schülerinnen und Schüler führen in Textaufgaben Berechnungen durch, losgelöst vom Aufgabenkontext. Die Rechenoperationen werden nicht entsprechend dem Kontext gewählt, sondern so, dass diese für die Lernenden rechenbar sind. Sie stellen nicht die Frage, ob der vorgegebene Kontext überhaupt berechenbar ist.

Ein ähnliches Phänomen lässt sich in der Praxis beobachten. Oft benutzen Schülerinnen und Schüler den Rechner recht planlos und probieren aus, ob auf die eine oder andere Weise ein plausibles Resultat erzeugt werden kann. Beide Vorgehensweisen deuten darauf hin, dass Sachkontexte und mathematische Bearbeitung nicht vernetzt werden.

Fehlende Sinnstiftung im Unterricht ist insbesondere auch beim Aufbau der algebraischen Inhalte zu kritisieren. Forderungen nach Handlungserfahrungen und Möglichkeiten zum Anknüpfen an das Vorwissen, sind in der heutigen Praxis nur in Ansätzen oder kaum erfüllt. Oft wird ein losgelöster Formalismus eingeübt anstelle einer verständnisorientierten Auseinandersetzung mit den Inhalten (Barzel, 2006; Fischer et al., 2010; Heymann, 1996; Malle & Wittmann, 1993). Schülerinnen und Schüler führen Umformungen durch, ohne entsprechende Zusammenhänge zu erkennen.

Ein Sinnzusammenhang kann mit geeigneten Unterrichtsformen gestärkt werden, dies sind beispielsweise:

- Das Vorwissen der Lernenden muss miteinbezogen werden.
- Individuelle Lösungen bieten Raum, um die Lernenden aktiv in Lösungsprozessen zu beteiligen (Schütte, 1994).
- Sinnvolle Verbindungen von Handlungen und Darstellungen helfen, Sachverhalte individuell zu durchdringen (Schütte, 1994).
- Die Aufgaben sollen zum mathematischen Denken anspornen. Diskussionen über Zusammenhänge und Vernetzungen des Lerngegenstandes können unterstützend wirken.
- Das Erfinden eigener Aufgaben zum gleichen mathematischen Inhalt fordert eine Auseinandersetzung mit der Struktur. Sind die Schülerinnen und Schüler gefordert, einfache und anspruchsvolle Aufgaben zu entwickeln und ihr Vorgehen zu begründen, wird dabei die Reflexionsebene gestärkt.

Um mathematische Inhalte in Sinnzusammenhängen zu betrachten, sind Aufgaben von einer angemessenen Komplexität gefordert. Hier liegt womöglich eine didaktische Hürde. Lehrpersonen, die ihren Schülerinnen und Schülern nur wenig zutrauen, zergliedern den Inhalt stark und ‚verabreichen' diesen den Lernenden in kleinsten Teilschritten. Eine solche Anwendung des didaktischen Prinzips der kleinsten Teilschritte könnte auch aus einer Sorge begründet werden, dass zum Erlernen der mathematischen Inhalte zu wenig Zeit zur Verfügung steht. Es scheint, dass die Lernenden auf diese Weise die mathematischen Inhalte schneller verarbeiten können. Was aber im Widerspruch zu einem moderat – konstruktivistischen Lernverständnis steht. Obwohl bei den ersten Auseinandersetzungen mit dem Lerninhalt mehr Zeit *verloren* geht als beim schrittweisen Erlernen, lohnt sich dieses Vorgehen. Dadurch werden Möglichkeiten geschaffen, um am eigenen Vorwissen anknüpfen zu können und einen Sinnzusammenhang zu erzeugen. Dadurch, dass die Inhalte stärker vernetzt werden, ist auch das Lernen nachhaltiger.

> „Das Lernen in Sinnzusammenhängen stellt nämlich keine Erschwerung oder Zeitverschwendung dar, sondern kann ganz im Gegenteil zu einer Verringerung des Stoffdruckes führen." (Selter, 1994)

Auch Hahn und Prediger (2008) betonen, dass Wissen aus einem individuellen aktiven Konstruktionsprozess hervorgeht. Demzufolge müssen Lernumgebungen angeboten werden, in denen eigene Konstruktionsleistungen möglich sind und die Schülerinnen und Schüler kontextgebunden lernen können.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Verstehen, im Sinne eines konstruktivistischen Lernverständnisses, eine Sinnkonstruktion ist und somit eng an Sinnhaftigkeit und das Erkennen von Sinnzusammenhängen gekoppelt ist. Es geht nicht nur um die Kenntnisnahme eines Sachverhalts sondern darum, den Sachverhalt zu durchdringen und ihn mit anderem Wissen zu vernetzen.

Als Leitidee des Unterrichtens muss die Forderung von Wagenschein (1965) gelten: „Verstehen des Verstehbaren ist ein Menschenrecht.“ Dies einzulösen ist, insbesondere im Algebraunterricht, eine große didaktische Herausforderung.

2.1.1 Sprachen und Sprachebenen

Die Sprache ist für den Verstehensprozess zentral. Dabei sind zwei verschiedene Ebenen bedeutsam. Gallin (1998) nennt die beiden Sprachebenen die *singuläre* und die *reguläre*. Wagenschein (1965) spricht von der *Sprache des Verstehens* und der *Sprache des Verstandenen*.

Die singuläre Sprache steht für die Umgangssprache, die eine regional verwendete Sprache des Alltags ist. Weitere Begriffe für *Umgangssprache* (Malle & Wittmann, 1993, p. 44) sind *Gemeinsprache* (Siebel, 2005, p. 102), *Muttersprache*, *Unterrichtssprache* (Baruk 1985), *natürliche Sprache* (Siebel, 2005, p. 105) oder wie oben erwähnt, die Sprache des Verstehens nach Wagenschein.

Die Umgangssprache entwickelt sich sowohl historisch – kulturell wie auch bei jedem Menschen individuell. Sie ist Ausgangspunkt der Sprachentwicklung. Das eigene Vorwissen ist in dieser singulären Sprache verfügbar. Das heißt, der Verstehensprozess geht vom Singulären aus, von individuellen Vorstellungen, formuliert in der Sprache der Lernenden (Gallin & Ruf, 1998).

Die mathematische Sprache, die reguläre oder die Sprache des Verstandenen, ist normiert. Sie ist ein Hilfsmittel, um Strukturen zu verallgemeinern und Sachverhalte zu beschreiben. Zudem ist sie ein wichtiges Kommunikationsinstrument, um wissenschaftliche Erkenntnisse zu beschreiben und neue Erkenntnisse zu erforschen. Mathematische Objekte werden in Form von Symbolen abgekürzt, die Sprache hat ihre eigene Grammatik. Beispielsweise sind Erklärungen zu bestimmten mathematischen Sachverhalten in einem Theoriebuch oder auf Wikipedia in der regulären Sprache beschrieben. Geht es darum, diesen Sachverhalt zu verstehen, wird er mit den eigenen Denkkonzepten verglichen. Das bedingt eine Übersetzung der regulären in die singuläre Sprache. Erst diese Übersetzung macht eine Sinnkonstruktion möglich.

Die Fachsprache ist nur dann nützlich, wenn diese Übersetzung gelingt. Der Ausdruck muss für den Leser eine Bedeutung haben, ein Symbol muss für *erlebte Erfahrungen* stehen (Dewey, 1976). Wagenschein macht in seinen Ausführungen deutlich, dass jede Person ihre Erkenntnisse mit der eigenen Sprache erarbeitet. Die Umgangssprache, die Sprache des Verstehens, wird sukzessive der Sprache des Verstandenen, der Fachsprache angenähert (Wagenschein, 1965, p. 169).

Erklärungen der Schülerinnen und Schüler sind in ihrer singulären Sprache gehalten. Sie greifen dabei nur soweit auf Fachausdrücke zurück, wie diese zum eigenen Wortschatz gehören. Erfolgt der Aufbau der Fachsprache verstehensorientiert, wird gleichzeitig auch der Wortschatz der Umgangssprache erweitert. Einerseits hilft die Umgangssprache die Fachsprache zu entwickeln, andererseits führt ein Aufbau der Fachsprache zu einer Weiterentwicklung der Umgangssprache. Malle formuliert diese Wechselbeziehung als ein erstrebenswertes Ziel und fordert, dass größere Teile der Bevölkerung die Fachsprache der elementaren Algebra so sicher verstehen müssten, dass sie auch Teil ihrer Umgangssprache werden (Malle & Wittmann, 1993, p. 13). Im Algebraunterricht der Sekundarstufe 1 hat diese Annäherung an die mathematische Fachsprache einen hohen Stellenwert. Sie erscheint in den Curricula als eigener Lerninhalt. (Siehe Schweizerischer Lehrplan, Abschnitt Mathematik (EDK, 2015)).

Nach wie vor ist in der Schulpraxis die Meinung weit verbreitet, dass im Algebraunterricht zuerst die Grammatik aufgebaut werden muss, bevor die Sprache zur Beschreibung von Sachkontexten zur Anwendung kommt.
Dieses Phänomen ist bereits im Abschnitt Sinnzusammenhang (pp. 27) dargelegt. Hier wird es im Hinblick auf die Entwicklung der Fachsprache ausgeführt.
Im Unterricht wird der Fokus zu großen Teilen auf den Umgang mit den neu zu erlernenden Symbolen gelegt. Die Lernziele sind stark auf die Erarbeitung der Rechenregeln gerichtet.
Möglicherweise liegt diesem Vorgehen eine didaktische Überzeugung zugrunde, welche schrittweises Aufbauen vom Einfachen zum Schwierigen favorisiert. Vordergründig scheint dieser Zugang für die Lernenden einfacher. Ein ‚Manipulieren' mit algebraischen Symbolen lässt sich in Regeln beschreiben, die rezeptiv, das heißt einer Anleitung oder einem Rezept folgend, angewendet werden können. Relativ schnell lassen sich Lernerfolge ausweisen. Diese liegen oft nur in einem oberflächlichen, angeleiteten Operieren mit Symbolen und sind nicht verankert. Sinnzusammenhang und Verstehensorientierung fehlen. Verschiedene Untersuchungen weisen auf solche Missstände hin. Heymann spricht von einem *formalen Spiel ohne inhaltliche Bedeutung* und sieht die Gefahr einer formalistischen Interpretation von Mathematik, die diese bedeutungsleer macht (Heymann, 1996, p. 220).
Rojano (1996) warnt vor dem Risiko, die Trennung zwischen dem Erlernen des regelgeleiteten Operierens mit algebraischen Symbolen und dem Anwenden der Algebra in inner- und außermathematischen Sachkontexten zu praktizieren, weil auf diese Weise die Gefahr groß ist, dass die Lernenden dabei den Sinnzusammenhang verlieren, was den Verstehensprozess ungünstig beeinflusst.

Um den Aufbau dieser Fachsprache zu überdenken, lohnt sich ein Blick in die Vergangenheit. Historische Entwicklungen können, im Sinne eines

‚genetischen Lernens' (Wagenschein, 1966), Hinweise geben, wo mögliche Hürden beim Erlernen der Algebra als Fachsprache liegen.

Die Algebra wurde und wird entwickelt, um Probleme zu lösen. Im alten Ägypten und Babylon wurden mathematische Handlungen mit der Umgangssprache beschrieben. Sowohl die Formulierung wie auch die Lösung der Problemstellungen wurden verbal wiedergegeben, wobei zur Darstellung von unbekannten Zahlen Wörter wie *Haufen* oder *Länge und Breite* eingesetzt wurden. Später wurden für unbekannte Zahlen auch Buchstaben verwendet.

Diophant 250 v. Chr. benutzte bereits Buchstaben als Abkürzungen der Fachausdrücke (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015, p. 120). Mitte des 16. Jahrhunderts begann Vieta eine Formelsprache aufzubauen, die zur Vereinfachung der Problembeschreibung diente. Vieta leitete damit eine Wende ein. Er entwickelte die Grundlage der heutigen Algebra als *Rechnen mit Buchstaben* und benutzte systematisch Symbole für Rechenoperationen. Dabei entdeckte er, dass diese Symbolsprache ein neues Feld für die Mathematik eröffnete. Vor Vieta wurden zwar Regeln und allgemeine Methoden eingesetzt, sie waren jedoch jeweils stark mit den zu lösenden Problemen verknüpft. Durch diese weitere Abstraktion, konnten neue mathematische Objekte entwickelt werden, indem die Buchstaben die Funktion einer Abkürzung verloren und als eigenständige mathematische Objekte betrachtet wurden (Siebel, 2005, p. 50).

Gestützt auf die Kenntnis dieser historischen Entwicklung ist anzunehmen, dass Lernende Zeit und Unterstützung brauchen, um das Verständnis der algebraischen Sprache vom Gegenständlichen hin zu mathematischen Objekten aufzubauen. Aus der historischen Betrachtung lässt sich ableiten, dass die Umgangssprache ein Wegbereiter sein kann, um die Symbolsprache aufzubauen. Das könnte bedeuten, dass auch im Unterricht Umschreibungen für algebraische Objekte sinnvoll wären, wie zum Beispiel *das Ding* oder *eine beliebige Zahl, die nicht näher bestimmt werden soll*. Damit ließen sich erste Annäherungen an allgemeine Regeln oder

Sachzusammenhänge beschreiben und diskutieren. Im Fokus stünde die zu untersuchende Struktur. Weil solche Umschreibungen aufwändig sind, würde im Idealfall bei den Schülerinnen und Schülern nach und nach das Bedürfnis aufkommen, die Kommunikation über die entsprechenden Strukturen zu erleichtern. Die Wortvariablen würden durch Symbole ersetzt.

Als Fazit kann festgehalten werden, dass die Fachsprache der Algebra, die uns heutzutage als *fertiges Produkt* erscheint, den Lernenden nicht als solches *verabreicht* werden darf. Um einen verstehensorientierten Zugang zu ermöglichen, müssen Lernende Gelegenheiten haben, die Bedeutung der Symbole und deren Grammatik zu erkennen. Ein ausschließlich geläufiges, fehlerfreies Hantieren oder Manipulieren mit Symbolen (*Kalkül*) verfehlt das geforderte Bildungsziel, *Algebra als Verstärker des Alltagsdenkens* (Heymann, 1996) zu erlernen. Um dieses Bildungsziel zu erreichen, braucht es ein Verständnis dafür, was diese Symbole bedeuten, wie sie eingesetzt werden und die Fähigkeit, diese zum Lösen einfacher Sachkontexte anzuwenden.

Diese Betrachtungsweise ist in der Forschung kaum bestritten, hat sich jedoch in der Praxis noch nicht in gewünschtem Maß durchgesetzt.

2.1.2 Denk- und Sichtweisen

Die Charakteristik mathematischer Objekte ist durch eine Dualität geprägt (pp. 17). Namhafte Mathematikdidaktiker und Didaktikerinnen (Kaput, 1999; Malle & Wittmann, 1993; Prediger, 2009; Rojano, 1996; Sfard, 1991; Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 1999) betonen die Bedeutsamkeit der beiden Denkweisen, welche auf diese Dualität zurückzuführen sind.
Schneider (2006) geht in einer Theorierecherche den Begriffspaaren von Wissensarten nach, die unter dem Begriff der ‚dual component theories of cognition' zusammengefasst werden können. Auch wenn die Begriffspaare unterschiedliche Nuancen fokussieren, haben sie doch alle einen wichtigen Kern gemein – die Dualität einer strukturellen, interpretierenden und einer eher operational-funktionalen Sicht (Schneider, 2006, p. 49).

Denk oder Sichtweisen (Schneider, 2006, p. 56)			
Ryle, 1949	knowing that		knowing how
Polanyi, 1962	focal knowledge		tacit knowledge
Chomsky 1965	structures		procedures
Piaget, 1978	mathematical understanding		algorithmic performance
Inhelder & Piaget, 1980	principles		skills
Resnick, 1982	semantic knowledge		syntactic knowledge
Hiebert, 1986	conceptual knowledge		procedural knowledge
Schacter, 1987	explicit knowledge		implicit knowledge
Oberauer, 1993	Faktenwissen		Anwendungswissen
Baroody, 2003	knowing why		knowing how to

Abbildung 4 Zusammenstellung der Begriffspaare zu relational – operational

Die Gegenüberstellung zweier Begriffe ist hilfreich, um die unterschiedlichen Eigenschaften der beiden Denkweisen zu kontrastieren. Im Folgenden ist von relationaler und operationaler Denk- oder Sichtweise die Rede. Die Denk- oder Sichtweisen beschreiben auf welche Weise gedacht wird, ob vorwiegend eine Anleitung umgesetzt oder ob die Denkhandlungen eher vernetzender und interpretierender Natur sind.

Sie sind eine Art Verarbeitungsmodi. Nach Schneider repräsentiert sich die relationale Denkweise (*engl. conceptual*) durch symmetrische und untereinander vernetzte Schemata, während operationales (*engl. procedural*) Denken in zielgerichteten und nicht vernetzenden Produktionsregeln charakterisiert wird.

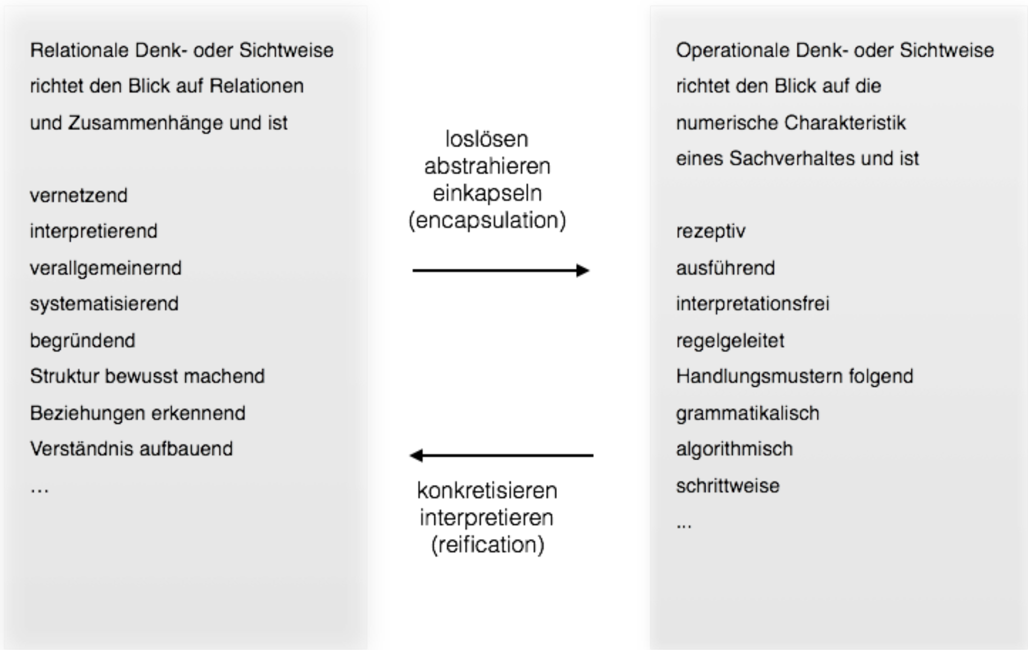


Abbildung 5 Denk- oder Sichtweisen, gestützt auf Schneider

Schneider betont, dass es kaum möglich ist, die beiden Denksysteme isoliert zu betrachten. Jedes Können und Tun, bedient sich sowohl eines relationalen und eines operationalen Denkens. Jeder Lösungsprozess einer Problemstellung fordert sowohl zielgerichtetes Handeln (*operational*) als auch ein vernetzendes, konzeptuelles Denken (*relational*). Eine Aufgabe, die sich nur auf konzeptuelles, vernetzendes Denken stützt, wird es kaum geben. Geht man davon aus, dass jemand nur relationales Denken praktiziert, fehlen die Handlungen und Ausführungen (operational), die eine

Untersuchung des Sachverhaltes ermöglichen, also Grundlagen schaffen, um Zusammenhänge und Eigenschaften (relational) zu erkennen.

Ist jemand nur mit Operationen beschäftigt, wird ihm das Vernetzende fehlen, um diese zu interpretieren und sie in einen Sinnzusammenhang zu stellen (Schneider, 2006, p. 98). Beide Wissensarten sind somit eng miteinander verwoben.

Sfard (1991) beschreibt das Phänomen der Dualität in ihrem Artikel *Dual Nature of mathematical conceptions*. Sie bezeichnet diese beiden Perspektiven mit *operational conceptions* und *structural conceptions* und betont, dass, sie notwendig sind, um mathematische Objekte zu verstehen. Obwohl die beiden Denkweisen sich als Gegensätze beschrieben lassen, bedingen sie sich gegenseitig (Sfard, 1991, p. 9). Sie vergleicht die algebraischen Objekte mit Münzen. Das Bild der Münze trifft den Sachverhalt gut. Diese hat, ähnlich einem mathematischen Objekt, zwei Ansichten, eine Vorder- und eine Rückseite. Beide Seiten gehören zur Münze, ohne diese wäre die Münze inexistent. Vorder- und Rückseite sind auf den ersten Blick nicht gleichzeitig sichtbar. Um die Münze als Ganzes zu kennen, muss man beide Seiten in Betracht ziehen. Es braucht einen Wechsel zwischen den beiden Ansichten. Dies geht einher mit der Aussage von Schneider, der darauf hinweist, dass die beiden Denkweisen kaum isoliert beobachtet werden können. Der Aufbau von mathematischem Verständnis ist durch diese beiden Sichtweisen und den Wechsel zwischen ihnen geprägt. Sie sind eine Spezifität algebraischer Objekte und sind insbesondere beim Einstieg in die Algebra zu beachten.

Zum Beispiel kann der Term x + 5 + x sowohl als Rechnung betrachtet werden, die sich nach den Regeln des Umformens vereinfachen lässt. Er kann aber auch als Rechenweg verstanden oder als mathematische Struktur einer Situation interpretiert werden, wie etwa:

> Zu einer unbekannten Zahl (Personen) kommen zuerst 5 und dann nochmals diese Unbekannte (Anzahl Personen) dazu.

Die relationale Denk- oder Sichtweise fokussiert den Blick auf die vorliegende Struktur.

Um nun mit solchen Termen operieren zu können, muss die Sichtweise gewechselt werden. Die Terme werden von der Gegenständlichkeit losgelöst oder eben *eingekapselt*. Die Terme stehen nur noch für Zahlen, alles Wissen über deren Beziehungen wird gekappt. Auf diese Weise wird es verständlich, dass sich diese Terme umformen lassen.

Den Wechsel von der relationalen hin zur operationalen Sichtweise beschreibt Sfard mit *encapsulation*. Das mit Vernetzungen und Beziehungen behaftete mathematische Objekt wird eingekapselt und steht nur noch als Platzhalter, konkret für eine Zahl oder einen Term.
Der Wechsel von der operationalen zur relationalen Sichtweise wird als *deencapsulation* bezeichnet. Das mathematische Objekt kann, im Sinne von: *Mach zu diesem Term eine passende Geschichte* gedeutet werden. Damit wird der formale Ausdruck wieder interpretiert.

- Von der relationalen zur operationalen Denkweise → Einkapselung (encapsulation)
- Von der operationalen zur relationalen Denkweise → Vergegenständlichung (deencapsulation)

Der Aufbau eines mathematischen Verständnisses scheint sich über diese beiden Sichtweisen aufzubauen. Sobald eine Loslösung geschafft ist (relational → operational) wird das neu erarbeitete Werkzeug wieder verwendet, um neue Zusammenhänge zu untersuchen (operational → relational). Durch Operationen und Manipulationen entstehen Daten, die wiederum nach Zusammenhängen und Mustern untersucht werden können. Es folgen nach Phasen der operationalen Denkweisen, Phasen der relationalen Denkweisen, usw..

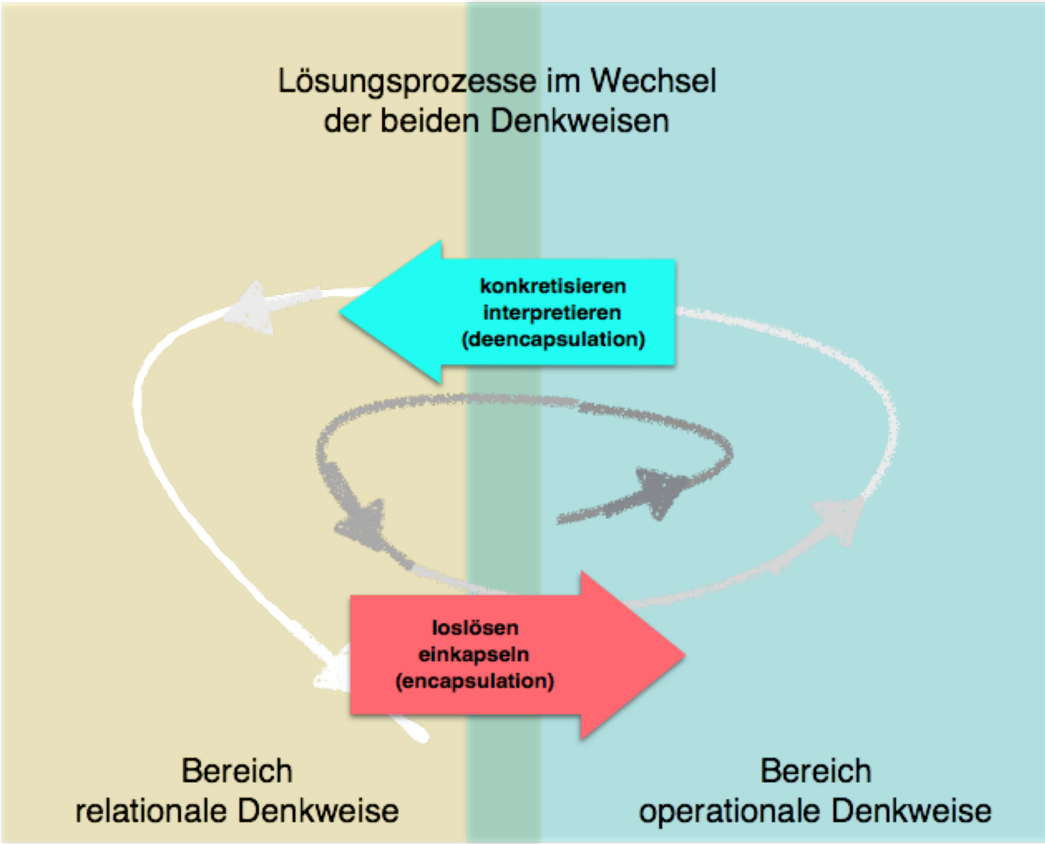


Abbildung 6 Skizze zu Lösungsprozesse im Wechsel der beiden Denkweisen

Sfard nennt diese aufeinanderfolgende Wechsel eine Art Hierarchie und macht in diesem Zusammenhang auch gleich darauf aufmerksam, dass dies eine starke Vereinfachung eines Lösungsprozesses ist (Sfard, 1991, p. 16).

Um dieses Begriffspaar operational und relational noch deutlicher zu präzisieren, soll es deutlich von Modellen, die verwandt scheinen, es aber nicht sind, abgegrenzt werden. Dies wird an Ausführungen von Schwank und Malle aufgezeigt.

Unterschiedliche Präferenzen von Denkformen

Schwank beschreibt das Begriffspaar prädikativ und funktional. Damit ist die Art und Weise gemeint, wie Objekte betrachtet werden können. Eine prädikative Sicht auf Dinge entspricht einer beobachtenden, eine funktionale einer dynamischen Sichtweise. Schwank weist darauf hin, dass die beiden Denkformen nicht bei jedem Menschen im gleichen Mass ausgebildet sind und je nach Präferenz die eine oder andere Lösungsform zum Tragen kommt (Schwank, 1996, p. 6). Dieser Hinweis zeigt auf, dass damit nicht die beiden Denk – oder Sichtweisen operational und relational gemeint sind, denn diese bedingen einander. Wer algebraische Objekte verstehen will hat nicht die Wahl, ob die Objekte eher relational oder operational betrachtet werden sollen.

Unterscheidung von konkretem und abstraktem Denken

Malle (1993) spricht vom ‚konkret - anschaulichen' und ‚formal - abstrakten' Denken. Obwohl diese Begriffe ähnlich scheinen, entsprechen sie nicht den in dieser Arbeit fokussierten Denkweisen.

Konkret – anschauliches Denken

- konzentriert sich auf die konkreten Objekte
- bringt die konkreten Objekte in einen Passungszusammenhang (Objekte passen zusammen) oder Prozesszusammenhang (Objekte ordnen sich in einen Prozess ein)

Logisch – formales Denken

- fasst die konkreten Objekte zu abstrakten Klassen zusammen oder ordnet ihnen abstrakte Größen zu und konzentriert sich auf diese
- bringt die Klassen, bzw. Größen in einen logischen oder numerischen Zusammenhang" (1993, p. 130).

Die Unterscheidung von Malle bezieht sich eher auf die Entwicklungsstufen nach Piaget bei welchen entwicklungsbedingt die eine oder andere Denkweise vorherrscht. Malle weist beispielsweise darauf hin, dass vor allem bei jüngeren Schülerinnen und Schülern das konkret-anschauliche Denken womöglich die alleinige Denkform ist. Im Gegensatz dazu sind die beiden Denk- und Sichtweisen operational und relational auch schon bei

Kleinkindern aktiv, etwa wenn sie Muster legen (operational) und diese untersuchen (relational).
Ein beweglicher Wechsel zwischen operationaler und relationaler Sichtweise hilft wohl mit, den Erkenntnisgewinn oder eine Denkentwicklung vom *konkret – anschaulichen Denken* hin zum *logisch formalen Denken* voranzutreiben. Die beiden Denk- oder Sichtweisen operational – relational liegen jedoch auf einer anderen Ebene. Sie sind für unser Denken typische Eigenschaften und werden grundsätzlich zum Verständnisaufbau mathematischer Objekte eingesetzt, also auch von jüngeren Schülerinnen und Schülern praktiziert.

Konsequenzen für den Unterricht: ‚Early Algebra' (van Amerom, 2002)

Bereits in der Grundschule im Arithmetikunterricht können diese beiden Denk- und Sichtweisen den Schülerinnen und Schülern bewusst gemacht werden. Arithmetische Terme können, wie auch algebraische, sowohl als Beschreibung einer Relation wie auch als Operation gedeutet werden.
Erste Zählübungen im Vorschulunterricht sind beispielsweise ein Auswendiglernen der Zahlwörter (operational). Um die Zahlbegriffe zu verstehen, braucht es aber auch Bezüge zur Deutung der Zahlen, in welchen unter anderem Mengen gebildet oder verglichen werden (relational). Diese Auseinandersetzungen im Zahlaufbau ähneln den Lernprozessen im Umgang mit Variablen. Ob Zahlen oder algebraische Terme, beide müssen zuerst in ihre Abstraktion überführt werden, bevor sie für den operationalen Gebrauch verfügbar sind. Sie müssen aber auch, um anwendbar zu sein, in ihrer Vernetzung verstanden werden.

Jacobs et al. (2007, pp. 261, 262) erkennen in der Stärkung des relationalen Denkens im Arithmetikunterricht der Grundschule eine Chance, um den Einstieg in die Algebra zu erleichtern. Sie fordern die Strukturen der Operationen zu thematisieren und Beziehungen, die mit diesen Operationen beschrieben werden zu diskutieren. Diese Forderung begründen sie damit, dass das Rechnen, sobald es in einer gewissen Geläufigkeit ausgeführt wird, zu einem Abarbeiten von Prozeduren wird. Die Operationen verlieren dadurch ihre inhaltliche Bedeutung. Additionen beispielsweise, werden ausgeführt, ohne dass sich die Lernenden mit dem Wesen (den Eigenschaften) der Addition auseinandersetzen. Finden bereits im Arithmetikunterricht der Grundschule die Auseinandersetzung mit Strukturen der Grundoperationen eine stärkere Gewichtung, können diese dann auch einfacher in den algebraischen Bereich übertragen werden. Jacobs et al. (2007) stützen sich bei ihren Aussagen auf eine einjährige Experimentalstudie, mit welcher Effekte des algebraischen Denkens untersucht wurden. Mit engagierten Lehrpersonen und Klassen des 1. – 5. Schuljahres gingen sie der Frage nach wie Lehrpersonen und Lernende über Algebra denken und welche Ideen ihnen zugänglich sind. Als Ergebnis der Studie werden Unterschiede zwischen kleinschrittigen Rechenverfahren und vernetztem Denken aufgezeigt.

Einige Kinder lösten die Aufgabe 25 + 58 + 75 Schritt für Schritt von links nach rechts. Dabei wurde hauptsächlich eine operationale Denkweise eingesetzt. Andere Schülerinnen und Schüler lösten die Rechnung einfacher, indem sie den Vorteil nutzten und zuerst 25 + 75 rechneten. Diese Art zu Denken setzt voraus, dass die Rechnung als Ganzes betrachtet werden kann. Vor dem Berechnen müssen die Beziehungen der Zahlen erfasst werden. Zudem muss mindestens implizit ein Bewusstsein bezüglich kommutativen und assoziativen Eigenschaften der Rechenoperationen vorhanden sein (Jacobs et al., 2007, p. 260).

Zusammenfassend bezeichnen Jacobs et al. das relationale Denken als einen Schlüsselpunkt in der Unterstützung der Schülerinnen und Schüler beim Aufbau der Algebra.

Operationales Denken im Selbstexperiment

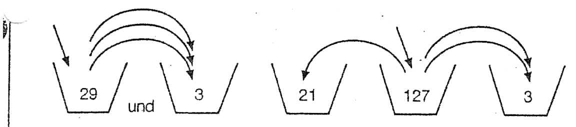
Der Psychologe Luchins (1971) beschreibt im Zusammenhang mit *mechanischem Denken* (operationale Denkweise) ein Experiment, das sich als Selbstversuch eignet, um die beiden Denkweisen und den Wechsel zwischen ihnen selber zu erfahren. (Wichtig: Die Aufgaben müssen der Reihe nach von 1 – 11 bearbeitet werden.)

Umschüttaufgaben

Zur Verfügung hast du uneingeschränkt viel Wasser und die leeren Krüge A, B und C zum Abmessen der geforderten Wassermenge. Finde einen passenden Umschüttvorgang.

Beispiele:

	Fassungsvermögen der Krüge in Liter				
Aufgabe	*A*	*B*	*C*	*geforderte Wassermenge*	*Lösungsweg*
1	29	3	-	20	A - 3B = 20 l
2	21	127	3	100	B - A - 2C = 100 l



Skizze zu Aufgabe 1

Skizze zu Aufgabe 2

Für die Aufgabe 2 gilt: Geforderte Wassermenge = B – A – 2C

Versuche nun, folgende Umschüttaufgaben in Einzelarbeit selbständig zu lösen:

	Fassungsvermögen der Krüge in Liter				
Aufgabe	*A*	*B*	*C*	*geforderte Wassermenge*	*Lösungsweg*
1	29	3	-	20	
2	21	127	3	100	
3	14	163	25	99	
4	18	43	10	5	
5	9	42	6	21	
6	20	59	4	31	
7	23	49	3	20	
8	15	39	3	18	
9	28	76	3	25	
10	18	48	4	22	
11	14	36	8	6	

Abbildung 7 Experiment Luchins aus Hollenstein (A Hollenstein & Eggenberg, 1998, p. 25)

Für Probanden ist die Erkenntnis verblüffend: Anstelle des kognitiv aufwändigen vernetzenden Denkens wird, sobald eine Struktur erkannt ist, ohne bewusste Steuerung ein automatisierendes Vorgehen einsetzen, welches ein Wechsel von der relationalen zur operationalen Denkweise bedeutet. Das operationale Denken ist im Vergleich zu der relationalen Denkweise eine kognitive Entlastung.

Gleichzeitig kann mit dieser Übung auch eindrücklich gezeigt werden, dass ein Verharren in der operationalen Sichtweise blind macht. Einfache Relationen werden beim Abarbeiten der Aufgaben nicht mehr erkannt.

Dieses Phänomen ist auch in der Praxis bekannt: Bleiben Lernende lange auf Drill-Aufgaben fokussiert, ist eine besondere Anstrengung gefordert, um wiederum die relationale Denkweise zu aktivieren.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass alle hier untersuchten Studien, die sich mit dieser Thematik auseinandersetzen, zum Schluss kommen, dass beide Sichtweisen für das Erlernen der Mathematik bedeutsam sind.

Abschließend wird dazu Linchevski zitiert:

> “When the signs on the paper do not seem to stand for any conceivable entity different from the signs themselves, *the signifier becomes the signified.* In other words, the student focuses on symbolic expressions as such, without looking for their hidden sense.” (Linchevski, 1994, p. 286)

2.1.3 Vorstellungen und Vorstellungsumbrüche

> „Denken ist Voraussetzung des Lernens, aber nicht jedes Denken ist auch Lernen. Ein zentrales Bestimmungsmerkmal für kognitives Lernen ist die Veränderung des Denkens.“ (Gropengießer, 2003, p. 32).

Damit Denken zu neuen Erkenntnissen führt, ist ein Auf- und Umbau von Vorstellungen wichtig. Dies ist ein subjektiver Prozess. Jede Person muss Vorstellungen selber entwickeln. Sie können nicht von aussen zugeführt oder übernommen werden. (Baalmann, Frerichs, Weitzel, Gropengießer, & Kattmann, 2004).

Verstehensprozesse, so Gallin (1998), gehen vom *Singulären* aus, das heißt von individuellen Vorstellungen der Lernenden. Um Erkenntnisse gewinnen zu können, müssen bestehende Konzepte angepasst, weiterentwickelt und neu strukturiert werden. Dies sind Vorstellungen aus Sicht einer *Vorschau (Gallin & Ruf, 1998)*.

Dem gegenüber steht das *Reguläre*. Das sind fachlich tragfähige Vorstellungen, sozusagen die fertige Mathematik. Gallin nennt es die Vorstellungen der *Rückschau*. Sie bestehen aus normativ geklärten Begriffen des Fachwissens (Gallin/ Ruf 1988). Der Begriff *Grundvorstellung* steht für solche präskriptive, tragfähige Interpretationen mathematischer Konstrukte (Prediger, 2011). Grundvorstellungen beziehen sich auf zentrale Prozesse der mathematischen Begriffs- und Modellbildung. Sie zielen auf die Struktur des mathematischen Inhalts und ermöglichen, mathematische Begriffe und Operationen zur Mathematisierung einzusetzen, sei das für innermathematische wie auch für *lebensweltliche* Problemstellungen (Leiss et al., 2008).

Die Festlegung der Grundvorstellungen ist ein Dialog zwischen dem mathematischen Inhalt und den Lehrenden (resp. den Mathematikdidaktikern). Aus Sicht der Lehrenden stellen sich Fragen wie, *Welche Vorstellungen braucht es, um das Konzept der Dezimalbrüche zu verstehen?*, *Welche Vorstellungen braucht es, um die Grundvorstellung den Bruch als Anteil von einem Ganzen zu verstehen?* (Die Sicht der Lernenden ist dabei noch nicht miteinbezogen.)

Die individuellen Vorstellungen der Lernenden sind im Gegensatz zu den Grundvorstellungen nicht so leicht zu fassen. Die unterschiedlichen Repräsentationsebenen *enaktiv, ikonisch* und *symbolisch* sind dabei wichtige Kommunikationsmedien. Sie ermöglichen einen beweglichen Wechsel zwischen der operationalen (handeln, zeichnen, operieren) und relationalen (Beziehungen erkennen) Denkweise. Die Lernenden müssen neue Erfahrungen in die existierenden kognitiven Strukturen einarbeiten und diese mit den bisherigen Erkenntnissen situationsbezogen verbinden zu können.

„Dieses Grundverständnis enthält insbesondere, dass Lernen neben dem Neulernen oft auch ein Umlernen bedeutet, weil bisher erworbene Vorstellungen umgebaut oder erweitert werden müssen.“ (Prediger, 2011)

Die individuellen Vorstellungen werden immer wieder mit dem *regulären Wissen* abgeglichen und umgebaut, bis sie mit den normativ gesetzten kohärent scheinen (Gallin & Ruf, 1998).

Um Entwicklungsschritte eines Aufbaus von Vorstellungen zu verstehen, lohnen sich Beobachtungen über die Art und Weise wie Schülerinnen und Schüler vom Singulären ausgehend, sich einer *regulären Sicht* nähern. Jeder Schüler, jede Schülerin hat seine, respektive ihre eigenen Vorstellungen, die oft erst bei gezieltem Nachfragen sichtbar werden. Dabei kann Erstaunliches zutage treten wie das folgende Beispiel aus der Praxis illustriert: Ein Schüler erklärt, dass die Zahl 2.135 größer ist als die Zahl 2.3. Sein Denkkonzept zu den Dezimalbrüchen stimmt nicht mit den entsprechenden Grundvorstellungen überein. Er begründet sein Handeln mit: *Je mehr Stellen*

eine Zahl hat, desto größer ist sie. Diese Vorstellungen wurden vermutlich im Umgang mit natürlichen Zahlen aufgebaut. Hier bei den Dezimalzahlen treffen sie nicht zu. Der Schüler muss seine Zahlvorstellungen weiter aus- und umbauen. Die Konvention, dass sich der Wert von Spalte zu Spalte in Richtung links verzehnfacht, muss eingehalten werden. Visualisierungen und Modelle zum Dezimalsystem können hilfreich sein, um das entsprechende Konzept zu überarbeiten. In diesem Beispiel könnte in einer Stellenwerttabelle mithilfe von Repräsentanten (Plättchen) Anzahlen gelegt und mit diesen operiert werden. Der Schüler wird dabei seine Vorstellung nicht einfach verwerfen können, sondern muss sie am Modell prüfen und umbauen (relationale Sichtweise).
Solche Konstruktionsprozesse sind von Lehrpersonen zu unterstützen, indem Konzepte und deren Neustrukturierungen bewusst gemacht werden (Prediger, 2011).

Berlin (2010) beschreibt in ihrem Modell eine Annäherung an entsprechende algebraische Grundvorstellungen als *Entwicklungsstufen der algebraischen Denkentwicklung*.

Modell von Berlin

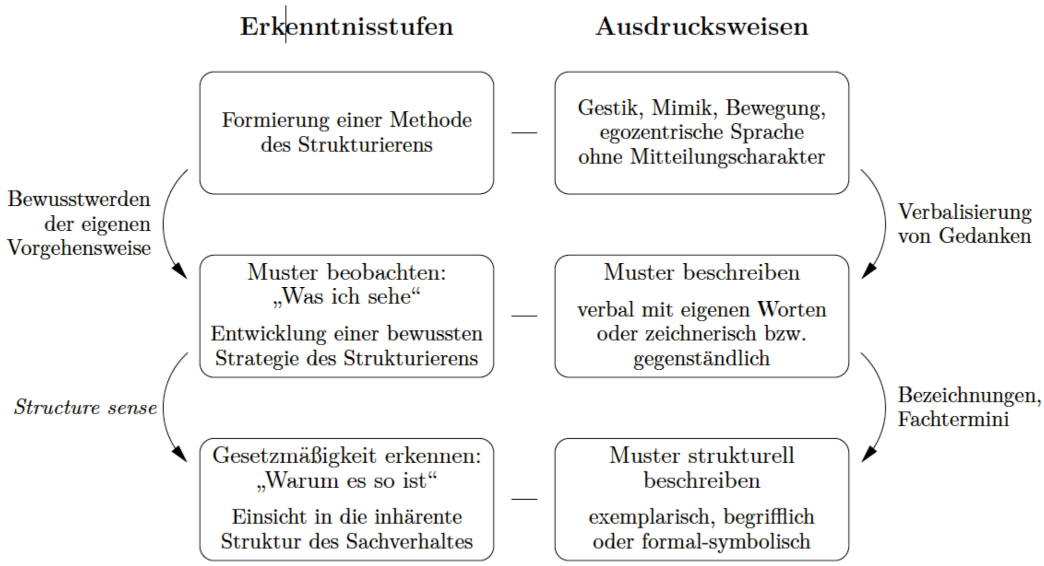


Abbildung 8 Das Stufenmodell der algebraischen Denkentwicklung, Berlin (Berlin, 2010, p. 200)

Die Entwicklung stellt Berlin in drei Stufen dar. Zuerst findet eine intuitive Annäherung an eine Methode des Zählens und Strukturierens statt. Dies ist in der ersten Stufe als *Formierung einer Methode des Strukturierens* abgebildet. Mit der Stufe der *Entwicklung einer bewussten Strategie* wird der Blick auf Gesetzmäßigkeiten gelegt. Die Lernenden erkennen, dass strukturiert gezählt werden kann. Die Methode des Abzählens geht über in eine bewusst angewandte Strategie und führt schließlich zum Erkennen der Gesetzmäßigkeit, die als *eine Einsicht in die inhärente Struktur des Sachverhaltes* bezeichnet wird. Somit ist der Übergang vom Beobachten zum Erfassen einer Struktur vollzogen. (Berlin, 2010, p. 200)

Um diese Stufen zu durchlaufen, wird auf bestehende Konzepte zurückgegriffen.

Dabei können auch Vorstellungsumbrüche beobachtet werden. Sie beruhen auf Vorstellungen, die für die nächste Entwicklungsstufe nicht genügen. Demzufolge müssen Konzepte gezielt erweitert und umgebaut werden, es muss ein Vorstellungserweiterung (*Conceptual Change)* erfolgen. (Hahn & Prediger, 2008).

Empirisch lassen sich typische individuelle Vorstellungen von Lernenden identifizieren. Beispielsweise beschreiben Hefendehl und Prediger im Artikel *Unzählig viele Zahlen* (Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006) Hürden, die bei der Zahlerweiterung auftreten können. Sie machen darauf aufmerksam, dass die zugrunde gelegten Vorstellungen erweitert werden müssen. Ein weiteres Beispiel ist das Operieren mit Brüchen. Kinder, die mit Brüchen oder ganzen Zahlen in Kontakt kommen, müssen nicht nur neue Vorstellungen erwerben, sondern die bisher erworbenen Vorstellungen über Zahlen und Operationen ausdifferenzieren oder ergänzen, wobei das Erwerben neuer Vorstellungen auch immer auf die bestehenden zurückgreift. (Weitere Ausführungen dazu S 68 ff.)

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Lernen nicht als ein Ersetzen von Vorstellungen sondern als ein Überarbeiten, Annähern, Anpassen der eigenen Vorstellungen an entsprechende Grundvorstellungen zu verstehen ist. Wird eine Erkenntnis weiterentwickelt, werden entsprechenden Vorstellungen umgebaut. (Hahn & Prediger, 2008). Dieser Prozess fordert beide Denkweisen ein. Dem Annähern geht beispielsweise zum Verifizieren des Sachverhaltes ein Hantieren oder Operieren voraus, in welchem die operationale Sichtweise im Vordergrund steht.

Es ist eine mathematikdidaktische Aufgabe, solche Entwicklungsprozesse von Vorstellungen zu untersuchen (Prediger, 2011, p. 2).

Die punktuelle Erfassung des Vorgehens der Schülerinnen und Schüler in dieser Arbeit lässt zwar keine Rückschlüsse auf Entwicklungsprozesse oder Vorstellungserweiterungen zu. Hier geht es lediglich um Lösungsprozesse. Die dabei erkennbaren Unsicherheiten und Strategien lassen sich jedoch interpretieren und geben Hinweise an welchen Stellen Hürden in Entwicklungsprozessen auftreten können.

2.2 Anwendungsorientierung

Anwendungsorientierung bezeichnet die Auseinandersetzung mit lebensweltlichen Kontexten (Büchter & Henn, 2015). Es geht darum, Sachverhalte der außermathematischen Welt mithilfe mathematischer Werkzeuge zu bearbeiten. Dazu gibt es zwei unterschiedliche Aufgabentypen: Modellierungs- und Mathematisierungsaufgaben.

2.2.1 Modellieren und Mathematisieren

Das Modell von Blum (2007) bildet den Modellierungsprozess ab. Modellieren ist eine Transferleistung zwischen Realität und Mathematik, Mathematisieren ist eine Teilleistung davon.

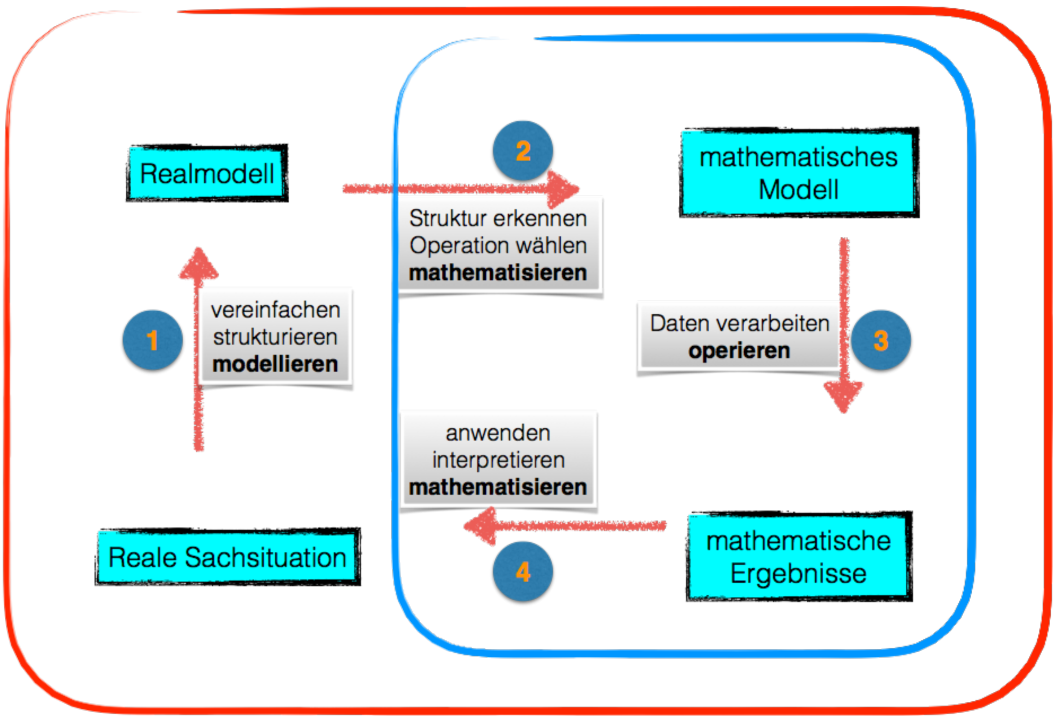


Abbildung 9 Das vereinfachte Modell des Modellierungskreislaufs nach Blum (2007)

Modellieren

Der Modellierungsprozess umfasst alle Teilschritte 1 – 4 (rote Rahmung).
(1) Die Ausgangslage, ein Sachkontext, wird in ein Realmodell übertragen. Die Herausforderung besteht hauptsächlich darin, eine Situation so zu vereinfachen, dass die wesentliche Struktur der Quantifizierbarkeit der Sachsituation erhalten bleibt. Bei diesem Schritt muss entschieden werden, was in welcher Form für die Berechnung der Sachsituation genutzt werden kann.

Modellierungsaufgaben

Modellierungsaufgaben dienen dem Bearbeiten *echter* Phänomene der Alltagswelt (Leiss & Tropper, 2014). Sie umfassen alle Schritte des Modellierungsprozesses (siehe Modell S. 51), also auch den Mathematisierungsprozess.
Modellierungsaufgaben bieten ein Übungsfeld, um außermathematische Problemstellungen mathematisch zu bearbeiten. Die Umwelt wird mit einer ‚mathematischen Brille' betrachtet. (Was lässt sich an den vorliegenden Problemstellungen berechnen?) Modellierungsaufgaben sollen anregen (Leuders & Büchter, 2009, pp. 76 - 80):

- in Realsituationen eigene Fragen zu stellen
- Realsituationen adäquat zu vereinfachen
- nach geeigneten Realmodellen zu suchen und diese wenn nötig anzupassen
- Ergebnisse kritisch zu hinterfragen und wenn nötig den Modellierungsprozess zu revidieren
- die Kenntnis über unterschiedliche Realmodelle zu erweitern und mit Modellen beweglich umzugehen
- Sicherheit im Mathematisierungsprozess zu erlangen

Ist in einer Problemstellung der Sachkontext so weit vereinfacht, dass bereits ein Realmodell vorliegt, gilt diese nicht mehr als Modellierungsaufgabe. Dann steht der Mathematisierungsprozess im Vordergrund, die Problemstellung wird als Mathematisierungsaufgabe bezeichnet.

Mathematisieren

Der Mathematisierungsprozess (blaue Rahmung in Abbildung 9, S. 51) ist ein Teilprozess des Modellierens und umfasst die Schritte 2 – 4.

(2) Das Realmodell, eine Vereinfachung der authentischen Situation, wird nun in ein mathematisches Modell zu übertragen. In der Praxis stellt sich heraus, dass solche Übersetzungen nicht einfach sind.
Rechenoperationen sind mathematische Konstruktionen (Muster), die nicht in der Realität vorkommen. Wer den Schritt 2 vollziehen will, muss verschiedene mathematische Modelle verfügbar haben. Bereits bei einfachen Sachkontexten kann diese Suche nach der richtigen mathematischen Struktur herausfordernd sein. Je mehr mathematische Muster bekannt sind, desto leichter wird es sein, ein passendes Muster zu erkennen. (Wittmann & Müller, 2008, pp. 67, 68). Entsprechende Muster, Visualisierungen oder Modelle sind Verbindungen zwischen dem Real- und dem mathematischen Modell und können helfen, die entsprechenden Operationen zu erfassen.

(3) Dieser Schritt bezieht sich auf den Kalkül. Zahlen werden verarbeitet. Das ist hauptsächlich eine arithmetische oder algebraische Leistung. Rechenverfahren müssen korrekt angewendet werden. Die Zahlen, entnommen aus dem Realmodell, müssen mit dem richtigen Verfahren korrekt verarbeitet werden. Wer geläufig Rechenoperationen anwenden kann, wird diesen Schritt hauptsächlich mit einer operationalen Denkweise verarbeiten. Wer zuerst die Grundoperationen ergründen muss, bevor sie verfügbar sind, wird auch auf die relationale Denkweise zurückgreifen müssen.

(4) Anschließend wird das Ergebnis interpretiert.
Die Aussage zum Sachkontext (4) ist eine Rückübersetzung. Dieser Schritt der Interpretation wird im vorliegenden Modell auch als

Mathematisierungsprozess bezeichnet. Wer Mathematisieren als eine Fähigkeit versteht, wird auch Umkehroperationen mit einschließen. Unter Fähigkeit wird hier sich ein bewegliches Agieren in einem bestimmten Bereich verstanden. Die Rechenergebnisse werden mit den im Realmodell beschriebenen Zusammenhängen abgeglichen und interpretiert.

Mathematisieren ist eine Transferleistung und steht für die Übersetzung vom Realmodell zum mathematischen Modell und umgekehrt vom mathematischen zum Realmodell. Mathematisierungsprozesse greifen auf beide Denk- oder Sichtweisen zurück. Terme müssen mal relational, mal operational gedeutet werden.

Mathematisierungsaufgaben

Mathematisierungsaufgaben grenzen sich von den umfassenden Modellierungsaufgaben ab. Sie sind nur auf die Nahtstelle Realmodell – mathematisches Modell fokussiert und erfüllen die Anwendungsorientierung, im Gegensatz zu den Modellierungsaufgaben, nur beschränkt. Sie fordern eine echte Auseinandersetzung zwischen Realmodell und mathematischem Modell. Einmal muss eine passende Operation gefunden werden, ein anderes Mal soll von der Operation ausgehend das Ergebnis interpretiert werden oder es soll ein passender Kontext erfunden werden, wie etwa, *Erfinde eine Geschichte, die zur Rechnung 5 + 7 = passt.*
Beide Denkweisen (operational und relational) sind dabei bedeutsam.

Zum Beispiel:

- Erfinden von Rechengeschichten. Mathematisches Modell → Realmodell
- Unterschiedliche Lösungswege diskutieren wie ein Realmodell in ein mathematisches Modell übersetzt werden könnte.

- Grundvorstellungen zu den verschiedenen mathematischen Modellen stärken und diese in der Diskussion immer wieder miteinbeziehen.
- Beide Modelle sollen mit verschiedenen Beispielen verbunden werden, insbesondere auch der Wechsel vom Real – zum mathematischen Modell und umgekehrt. Die Mathematik soll als künstliche Konstruktion thematisiert und bewusst gemacht werden.

Beispiel:
Toni hat 4 Karten und Beni hat 8 Karten. Wie viele Karten haben sie insgesamt? Die Situation ist so einfach gehalten, dass eine Vereinfachung hin zu einem Realmodell (Modellierungsschritt 1) entfällt.

Modellierungsschritt 2:
Man stellt sich den Sachkontext mit den 4 und 8 Karten vor, vergleicht die Situation mit den bekannten mathematischen Mustern und entscheidet sich für die Addition. (relationale Sichtweise)

Modellierungsschritt 3:
Die Operation wird durchgeführt.
4 + 8 = 12 (operationale Sichtweise, sofern diese Operation bereits geläufig ist).

Modellierungsschritt 4:
Das Ergebnis wird interpretiert (relationale Sichtweise).

Mathematisierungsaufgaben beinhalten eine weitere Herausforderung, die in diesem Zusammenhang vielleicht nicht erwartet wird, aber nicht außer Acht gelassen werden darf. Gerster weist darauf hin, dass Denkhandlungen im Bereich des Mathematisierens auf das Operations-verständnis zurückgreifen. Ein gut entwickeltes Operationsverständnis zeigt sich in einem sicheren Verbinden konkreter (Alltags-) Situationen mit mathematischen Symbolen. Modelle und Visualisierungen übernehmen dabei häufig eine Vermittlerrolle

(Gerster, 2004, p. 388). Wer das Rechnen nicht beherrscht und die Operationen nicht versteht, wird Mühe haben, Sachkontexte zu mathematisieren. (Gerster, 2004, p. 242). Dazu ist das Operationsverständnis eine wesentliche Grundlage. Booth (1988) weist darauf hin, dass viele Schwierigkeiten im Bereich der Algebra auf ein zu wenig ausgebautes Operationsverständnis zurückzuführen sind.

> „The ability to work meaningfully in Algebra, and thereby handle the notational conventions with ease, requires that students first develop a semantic understanding of Arithmetic” (Booth, 1988, p. 58).

Mit Mathematisierungsaufgaben sind auch Auseinandersetzungen mit innermathematischen Kontexten gemeint. Beispielsweise können Operationen, insbesondere die zugrunde gelegten Strukturen veranschaulicht werden. Die Hauptaktivität richtet sich auf ein Erkennen und Zuordnen von Mustern.

Algebraisieren

Algebraiseren ist ein Teilbereich des Mathematisierens. Das mathematische Modell enthält in diesem Fall auch algebraischer Objekte.
Das Verb *Algebraisieren* beschreibt eine Übersetzung vom Realmodell hin zum algebraischen Ausdruck. Muster, beispielsweise in geometrischer oder arithmetischer Form, können dabei als Vermittler dienen.

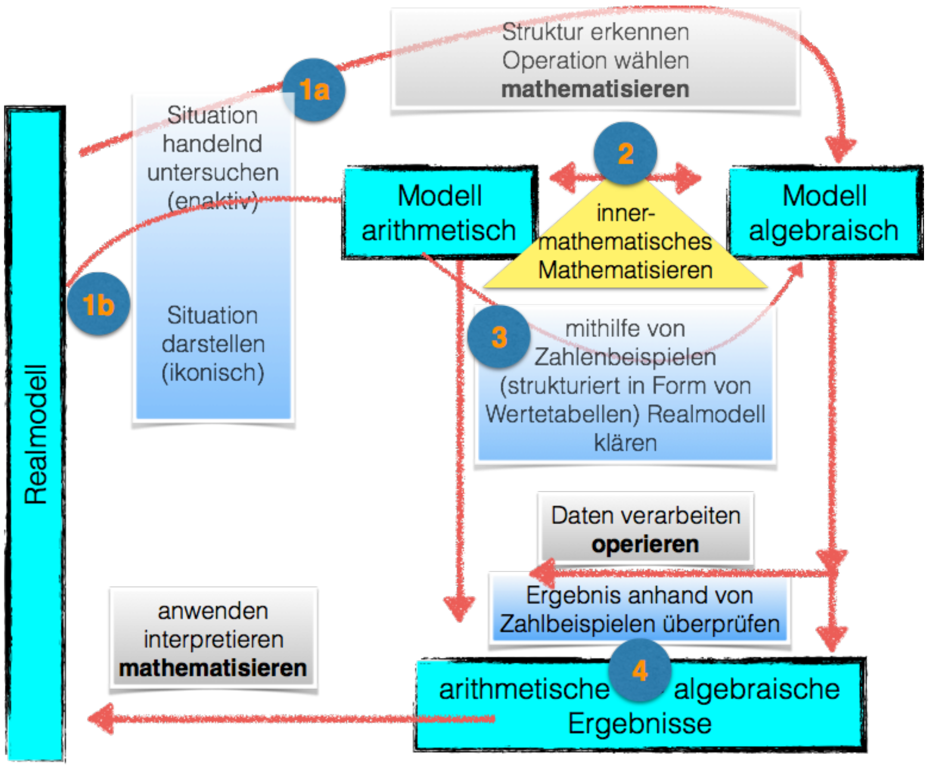


Abbildung 10 Algebraisieren, eine Teilkompetenz des Mathematisierens

1a) Wird ein Sachkontext in der algebraischen Sprache festgehalten, kann der Transfer ausgehend vom Realmodell direkt in einen algebraischen Term erfolgen. Dazu können Handlungen oder Visualisierungen, die das Realmodell wiedergeben, hilfreich sein.

1b) Vom Realmodell ausgehend, kann der Sachverhalt in einem Zwischenschritt in ein arithmetisches Modell abgebildet werden. Dieser Zwischenschritt kann die Übersetzung hin zum algebraischen Modell entlasten.

2) Übersetzungen zwischen dem arithmetischen und dem algebraischen Modell liegen im Bereich des innermathematischen Mathematisierens, wie etwa Zahlenmuster und Rechenoperationen untersuchen oder den Term einer Zahlenfolge zuordnen. Wird mit Zahlen oder Termen regelgeleitet operiert, ist die operationale Sichtweise im Vordergrund. Geht es darum Strukturen zu erkennen, werden die Denkhandlungen hauptsächlich im Bereich der relationalen Denkweise liegen.

3) Ausgehend vom arithmetischen Modell können Zahlenbeispiele helfen, einen Transfer in ein algebraisches Modell zu vollziehen. Es kann vorteilhaft sein, wenn Zahlen strukturiert beispielsweise in einer Wertetabelle festgehalten werden.

4) Liegt ein Ergebnis in algebraischer Form vor, kann es sich lohnen, dieses mithilfe von Zahlbeispielen zu konkretisieren und es auf diese Weise zu überprüfen.

Übersetzungen in die algebraische Sprache oder umgekehrt, Interpretationen algebraischer Objekte, sind für einige Schülerinnen und Schüler herausfordernd. Sie werden als anspruchsvoller eingeschätzt als das Hantieren mit algebraischen Symbolen. Vollrath und Weigand beschreiben, dass das Lösen von Sachaufgaben mithilfe von Gleichungen von Schülerinnen und Schülern besonders gefürchtet wird. Im Besondern das Aufstellen von Gleichungen scheint den Lernenden Mühe zu machen, während das Lösen der Gleichung oft leicht gelingt. (1994, p. 229).
Die Hauptschwierigkeit, so Malle, liegt im Aufstellen und Interpretieren *simpler Formeln* (1993, p. 5).
Gerade diese Schwierigkeit gilt es zu fokussieren. Es genügt nicht, wenn Schülerinnen und Schüler mit algebraischen Symbolen operieren können. Diese Fähigkeit alleine macht sie noch nicht kompetent, Algebra als Hilfsmittel zum Bearbeiten von Problemstellungen nutzen zu können. Die Anwendung der Algebra ist eine wichtige Zieldimension des Mathematikunterrichts. 000

2.2.2 Aufgabenentwicklung im Bereich der Anwendungsorientierung

Um die Gewichtung der beiden Typen, Modellierungs- und Mathematisierungsaufgaben zu diskutieren, wird nun der Blick auf die Entwicklung der Anwendungsorientierung gerichtet.

Anwendungsorientierung war in den Anfängen der Mathematik die Zieldimension. Mathematik wurde und wird als Hilfsmittel zum besseren Weltverständnis auf- und ausgebaut. So entwickelten etwa die Babylonier im dritten Jahrtausend vor Christus mathematische Methoden, um ihren Handel zu kontrollieren, Steuern zu erheben, die Länder zu vermessen und ihre Zeit durch einen Kalender zu strukturieren (Büchter & Henn, 2015, p. 19). Hauptsächlich waren es solche außermathematischen Problemstellungen, die eine Entwicklung der Mathematik einleiteten.

Mit Thales von Milet (um 624 v. Chr. – um 546 v. Chr.), wurde eine neue Zieldimension eingeleitet. Neben der Anwendung gewann die Forschung mathematischer Strukturen an Bedeutung (Büchter & Henn, 2015, p. 22).
Thales von Milet begann die Geometrie zu systematisieren. Er wollte dadurch geometrische Beobachtungen in einer Kette logischer Schlüsse zu beweisen. Die Pythagoräer setzten sich das Ziel, Mathematik als begründetes System mithilfe von Axiomen und logischen Regeln aufzubauen, mit welchem man ohne Realitätsbezug allgemein gültige Aussagen formulieren konnte. Dadurch wurde ein Übergang vom Anwender zum Forscher eingeleitet. Somit liegen nun zwei unterschiedliche Zieldimensionen der Mathematik vor (Büchter & Henn, 2015, p. 22).
Die Anwendungsorientierung wurde früher in den Schulbüchern häufig in Form von eingekleideten Textaufgaben umgesetzt. Bei solchen Aufgaben steht der mathematische Inhalt, wie etwa die Division, im Vordergrund. Dieser Inhalt wird in verschiedene Sachverhalte eingebettet (eingekleidete Textaufgaben), mit der Folge, dass die Alltagsbezüge zum Teil gesucht und alltagsfremd wirken. Oft sind die Aufgaben in den Schulbüchern so gruppiert,

dass diejenigen mit gleichen Rechnungsmustern zusammengefasst werden, um damit eine gewisse Geläufigkeit zu trainieren. Das kann jedoch zu rezeptivem Abarbeiten führen. Rechnungen im Bereich der natürlichen Zahlen können etwa mit folgender Lösungsstrategie angegangen werden: Im Text wird jeweils die größere Zahl herausgesucht und diese durch die kleinere Zahl dividiert. Ist sie nicht teilbar, wird die kleinere von der größeren subtrahiert.

Die enge Fokussierung auf die mathematischen Operationen rückt den zugrunde gelegten Sachverhalt in den Hintergrund. Die Lernenden lösen die Aufgaben, ohne sich mit dem Text auseinanderzusetzen. Die Hauptaktivität in dieser Aufgabe scheint die Anwendung der im Unterricht thematisierten Rechenoperation zu sein.

Baruk wies 1985 nach, dass diese Art Umsetzung einer Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht nicht den erhofften Erfolg bringt. Sie zeigte in ihren Studien eindrücklich auf, wie Schülerinnen und Schüler, durch eingekleidete Textaufgaben konditioniert wurden, sinnleere Berechnungen durchführten. Die Schülerinnen und Schüler suchten nach möglichen Rechenoperationen und führten diese aus, ohne sie mit dem Sachkontext zu überprüfen (Kapitänsaufgaben).

Im Gegenzug zu der unbefriedigenden Anwendungsorientierung folgte in den Siebzigerjahren eine Stärkung der Strukturerkennung im Mathematikunterricht.

Losgelöst von Sachkontexten wurden mit der *neuen Mathematik* Inhalte der Logik in die Lehrpläne aufgenommen, dies auf Kosten von Anwendungen zu Situationen (Sachrechnen). Grundschulkinder untersuchten beispielsweise die Strukturen der *logischen Blöcke* [2] und lernten das Operieren in verschiedenen Zahlsystemen. Die starke Fokussierung auf kontextgelöste Strukturierungsaufgaben führte dazu, dass die Grundschulkinder einfache

[2] Das Lernmaterial besteht aus vier verschiedenen Formen. Jede Form gibt es in vier verschiedenen Farben, zwei Größen und zwei Dicken. Sie bieten ein Übungsfeld, um etwa Schnitt- und Vereinigungsmengen zu bilden und die Lernenden können sich mit Aussageformen und Aussagen auseinandersetzen.

Anwendungen und Grundfertigkeiten der Mathematik nicht mehr im gewünschten Maß verfügbar hatten.
Heymann beklagt die Folgen der Entwicklung der Siebzigerjahre:

> „Die Ausklammerung des Nützlichkeitsaspekts beraubt den Mathematikunterricht, denkt man an die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler, seiner potentiellen Bildungswirkungen.“ (Heymann, 1996, p. 135)

Auf diese Entwicklung folgte eine Gegenbewegung. In den späten Achtzigerjahren wurde die Bedeutsamkeit der Anwendungsorientierung wieder in besonderem Maß hervorgehoben.

Beispielsweise schuf Reusser (1989) ein theoretisches Modell zum Lösen von Textaufgaben und entwickelte dazu ein entsprechendes Computerprogramm, durch welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Textaufgaben zur Übersetzung vom Real- zum mathematischen Modell unterstützt werden. Das Mathematisieren von Sachkontexten und die Strukturierung der Aufgaben, rücken ins Zentrum (Reusser, 1995, p. 301).

Im Gegensatz zu Reusser forderten 1998 Hollenstein und Eggenberg eine Neuorientierung des Mathematikunterrichts bei welchem die Förderung der Fähigkeit des Modellierens gestärkt werden soll. Dazu entwickelten und beforschten sie ‚**M**aterialien für **o**ffene **Si**tuationen im **Ma**thematikunterricht' (MOSIMA) (A Hollenstein & Eggenberg, 1998). Mit diesen Lernmaterialien zeigten sie auf wie Prozesse eines einsichtigen Konstruierens und Lösens mathematikhaltiger Probleme gefördert werden können. (A Hollenstein & Eggenberg, 1998, p. 7). Die Überzeugung, dass Lernmaterialien des Sachrechnens an und für sich anregend, gehaltvoll und motivierend genug sind und nicht zuerst dazu gemacht werden müssen, war eine Grundlage ihrer Materialentwicklung. Sie entwickelten zu komplexen Situationen, in denen sich mithilfe der Mathematik interessante Vergleiche oder Klärungen erschließen ließen, Startmaterialien. Diese Materialien sind zwar reichhaltig, aber im Vergleich zu authentischen Unterlagen didaktisch zubereitet und reduziert, so dass ein erleichterter Einstieg möglich ist. Wie der Name Startmaterial sagt, können anschließend weitere Arbeiten mit authentischem Material folgen.

Müller und Wittmann stiessen im deutschsprachigen Raum das Projekt ‚mathe 2000' an. Darin wird die Umwelterschließung als tragende Grundidee der Elementarmathematik deklariert (Müller, Steinbring, & Wittmann, 1997, p. 10).

Elf Jahre nach den Statements von Heymann und Wittmann ist eine Veränderung der Lehrmittelkultur sichtbar. Mittlerweile wird in Curricula und Standards (KMK Standards, HarmoS, Schweizerischer Lehrplan 21) die Anwendungsorientierung als wichtige Zielausrichtung des Mathematiklernens aufgeführt und in den aktuellen Lehrmitteln gestärkt.

Die Forderung nach Anwendungsorientierung wird mittlerweile kaum mehr in Frage gestellt.

> „Modellieren ist en vogue." (Leiss et al., 2008, p. 1)

Bei Themen, die ‚en vogue' sind, lohnt es sich, genau hinzuschauen. Aus diesem Grund sind hier auch einige kritische Gedanken zur Anwendungsorientierung festgehalten.
Gute Lernanlässe im Sinne einer Anwendungsorientierung zu entwickeln, war und ist eine Herausforderung. Sowohl unzweckmäßige Formen wie auch eine zu starke Gewichtung der Anwendungsorientierung, verfehlen das Ziel, ein tragfähiges mathematisches Verständnis aufzubauen.
Auf der Suche nach geeigneten Lernanlässen hat sich im Laufe der Zeit die Umsetzung der Anwendungsorientierung in Schulbuchaufgaben verändert.

So wie die Untersuchungen von Baruk die Gefahr von zu simplen Anwendungsorientierungen aufzeigen, bezeichnet Wittmann 30 Jahre später die unmittelbare Anwendungsorientierung als kontraproduktiv, obwohl er die Anwendungsorientierung grundsätzlich nicht in Frage stellt. Um Mathematik als Hilfsmittel nutzen zu können, so Wittmann, ist insbesondere das Erfassen der im Sachkontext liegenden mathematischen Strukturen wichtig. Richtet sich ein Mathematikunterricht hauptsächlich auf Anwendungen komplexer Sachsituationen, könnte die Gefahr bestehen, dass ein zentrales Anliegen des Mathematikunterrichts, das Erkennen mathematischer Strukturen, zu wenig Beachtung findet. (Wittmann, 2014).
Auch wer die Anwendung der Mathematik als Bildungsziel fokussiert, kommt nicht darum herum, das Mathematisieren von Sachkontexten gezielt zu üben.

> „Es braucht in Sachaufgaben inhaltsbezogene Muster, die man in der jeweiligen Situation hineindenken kann. (Wittmann & Müller, 2008, p. 78)

Aus diesen Ausführungen lässt sich folgern, dass sowohl zu eng geführte, kleinschrittige Textaufgaben, die hauptsächlich nur auf eine mathematische Struktur fokussieren, ebenso das Lernziel verfehlen können, wie ein Mathematikunterricht, der durch eine starke anwendungsorientierte Prägung das Bewusstmachen der mathematischen Strukturen aus den Augen verliert.
Bei der Unterrichtsgestaltung und explizit auch in der Lehrmittelentwicklung müssen beide Aufgabentypen aufgenommen werden, insbesondere ist auf eine angemessene Ausgewogenheit beider Aufgabentypen zu achten.

Um dieser Balance der Anwendungsorientierung gerecht zu werden, integriert beispielsweise das Lehrmittel mathbuch (Affolter et al., 2014) diese beiden Aufgabentypen in unterschiedlich geprägten Lernumgebungen.
Die eine Art Lernumgebung (beispielsweise die Lernumgebungen 1 – 31 im mathbuch 7) geht hauptsächlich von einem mathematischen Inhalt aus. Die

darin aufgeführten Anwendungsaufgaben sind an den zu bearbeitenden mathematischen Inhalt gebunden und fördern explizit die Fähigkeit des Mathematisierens. Die Auseinandersetzung mit zugrunde gelegten mathematischen Strukturen steht im Vordergrund.

Der andere Typ Lernumgebung (beispielsweise die Lernumgebungen 32 – 37 im mathbuch 7) wird im Lehrmittel als Projekt bezeichnet. Darin werden Startmaterialien zum Bearbeiten authentischer Alltagssituationen angeboten. Bei diesem Material steht die Förderung des Modellierens im Zentrum. Die Hauptherausforderung besteht darin, aus einer komplexen Sachsituation quantifizierbare Aspekte herauszuschälen und sie in ein Realmodell zu übertragen. Im Lehrerband wird angeregt, dass in jedem Quartal ein Projekt bearbeitet werden soll. Dazu werden Vorschläge gemacht, wie solche Projekte mit wenig oder großem zeitlichem Aufwand gestaltet werden können.
Diese Lehrmittelstruktur bietet die Möglichkeit, sowohl Modellierungs- als auch Mathematisierungskompetenzen gezielt zu fördern.

Zusammenfassung:
Die Anwendungsorientierung ist der Schlüssel, um Strategien zum Bearbeiten von Problemstellungen der außermathematischen Welt mithilfe mathematischer Werkzeuge aufzubauen. Um komplexe Situationen mithilfe von Berechnungen einzuschätzen, ist die Fähigkeit des Modellierens gefordert. Mathematisieren, eine Teilkompetenz davon, ist anspruchsvoll und muss gezielt gefördert werden. Dies betrifft einerseits Übersetzungen ausgehend von einem Realmodell, einer vereinfachten, außermathematischen Problemstellung und andererseits innermathematische Übersetzungen wie beispielsweise zwischen arithmetischem und algebraischem Modell. Übersetzungen in ein algebraisches Modell werden mit der Denkhandlung des Algebraisierens beschrieben.

Die Prägung der Anwendungsorientierung hat sich im Verlaufe der letzten 50 Jahre stark verändert. Verschiedene didaktische Überzeugungen lösten sich gegenseitig ab. Aktuell ist die Anwendungsorientierung kaum bestritten. Dies bedeutet für die Praxis, dass sowohl Modellierungs- als auch Mathematisierungsaufgaben in sinnvoller Ausgewogenheit im Unterricht eingesetzt werden sollen.

3 Stoffdidaktische Grundlagen zum Algebraisieren von Sachkontexten

Trigeros und Ursini (1999) stellen fest, dass den Schwierigkeiten, die zum Teil Universitätsstudierende im elementaren Gebrauch von Variablen ausweisen, nicht mit weiteren Algebrakursen beizukommen ist. Pointiert weisen sie darauf hin, dass diese Schwierigkeiten nicht auf mangelnde kognitive Leistungsfähigkeit oder entwicklungsbedingt zu erklären sind. Sie orten den Grund dieser Schwierigkeiten in der heutigen Didaktik der Algebra (Trigueros & Ursini, 1999, p. 3). Dieses Phänomen kann auch bei Schülerinnen und Schülern beobachtet werden, ihre Lernschwierigkeiten im Bereich der Algebra sind oft trotz großem Aufwand kaum auszuräumen.

Die Fachdidaktik ist gefordert, Zugänge zu finden, die den Einstieg in das Thema *Sachkontexte Algebraisieren* erleichtern. Seit den Siebzigerjahren ist das Lernen und Lehren der Algebra in der didaktischen Forschung ein ständiges Thema.

In der früheren Forschung stellte man das Curriculum der Algebra nicht in Frage. Der Fokus war hauptsächlich auf Fehler gerichtet, welche bei Schülerinnen und Schüler aus höheren Schulen beim Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen beobachtet wurden. Mit der *Entwicklungsforschung* wird eine neue Richtung eingeschlagen. Im Zentrum stehen Lernprozesse und Entwicklungen von Vorschlägen für die Praxis wie beispielsweise im Projekt FUNKEN (Prediger & Link, 2012). Einige Studien beschäftigen sich mit *Early Algebra*, wie zum Beispiel die Studie von Jacobs et al. (2007). Darin wird untersucht wie Schülerinnen und Schüler der Grundschule Strukturen und Beziehungen erfassen, ohne dabei bereits die formale algebraische Sprache einzusetzen.

3.1 Von der Arithmetik zur Algebra

Die Algebra, wie sie in unseren Schulen unterrichtet wird, kann als Verallgemeinerung der Arithmetik aufgefasst werden.
Bei der Einführung der Algebra stützen sich Lehrmittel und Lehrpersonen auf das arithmetische Vorwissen der Schülerinnen und Schüler. Dazu gehören unter anderem die bekannten Rechengesetze. Diese gelten auch für das Buchstabenrechnen. Es gibt jedoch entlang dieser Parallele Bruchstellen. Lernende haben zum Teil große Schwierigkeiten, die ihnen bekannten Rechengesetze der Arithmetik in die Algebra zu übertragen. Um die algebraische Sprache zu verstehen, müssen Denkkonzepte, die im Zahlenrechnen tragfähig sind, zum Teil umgebaut und erweitert werden. Akinwunmi (2012) ortet eine Kluft zwischen dem Rechnen mit Zahlen und dem Rechnen mit Buchstaben und weist darauf hin, dass typische arithmetische Strategien und Vorstellungen nicht direkt in algebraische Aufgabenstellungen übertragen werden können (Akinwunmi, 2012). Das bedeutet für die Lernenden, dass bestehende Konzepte überarbeitet, vertraute Muster erweitert und mit neuen Erkenntnissen vernetzt werden müssen. Neukonzepte entstehen nicht durch Ersetzen der alten. Es ist immer eine Erweiterung des Bestehenden. Diese Neugestaltung ist ein Prozess, der im Unterricht initiiert und sorgfältig begleitet werden muss (Prediger, 2009).
Einige Studien weisen auf Hürden und Umbrüche im Aufbau der algebraischen Sprache hin, an denen Lernende, ausgehend von ihren arithmetischen Kenntnissen, anstoßen. Diese werden in der englischen Literatur unter den Begriffen *cognitive gap* oder *didactical cut* (Linchevski, 1994; Specht, 2007) beschrieben.

In drei Abschnitten zu *Variablen verstehen*, *Terme verstehen* und *Gleichungen verstehen* werden nachfolgend die Begriffe für die vorliegende Arbeit in angemessenem Maß geklärt. Anschließend werden die aus der Literatur bekannten didaktischen Herausforderungen beschrieben.

3.2 Variablen verstehen

3.2.1 Begriffsklärung

> „Was sind Variablen eigentlich? Ich glaube, dass diese Frage niemand zufriedenstellend beantworten kann, weil der Variablenbegriff zu schillernd und zu aspektreich ist.“ (Malle & Wittmann, 1993, p. 44)

Der Begriff der Variable ist nicht einfach abzugrenzen. Variablen sind keine Erfindungen der Mathematik. In der Umgangssprache gibt es entsprechende Wortgruppen wie *irgendwelche, ein Ding, viele*, ... Diese Ausdrücke haben, wie die Variable, die Funktion eines Stellvertreters. Bereits die babylonische, beziehungsweise die ägyptische Mathematik bediente sich der Wörter wie *Haufen, Menschen, Tage*, ... Schon damals verloren sie die ursprüngliche Bedeutung und wurden als *Wortvariablen* stellvertretend für gewisse Zahlen verwendet (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015).
Auch heute werden Wortvariablen eingesetzt, etwa mit der Redewendung *Länge mal Breite eines Rechtecks ergibt den Flächeninhalt*. Damit wird ein funktionaler Zusammenhang beschrieben. Die Ausdrücke *Länge, Breite* und *Flächeninhalt* sind einerseits Wörter, die zur Beschreibung des Sachverhalts dienen, andererseits sind sie auch Platzhalter für Zahlen. Demzufolge sind sie Wortvariablen (Siebel, 2005, p. 77 ff).

Die Entwicklung der Wortvariablen hin zu Buchstaben ist ein weiterer Abstraktionsschritt, der die Variable stärker vom Kontext trennt. Damit wird regelhaftes Operieren möglich. (Malle & Wittmann, 1993, p. 45).
Die Formel $l \cdot b = A$ kann beispielsweise regelgeleitet umgeformt werden in $A : l = b$ oder in $l = A : b$.

Um Ausdrücke der algebraischen Sprache zu verstehen, ist eine Klärung der Variable unabdingbar. Lernende, die ihre Vorstellungen auf den Umgang mit Zahlen stützen, müssen Gelegenheiten haben, diese zu erweitern.

3.2.2 Didaktische Herausforderungen

Um ein tragfähiges Variablenverständnis aufzubauen, müssen Vorstellungen der Arithmetik erweitert werden.

Vorstellungserweiterung 1:	Was sind Variablen?
Vorstellungserweiterung 2:	Welche Funktionen tragen Variablen in sich?
Vorstellungserweiterung 3:	Wie kann die Variable bearbeitet werden?

Vorstellungserweiterung 1: Was sind Variablen?

Variablen sind Platzhalter für Zahlen. Sie werden mit Buchstaben bezeichnet. So einfach und klar diese Aussage scheint, das zugrunde gelegte Verständnis ist nicht selbstverständlich. Buchstaben kennen die Schülerinnen und Schüler aus ihren Alltagserfahrungen, hier, im algebraischem Kontext, muss die Deutung erweitert werden. Es sind folgende Herausforderungen zu meistern:

- Der Buchstabe: Ist er ein Wortteil oder eine Variable? Im Alltag werden aneinandergefügte Buchstaben als Wörter gelesen. Nicht so in der Algebra. Jeder Buchstabe steht für sich, als Leerstelle einer Zahl. Die Lernenden müssen beide Interpretationen verfügbar haben und situativ entscheiden, welche Interpretation gefordert ist. Beispielsweise kann der Ausdruck *ab* als Wort oder als algebraischer Term gedeutet werden.

- Die Position des Buchstabens: Ist sie entscheidend oder vertauschbar? Das Wort aba hat nicht dieselbe Bedeutung wie das Wort bab und hat nichts mit dem Ausdruck ab2 zu tun. In der Algebra sind diese Formulierungen gleichwertig. Die Buchstaben stehen für vertauschbare Faktoren. (Kommutativgesetz).

- Die Variable: Sie steht für eine Zahl und nicht für eine Ziffer Die Position der Ziffer ist im Dezimalsystem entscheidend. Wird sie vertauscht, ändert der Wert der Zahl, beispielsweise $12 \neq 21$. Im Gegensatz dazu gilt in der Algebra: $ab = ba$. Die beiden Buchstaben können in ihrer Reihenfolge getauscht werden. Sollen Ziffern mit Variablen ausgedrückt werden, so müssen sie zuerst in eine Zahl übersetzt werden, das heißt, dass sie mit den entsprechenden Stellenwerten des Dezimalsystems multipliziert werden muss. Beispiel: 12 setzt sich aus einem Zehner und zwei Einern zusammen. Der Term lautet $10a + b$.

- Variablen: Sie sind keine Abkürzungen für Alltagsobjekte

Im Alltagsgebrauch werden Buchstaben als Abkürzungen für Gegenstände eingesetzt, so etwa in Lösungsprotokollen. Algebraisch gedeutet steht der Buchstabe als Platzhalter für eine Zahl. Malle (1993) zeigt anhand von Beispielen diese Problematik auf.

„Helga (29, Akademikerin)

I: (legt folgende Ausgabe vor) In einem Saal sind x Männer und y Frauen. Was bedeutet die Formel $y = x + 2$?

H: (schweigt minutenlang)

I: Vielleicht ist es leichter, wenn wir die Anzahl der Männer mit M und die Anzahl der Frauen mit F bezeichnen. Dann lautet die Formel $F = M + 2$. Was bedeutet das?

H: (spontan) Die Frau hat einen Mann und zwei Kinder.

I: Muss denn diese 2 unbedingt 2 Kinder bedeuten. Können es nicht zwei Männer oder zwei Frauen sein?

H: Nein, denn sonst müsste ja hier stehen: F = M + 2M. Oder: F = M + 2F.
I: Wenn es zwei Kinder sind, dann müsste ja eigentlich hier F = M + 2K stehen.
H: Ja ... richtig.“ (Malle & Wittmann, 1993, p. 2)
Zuerst ist Helga irritiert und kann die Gleichung nicht interpretieren. Der Hinweis des Interviewers, x und y durch M und F zu ersetzen, bringt sie auf den Gedanken, die Buchstaben als Abkürzungen für die Begriffe Mann und Frau zu verstehen. Darauf deutet Helga die Variablen als Abkürzungen von Mann → M und Frau → F.

- Variablen: Sie sind keine Abkürzungen für Maßeinheiten

Buchstaben werden in Sachsituationen als Abkürzungen für Größen verwendet, beispielsweise m für die Abkürzung von Meter. Wie nun in einer Rechenaufgabe ein Buchstabe zu deuten ist, muss situativ entschieden werden. Für Lernende, die sich noch nicht gewohnt sind mit Variablen umzugehen, kann dies herausfordernd sein.

- Variablen: Sie sind ausschließlich Platzhalter für Zahlen

Theoretisch scheint der Sachverhalt klar zu sein. In der Praxis zeigt sich manchmal ein anderes Bild. Es lassen sich Aufgabenstellungen oder Aufgabeninterpretationen beobachten, die dem Aufbau eines Variablenverständnisses zuwider laufen. Dazu ein Beispiel aus dem Internet (Schörfling, 2009). In der Aufgabe wird das Zusammenfassen von Summanden mithilfe von Äpfeln und Birnen illustriert.

Vereinfache: 3a+ 2b + a - b

Zähle Äpfel und Birnen zusammen.

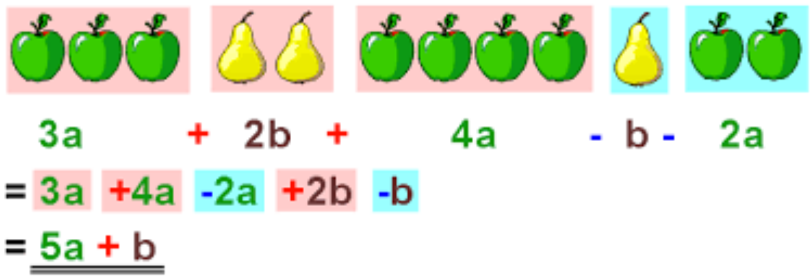


Abbildung 11 Summanden addieren, Bildquelle Schörfling 2009

Vermutlich werden die Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe richtig lösen. Visualisierungen dieser Art können jedoch Fehlvorstellungen begünstigen. Die Variablen a und b stehen in dieser Darstellung stellvertretend für Gegenstände. Dadurch kann die Vorstellung gestützt werden, dass die Variable als Abkürzung von Objekten steht.

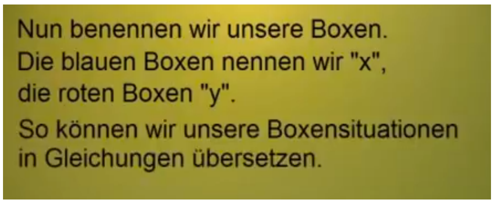
Im folgenden Beispiel wird aufgezeigt, dass auch Lernmaterialien, die bewusst den Aufbau eines nachhaltigen Variablenverständnisses fokussieren, sogar im Rahmen der fachdidaktischen Lehre falsch interpretiert werden können. In *Knack die Box*, einer Lernumgebung aus dem Schweizerischen Lehrmittel *mathbuch 1* (Affolter et al., 2014), werden Zündholzschachteln, genannt Boxen, als Modell eingesetzt. Ziel ist der Aufbau eines Verständnisses von Variablen als Platzhalter für Zahlen. In die Box werden Zündhölzchen gelegt, gefragt wird jeweils nach der Anzahl Hölzchen in einer Box. Die Variable wird nicht durch die Box verkörpert, sondern steht für eine Zahl, nämlich die Anzahl Hölzchen in einer Box.

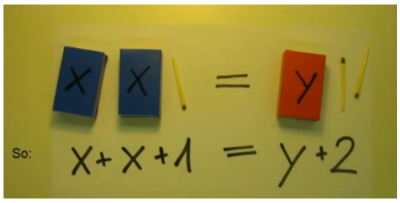
Abbildung 12 Mathbu.ch 7, Lernumgebung 10, Aufgabe 1 (Affolter et al., 2002)

Um einer falschen Variableninterpretation vorzubeugen, werden dazu nicht die Variablen r (für rot) und b (für blau) verwendet. Die Variable für die Anzahl Hölzchen in der blauen Box wird mit x, die Variable für die Anzahl Hölzchen in der roten Box wird mit y bezeichnet. Im Lehrerkommentar wird auf die Bedeutung der präzisen Sprache hingewiesen.

Abbildung 13 Mathbu.ch 7, Lernumgebung 10, Aufgabe 3 (Affolter et al., 2002)

Am Beispiel eines Videos aus dem Internet (Linnemath, 2010), das von Studierenden einer Lehrerbildung erstellt wurde und nun Lehrpersonen zur Verfügung steht, lässt sich ein Vorgehen beobachten, das womöglich auch andernorts in der Praxis angewendet wird. Die Variablen werden, trotz didaktischer Anleitung (Lehrerkommentar), nicht im Sinne des Modells geklärt. Die Boxen selbst werden mit x und y bezeichnet, die Variablen werden zu Abkürzungen für die blaue, respektive die rote Box verwendet. Mit dieser Ungenauigkeit wird die Chance verpasst, den Variablenbegriff zu klären. (Korrekt ist, wenn die Variable für die Anzahl Hölzchen in einer blauen, respektive in einer roten Box steht.)





https://www.youtube.com/watch?v=Gvw3AMyB-To

Abbildung 14 Deutung der Variable falsch interpretiert

Solche Ungenauigkeiten entstehen womöglich aus Bequemlichkeit oder aus dem Bedürfnis heraus, einen Text möglichst einfach zu halten. Wer jedoch verstanden hat, dass die Deutung der Variable zentral ist, muss eine ausführliche Formulierung in Kauf nehmen und auf eine genaue Sprache achten und diese auch von den Lernenden einfordern.

An diesem Beispiel kann gezeigt werden, dass durchdachte Lernmaterialien allein noch nicht genügen, um Studierende und Lehrpersonen bezüglich dieses Problemfeldes zu sensibilisieren.

- Variablen: Stehen sie wirklich für beliebige Zahlen?

Innerhalb eines Kontextes steht der gleiche Buchstabe für dieselbe Zahl, denselben Term oder dieselbe Zahlenmenge. Die Formulierung, *Die Variable steht für eine beliebige Zahl.*, kann auch falsch verstanden werden. Das Wort *beliebig* ist nur beschränkt zutreffend. Wird die Variable beispielsweise mit einer bestimmten Zahl belegt, gilt diese Bindung für den gesamten Term oder für die gesamte Gleichung (Bedeutungskonstanz (Malle & Wittmann, 1993, p. 111) oder Verweisungscharakter der Variable (Siebel, 2005).

Vorstellungserweiterung 2: Welche Funktionen tragen Variablen in sich?

Eine Variable hat in ihrer Funktion als Platzhalter unterschiedliche Aufgaben. Sie kann Unbekannte, Unbestimmte oder Veränderliche sein (Siebel, 2005, p. 77). Grundsätzlich steht die Variable entweder für eine Zahl, für mehrere Zahlen oder für einen Term.

Unbekannte, die bestimmt werden soll:
Bsp: $3+x=2x$

Variable steht für eine Zahl

Unbestimmte, die nicht weiter interessiert:
Term vereinfachen: $2x+4+x=3x+4$

Unbestimmte gilt für alle Zahlen:
$a\cdot b=b\cdot a$

Variable steht für mehrere Zahlen

Funktionaler Aspekt (Veränderliche):
n te Figur berechnet sich mit $2n+1$
(funkt. Schreibweise $f(n)=2n+1$)

Abbildung 15 Funktionen der Variablen

Steht die Variable in einer Gleichung für eine bestimmte Zahl, wird die Variable als Unbekannte bezeichnet. Ziel ist es, diese Zahl zu bestimmen. Beispiel: $2x+5=18$; Wie groß ist x?

Die Variable kann aber auch für irgendeine Zahl stehen, die nicht weiter beachtet werden soll. Beispielsweise interessieren in Termumformungen die Werte der Variablen nicht. Sie werden als Rechenobjekte weiterverarbeitet.

Beispiel: $a + 2b + a + 2b = 2a + 4b$

Steht die Variable für mehrere Zahlen, so sind wiederum zwei unterschiedliche Funktionen möglich. Die Variable steht für alle Zahlen, welche ohne Ausnahme für eine bestimmte Aussage gelten. Siebel (2005, p. 80) spricht in diesem Zusammenhang vom Simultanaspekt und beschreibt dies mit den Worten: *„Alle Zahlen aus einem bestimmten Bereich gelten gleichzeitig".*

Beispiel: Für alle Zahlen gilt das Distributivgesetzt: $2(a + b) = 2a + 2b$.

Die Variable kann aber auch für eine veränderliche Zahl stehen. Man lässt die Zahl laufen und beobachtet die Werte, die der Term dabei annimmt. In diesem Fall interessiert der funktionale Zusammenhang. Wie verändert sich der Wert des Terms, wenn die Zahl sehr klein, respektive sehr groß gewählt wird?

Beispiele: Explizite Formeln von Zahlenfolgen, Konvergenzkriterium von Cauchy (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015, p. 128).

Vorstellungserweiterung 3: Wie kann die Variable bearbeitet werden?

Die drei Handlungsaspekte *Gegenstandsaspekt, Einsetzaspekt* und *Kalkülaspekt* beschreiben wie die Variable verarbeitet werden kann (Malle & Wittmann, 1993, p. 50 ff). Alle drei Aspekte müssen als Strategien beweglich verfügbar sein.

Am Beispiel einer Variable, in der Funktion einer Unbekannten, werden die verschiedenen Bearbeitungsformen (Handlungsaspekte) ausgeführt.

> „Lösen durch inhaltliche Überlegung (Betonung des Gegenstandsaspekts)
>
> Ich nenne die gesuchte Zahl x. Für diese muss gelten:
>
> $2(x+1)=8$
>
> Da das Doppelte der Zahl x + 1 gleich 8 ist, ist:
>
> $x+1=4$
>
> Die Zahl x um 1 vermehrt ergibt 4. Somit ist:
>
> $x=3$
>
> Lösen durch Einsetzen von Zahlen (Betonung des Einsetzaspektes)
>
> Ich suche eine Zahl, welche die Gleichung erfüllt.
>
> $2(x+1)=8$
>
> Ich probiere mit der Zahl 1.
>
> $2(1+1) \ddagger 8$
>
> Ich probiere mit der Zahl 5.
>
> $2(1+5) \ddagger 8$
>
> Mit der Zahl 3 wird die Gleichung erfüllt.
>
> $2(1+3)=8$
>
> Lösen mithilfe von Regeln (Kalkülaspekt)
>
> Für die Zahl x muss folgende Gleichung gelten:
>
> $2(x+1)=8$
>
> Ich forme durch Anwenden von Regeln um:
>
> Ich teile beide Seiten durch 2 $(x+1)=4$
>
> Ich subtrahiere auf beiden Seiten 1 $x=3$
>
> (Malle & Wittmann, 1993, p. 50)

Der Gegenstandsaspekt erfordert hauptsächlich eine relationale Sichtweise. Die Terme müssen in einen Zusammenhang gestellt und interpretiert werden. Es ist wohl die ursprünglichste Art, sich mit Unbekanntem auseinanderzusetzen und kann auch leicht in Worten beschrieben werden. Malle (1993, p. 53) schätzt diese Handlungsstrategie als die einfachste ein.

Erfahrungen aus der Praxis lassen vermuten, dass auch der Einsetzaspekt einfach umzusetzen ist. Mit dem Einsetzaspekt ist das Einsetzen von Zahlen in einen Term oder eine Gleichung gemeint. Diese Handlung kommt ebenfalls ohne Metasprache aus. Zahlen können direkt eingesetzt und damit die entsprechenden Terme berechnet werden.

Der Kalkülaspekt ist eher technischer Art (Malle & Wittmann, 1993). Dazu muss bereits einiges an algebraischem Wissen verfügbar sein. Solange Regeln angewendet werden, steht die operationale Sichtweise im Vordergrund. Geht es mehrheitlich darum, Muster zu erfassen, wird auch die relationale Denkweise zum Tragen kommen.

Beispiel: $3x^2 + 22\,x = 16$

Eine quadratische Gleichung kann mit der Formel gelöst werden, das Verfahren ist bekannt. Die operationale Denkweise steht im Vordergrund.

Soll die Gleichung ohne Formel gelöst werden, muss der Term links faktorisiert werden.

$3x^2 + 22\,x = 16 \qquad 3x^2 + 22\,x - 16 = 0 \qquad (x + 8)\,(3x - 2) = 0$

Nun ist sowohl das Erkennen von Mustern als auch ein sicheres Umformen gefordert (operational und realtional).

Die beiden Sichtweisen sind eng miteinander verwoben. Bei vielen algebraischen Ausdrücken ist zum Vornherein nicht klar unter welchem Aspekt die Variable betrachtet wird. Je nach entsprechendem Vorwissen werden die Lernenden eher die eine oder andere Lösungsstrategie anwenden. (Siehe pp. 13)

Diese drei aufgeführten Vorstellungserweiterungen tragen gemeinsam dazu bei, die Variable in ihrer Deutungsvielfalt zu verstehen. Im Besonderen muss darauf geachtet werden, dass ein Sinnzusammenhang möglich bleibt (siehe pp. 27). Die Schülerinnen und Schüler sind auf reichhaltige Anregungen angewiesen, um, ausgehend vom eigenen Vorwissen, die unterschiedlichen Deutungen von Variablen zu erschließen. Schill (2014) beschreibt ein tragfähiges Variablenverständnis mit dem Vermögen, unterschiedliche Variablenaspekt im Umgang mit Sachsituationen flexibel anzuwenden und dabei die Symbolsprache angemessen zu nutzen (p. 1063). Damit unterstreicht sie die Bedeutung der Anwendungsorientierung. Um reichhaltige Erfahrungen mit unterschiedlichen Variablenaspekten zu ermöglichen, müssen sich Lernende insbesondere auch mit dem Algebraisieren von Sachkontexten auseinandersetzen.

Specht (2007) macht auf die Bedeutsamkeit der Sprache aufmerksam. In einer Studie untersucht sie verschiedene Sprachebenen in welchen der Umgang mit Variablen beobachtet wird.

Natürlichsprachlich:	Ich habe eine Zahl und addiere null. Was passiert dann mit der Zahl?
Gemischte Formen:	x plus 0 ist gleich
Mit Wortvariablen:	Eine Zahl plus null ist gleich ...
Formalsprachlich:	$x + 0 = ...$

Ein Ergebnis der Studie macht hellhörig. Schülerinnen und Schüler der 4. Klasse lösen die Aufgaben natürlichsprachlich formuliert knapp besser als die Schülerinnen und Schüler der 8. Klasse. Neu gelernte Regeln werden bei den Schülerinnen und Schüler des 8. Schuljahres oft übergeneralisiert. Z.B $x + x = x^2$ oder $x = 1x$ zu $x = 1$. (Specht, 2007, p. 3)

Eine zu wenig geklärte formale Sprache scheint zu einem Verständnisverlust zu führen. Der Schritt vom konkreten Rechnen hin zur formalen algebraischen Sprache darf nicht zu einer Entkoppelung des Vorwissens führen. Was Schülerinnen und Schüler der 4. Klasse erfolgreich lösen, müsste auch von den Schülerinnen und Schülern des 8. Schuljahres mindestens gleich gut bewältigt werden. Dazu ist eine Sprache nötig, die jederzeit eine Übersetzung in die individuelle Sprache möglich macht (siehe pp. 31). Bleibt die Sprache selbst im Rezeptiven und Formalen stecken, ohne dass der Sachverhalt wirklich verstanden ist, wird sie zu einer Verständnishürde. Darum ist, insbesondere bei der Beschreibung der Variablen, die in ihrer multifunktionalen Charakteristik eine sehr präzise Sprache einfordert, besondere Sorgfalt geboten. Specht kommt zum Schluss, dass ein Bewusstmachen der Bedeutsamkeit der Sprache beim Mathematiklernen, ein Beitrag zur Verbesserung des Mathematiklernens sein kann (Specht, 2007, p. 4).

3.3 Terme verstehen

Erst wenn die Variable in einen Term eingebunden ist, lässt sie sich im Sinne der verschiedenen Variablenaspekte deuten. Umgekehrt ist ein Deuten der Terme immer auch mit dem Variablenverständnis verbunden.

3.3.1 *Begriffsklärung*

Arithmetische Terme sind aus Zahlen und Operationszeichen zusammengesetzt

In dieser Arbeit ist hauptsächlich von algebraischen Termen die Rede. Sie werden kurz Terme genannt. Sie setzen sich aus Ziffern, Buchstaben, Operationszeichen und Klammern zusammen. Im Gegensatz zu den arithmetischen Termen, die hauptsächlich zur Darstellung von Berechnungen eingesetzt werden, liegt der Hauptfokus bei algebraischen Termen auf der Beschreibung von Beziehungen (Siebel, 2005, p. 84). Sie sind Verallgemeinerungen und beschreiben Zusammenhänge oder Relationen.

Terme sind sowohl Platzhalter einer Zahl sind als auch eine Beschreibung einer Beziehung (siehe Seite 36ff).

Ein Term, der als eine Beziehung oder Bauplan gelesen wird, wird relational betrachtet und muss zur Berechnung umgedeutet werden, etwa wenn es darum geht eine Summe zu bilden (encapsulation). In diesem Fall steht der Term nur noch als Platzhalter für eine Zahl und kann so mit anderen Termen verrechnet werden. Umgekehrt müssen Terme auch interpretiert werden. Die dargestellten Zahlen und Operationen werden in einen Kontext eingebettet, so dass sie wieder in einen Sinnzusammenhang, sei dieser inner- oder außermathematisch, eingebunden sind (deencapsulation).

Beide Sichtweisen sind im Umgang mit Termen wichtig. Terme können beispielsweise umgeformt und vereinfacht werden, so dass Beziehungen, die vorher nicht sichtbar waren, offen gelegt werden.

$$(a+b)(a-b) \qquad = \qquad a^2 - b^2$$

Beispielsweise ist beim Klammerterm links noch nicht sichtbar, dass das Produkt auch als Subtraktion zweier Quadratzahlen gedeutet werden kann. Erst die regelgeleitete Umformung macht diese Beziehung sichtbar. Somit ist Umformen (operationale Denkweise) eine wichtige Stütze, um weitere Beziehungen erkennen zu können (relationale Sichtweise).

Verschiedene Studien weisen auf die Bedeutsamkeit dieser beiden Denk- oder Sichtweisen hin (Hefendehl-Hebeker & Rezat, 2015; Linchevski, 1994; Tall et al., 1999) (S. 36ff).

3.3.2 Didaktische Herausforderungen

Ross, zuständig für die Zentralprüfung des Landes Nordrhein – Westfahlen, bestätigt anhand der Ergebnisse der Prüfungen zum mittleren Schulabschluss (MSA), dass das Aufstellen von Termen den Schülerinnen und Schülern der Klasse 10 nicht leicht fällt (Ross, 2015).

Der Unterschied zwischen Arithmetik und Algebra manifestiert sich ausgeprägt in der Deutung von Termen. Um algebraische Terme zu verstehen, ist eine Vorstellungserweiterung nötig. Dabei gibt es einige Hürden zu überwinden.

Zwei Beispiele werden hier ausgeführt:

Alle gleichwertigen Terme passen zu denselben Zahlenbeispielen

Bei arithmetischen Termen kann der Wert des Terms bestimmt und Rechenoperation ausgeführt werden. Beispiel: 3 + 5 - 2 = 6. Dabei kann schrittweise vorgegangen werden, das Ergebnis ist eine Zahl. Liegt nur das Ergebnis einer Rechnung vor, kann die Struktur des arithmetischen Terms nicht mehr zurückverfolgt werden. Beispielsweise beschreibt der Zahlenterm $2 \cdot 7$ eine Multiplikation, das Ergebnis ist 14. Die Zahl 14 enthält keinen Hinweis mehr, ob diese beispielsweise aus einer Verdoppelung oder aus einer Addition, wie etwa 10 + 4, hervorgegangen ist.

Im Gegensatz dazu sind algebraische Terme Verallgemeinerungen. Quantifizierbare Beziehungen können mit Termen allgemein, knapp und präzise beschrieben werden. Nun liegt kein explizites, numerisches Ergebnis vor, sondern eine Beschreibung von Beziehungen oder Relationen. Beispielsweise beschreibt der algebraische Term $2\,n$ eine Verdoppelung. Es lassen sich dazu entsprechende Zahlbeispiele nennen, etwa wenn n ein Element der natürlichen Zahlen ist, lauten mögliche Zahlen *2, 4, 6, ...* (Terme auswerten). Ausgehend von Zahlbeispielen kann wiederum die Struktur des algebraischen Terms (re)konstruiert werden und ein entsprechender Term erstellt werden. Dabei ist zu beachten, dass ein Zahlbeispiel alleine nicht genügt. Es sind so viele Zahlen notwendig, bis die Struktur anhand der Zahlbeispiele eindeutig erfasst werden kann.

Dazu lässt sich dann auch nicht ein expliziter Term finden, sondern alle dazu gleichwertigen Terme bilden dieselbe Struktur ab und stehen somit für dieselben Zahlbeispiele.

Dies ist für einige Schülerinnen und Schüler, die sich stark auf ihre Erfahrungen aus der Arithmetik stützen, nicht selbstverständlich.

Der Term als Beschreibung einer Beziehung und als Platzhalter für eine Zahl

Für Lernende ist es schwierig, diese beiden Sichtweisen in Termen zu erkennen.

Wird der Term operational betrachtet, steht er als Platzhalter für eine Zahl und kann verrechnet werden. Malle spricht in diesem Zusammenhang von Rechenhandlung (1993, p. 146).

Wird der Term relational betrachtet, steht er für eine Beziehung, oder einen Bauplan.

Malle (1993) weist auf die beiden unterschiedlichen Deutungs-möglichkeiten hin. Er unterscheidet zwischen Handlungen und Beziehungen. Werden Terme durch Handlungen weiterverarbeitet, kommt die operationale Sichtweise zum Tragen. In diesem Fall steht der Term für eine Zahl.

Werden Terme interpretiert, steht die relationale Sicht im Zentrum. Unter dieser Perspektive ist es nicht verständlich, warum mit diesen Objekten operiert werden kann. Ausdrücke wie $x + 4$, $2a$, $\sqrt{x}$ deuten die Schülerinnen und Schüler relational als Rechenweg oder als *unausgeführte Rechnung* und erkennen sie nicht als Platzhalter für Zahlen. Dadurch sind sie auch nicht in der Lage mit diesen Objekten zu operieren (Malle & Wittmann, 1993, p. 110)

Beide Sichtweisen sind nötig und bedingen einander. Das Wechseln von der einen zur anderen Sichtweise scheint eine wichtige Fähigkeit zu sein, um Terme zur Beschreibung von Sachkontexten nutzen zu können. Sfard und Linchevski (1994) weisen darauf hin, dass geübte Algebra-Anwender sich dieser beiden Sichtweisen nicht bewusst sind. Diese wählen unbewusst die richtige Vorgehensweise und wechseln bei Bedarf. Es ist anzunehmen, dass teilweise auch Lehrpersonen sich dieser beiden Deutungsmöglichkeiten nicht bewusst sind (Sfard & Linchevski, 1994, p. 94).

Die didaktische Forschung zeigt auf, dass dieser Wechsel zwischen den beiden Deutungsmöglichkeiten (Denk- oder Sichtweisen) eine Hürde im Algebraisierungsprozess ist (Linchevski, 1994; Siebel, 2005).

Terme in unverbundener Form (disconnected)

Unverbundene Aufgaben treten im Umgang mit Termen in Erscheinung. Um den Begriff *unverbunden* (engl. disconnected) zu klären, werden zuerst Eigenschaften von *verbundenen* Aufgaben (engl. connected) dargelegt, die im Gegensatz zu den unverbundenen Aufgaben stehen (Bednarz & Janvier, 1996, p. 122).

Die verbundenen Aufgaben sind in ihrer Struktur so angelegt, dass die darin liegenden Informationen linear, Schritt für Schritt abgearbeitet werden können. Man beginnt mit der erst genannten Größe und berechnet dann die zweitgenannte, dann die drittgenannte Größe. In der Arithmetik können beispielsweise Zwischenergebnisse berechnet werden.

Verbundene Aufgabe (Beispiel aus dem Aufgabenset dieser Studie)

In einem Haus mit drei Etagen sind die Personen wie folgt verteilt: Im ersten Stock wohnen drei Personen mehr als im Dachgeschoss. Im Parterre wohnen zwei Personen weniger als im Dachgeschoss.

Im Gegensatz dazu können die unverbundenen Aufgaben nicht Schritt für Schritt bearbeitet werden. Es braucht dazu eine ‚Gesamtschau', um überhaupt zu erkennen, an welcher Stelle gestartet werden kann. Die Termstrukturen sind so angelegt, dass die beschriebenen Relationen gegenseitig aufeinander Bezug nehmen. Unverbundene Aufgaben gelten als anspruchsvoller (Siebel, 2005).

Unverbundene Aufgabe (Beispiel aus dem Aufgabenset dieser Studie):

In einem Haus mit drei Etagen sind die Personen wie folgt verteilt: Im ersten Stock wohnen drei Personen mehr als im Dachgeschoss. Im Parterre wohnen zwei Personen weniger als im ersten Stock.

Die beschriebenen Beziehungen müssen mit ihren unterschiedlichen Bezügen erfasst werden. Das kann durch ein geschicktes Ausprobieren gelingen, indem mithilfe von Zahlbeispiele elaboriert wird oder man nimmt die Algebra als nützliches Hilfsmittel zur Hand und erstellt entsprechende Terme.

Terme ersetzen: Substitution

Ein Term wird durch eine Variable ersetzt. Dieses Verfahren wird üblicherweise bei Gleichungen höheren Grades eingesetzt. Die Vermutung liegt nahe, dass dieser Schritt auch bei der Gewinnung einfacher Terme hilfreich sein kann.
Mit dem Schritt der Substitution können verschiedene Relationen schrittweise erfasst werden. Dies Erleichtert das Erfassen der Termstruktur. Die Substitution kann als Hilfestellung im Prozess einer Loslösung aus der mathematischen Struktur oder aus einem Kontext betrachtet werden. Oldenburg (2009) geht dieser Vermutung nach. In einer qualitativen Studie setzt er sich mit der Bedeutung der Substitution auseinander. Er kommt zum Schluss, dass sie eine wichtige Operation zum Verstehen von Termen und zum Umgang mit Termen ist. Die operationale Sichtweise wird auf diese Weise im Umgang mit Termen gestärkt. Oldenburg betont, dass die Substitution bedeutsam ist, weil sie algebraisches Operieren vereinfacht (Oldenburg, 2009).

Operationsverständnis

Eine wichtige Grundlage im Umgang mit Termen ist das Operationsverständnis.
Spätestens beim Schuleintritt lernen Kinder die Grundoperationen kennen. Arithmetische Terme werden aufgestellt und interpretiert, Vorstellungen zu Zahlen und Operationen werden aufgebaut. Dieses Operationsverständnis ist auch im Umgang mit algebraischen Termen eine wichtige Grundlage. Fehlt sie, werden Schülerinnen und Schüler beim Einstieg in die Algebra scheitern. Demzufolge könnten Schwierigkeiten, die beim Algebraisieren von Sachkontexten auftreten, auch in einem zu wenig gesicherten

Operationsverständnis gründen. Diese Möglichkeit muss in Phasen der Lernbegleitung miteinbezogen werden.

3.4 Gleichungen verstehen

3.4.1 Begriffsklärung

Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden, entsteht wiederum eine größere Denkeinheit, die Gleichung (Siebel, 2005). Beide Terme links und rechts vom Gleichheitszeichen weisen den gleichen Wert auf. Dies ist ein eindeutig beschreibbarer Zusammenhang, dennoch kann er unterschiedlich gedeutet werden.
Winter (1982) hat bereits auf die verschiedenen Interpretationen des Gleichheitszeichens hingewiesen. Je nach Kontext kommt die eine oder andere Deutung des Gleichheitszeichens zum Tragen. Siebel spricht sogar von unterschiedlichen Gleichheitsbegriffen (Siebel, 2005, p. 74), die bei Prediger (2008) konkretisiert werden:

> „1. Operationszeichen (Aufgabe – Ergebnis – Deutung)
> 2. Relationszeichen:
> 2a. arithmetische, aber symmetrisch verstandene Gleichheit
> 2b. Bestimmungsgleichungen (Gleichung als Bedingung für Unbekannte)
> 2c. allgemeine Formeln im Sachzusammenhang (inhaltliche Gleichheit
> 2d. Äquivalenz gleichwertiger Terme (formale Gleichheit)
> 3. Setzungszeichen (Definition)“ (Prediger, 2008, p. 4)

Wird das Gleichheitszeichen als Operationszeichen gedeutet, ist damit eine Aufforderung zur Operation verbunden. z.B. 4 + 2 =.
In der Arithmetik der Grundschule herrscht diese Deutung des Gleichheitszeichens vor. Das Zeichen ist gerichtet, in der Regel wird von links nach rechts gerechnet, nur bei Klammerausdrücken kann von dieser Regel abgewichen werden. (Kieran, 2006).

Bei der Einführung in die Algebra muss die Deutung des Gleichheitszeichens erweitert werden. Das Gleichheitszeichen steht dann auch als

Relationszeichen, beide Terme links und rechts des Gleichheitszeichens stehen gleichwertig nebeneinander (Siebel, 2005, p. 84), es liegt also kein gerichtetes sondern eher ein symmetrisch zu deutendes Gleichheitszeichen vor. In der Abbildung 16 werden unterschiedliche Deutungsvarianten mit exemplarischen Beispielen aufgeführt. Daraus lässt sich ablesen, dass gerichtete Gleichheitszeichen in unterschiedlichen Formen zur Anwendung kommen, je nach Funktion des Gleichheitszeichens.

Um eine Gleichung als Ganzes erfassen zu können, muss das Gleichheitszeichen als Verbindung zweier Terme gleichwertiger Terme verstanden werden. Diese eher symmetrisch zu interpretierende Deutung ist eine Erweiterung des gerichteten Gleichheitszeichens und muss Lernenden als solche bewusst gemacht werden.

Deutung des Gleichheitszeichens	**Aufgabentyp / Funktion**	**Beispiel**
	traditionelle Rechenaufgabe	3 + 5 = 8
Gerichtetes Gleichheitszeichen Die Gleichung wird von links nach rechts gelesen	Formeln	A = a · b
	Funktions-gleichung	f(x) = 2 n
	Definition	kgV (m, n) := 0 wenn m = 0
Symmetrisch	Bestimmungs-gleichheit	5x - 2 = x + 28

gedeutetes Gleichheitszeichen Die beiden Terme links und rechts des Gleichheitszeichens werden in Relation gebracht. (Die beiden Seiten sind vertauschbar.)	allgemeingültige Aussage	a + b = b + a
	gleichwertige Terme verknüpfen	2 (a + b) = 2a + 2b

Abbildung 16 Verschiedene Funktionen des Gleichheitszeichens

Für das Algebraisieren von Sachkontexten sind zwei unterschiedliche Strategien des Lösens von Gleichungen relevant:

Lösung der Gleichung durch Ausprobieren bestimmen

Durch geschicktes Probieren werden anstelle der Variablen Zahlen eingesetzt, anschließend wird die Gleichungen überprüft, wenn nötig wird die eingesetzte Zahl angepasst bis die Gleichung stimmt.

Gleichung umformen

Gleichungen werden durch Äquivalenzumformungen gelöst, mit dem Wissen, dass die Gleichheit bestehen bleibt, wenn beidseits des Gleichheitszeichens die gleichen Grundoperationen durchgeführt werden. Die Gleichung wird in die Form x = ... gebracht.

3.4.2 Didaktische Herausforderungen

Um Sachkontexte zu algebraisieren sind folgende Herausforderungen bekannt:

- Problematik bezüglich der Deutung von Variablen im Kontext von Gleichungen
- Enge Sicht auf Gleichheitszeichen (nur operational)

Der Umkehrfehler

Der Umkehrfehler liegt im Bereich *Sachkontexte algebraisieren* und ist breit untersucht (Malle & Wittmann, 1993; Oldenburg & Henz, 2015).
Unter dem Umkehrfehler werden falsche Übersetzungen von umgangssprachlichen Texten in Gleichungen verstanden. Berühmt dabei ist die Professorenaufgabe:

> „Es sei S die Anzahl der Studenten und P die Anzahl Professoren an einer Universität. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Drücken Sie die Beziehung zwischen S und P durch eine Gleichung aus.“ (Malle & Wittmann, 1993, p. 93)

In der Studie von Malle (1993) konnten nur 60% der Studierenden die Aufgabe richtig lösen. Malle führte aus, dass viele Versuchspersonen auch nach einer intensiven Schulung sich gegen die richtige Lösung sträubten und betont, dass dieser Fehler nicht bloß als *Ausrutscher* gedeutet werden kann (Malle & Wittmann, 1993, p. 95). Bei solchen Phänomenen lohnt es sich aus didaktischer Sicht hinzuschauen: Beharren Studierende und Akademikerinnen und Akademiker trotz Belehrung auf ihrem (falschen) Standpunkt, ist anzunehmen, dass sich hier ein grundlegendes Problem beim Verständnisaufbau von Termen und Gleichungen manifestiert.

Umkehrfehler lassen sich auch in vielfältiger Weise im Unterricht beobachten. Zum Beispiel bei einer Aufgabe aus dem mathbuch 1, Lernumgebung 10 ‚Knack die Box' (Affolter et al., 2014):

> „Beny hat drei Karten mehr als Trix.
> Die Anzahl Karten für Beny wird mit y, die Anzahl Karten für Trix wird mit x abgekürzt.
> Wie lautet die entsprechende Gleichung
> $y + 3 = x$ oder $y = x + 3$?"

Die Antwort im Sinne des Umkehrfehlers lautet falsch: $y + 3 = x$

Ein Vorgehen, das zu einem solchen falschen Ergebnis führt, könnte so ablaufen: *Beny hat drei Karten mehr.* Dieser Textabschnitt wird direkt in $y + 3$ übersetzt, im Sinn von *Beny bekommt drei Karten mehr*. Der Rest der Gleichung wird dann noch mit dem x von Trix ergänzt.
Fehler dieser Art sind auf fehlende Vorstellungen zu Gleichungen und Variablen zurückzuführen. Um die Übersetzung von Relationen in Gleichungen zu entlasten, könnte als Hilfestellung ein Zwischenschritt vorgeschlagen werden.
Ohne sich zuerst mit der ungewohnten algebraischen Schreibweise befassen zu müssen, können diese Aussagen in Form von Zahlenbeispielen wiedergegeben werden. Die Übersetzung in Zahlen ist hilfreich, um die im Text beschriebene Relation zu klären. Um die Richtung der Relation zu erkennen, kann die Frage, *Wer hat mehr?,* weiterhelfen.
Die Zahlbeispiele sind nun von der Relation losgelöst (operational). In einem nächsten Verarbeitungsschritt kann wieder ein Blick auf die Struktur der Zahlen gelegt werden (relational) und damit das Zahlenmuster untersucht werden. Nun stellt sich die Frage wie die Variablen gesetzt werden müssen, so dass beim Auswerten der Terme beidseits des Gleichheitszeichens die gleiche Anzahl vorliegt.

Grundlagen zur Vermeidung des Umkehrfehlers sind ein ausgebautes Variablen- und Gleichungsverständnis.
Dabei sind Einsichten tragend wie

- ein Sachverhalt lässt sich mit Zahlenbeispielen wiedergeben
- Variablen sind Platzhalter für Zahlen
- beidseits des Gleichheitszeichens muss die gleiche Anzahl vorliegen

Sind diese Vorstellungen entsprechend aufgebaut, können solche Fehler zwar aus Unachtsamkeit auftreten. Sie lassen sich jedoch spätestens nach einem entsprechenden Hinweis ausräumen.

Eine enge Deutung des Gleichheitszeichens

Seit einigen Jahren beschäftigt sich die mathematikdidaktische Forschung mit den unterschiedlichen Deutungsmöglichkeiten des Gleichheitszeichens (Malle & Wittmann, 1993; Sfard, 1991; Winter, 1982). Dies scheint gerade beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra eine besondere Herausforderung zu sein. Schülerinnen und Schüler deuten das Gleichheitszeichen nur einseitig, als gerichtetes Zeichen (Operationszeichen). Dieses wird als Aufforderung, eine Operation durchzuführen, verstanden. Aufgabenstellungen, dieser Art sind sich die Schülerinnen und Schüler aus der Grundschule gewohnt: 2 + 4 =
Das Wort *ergibt* weist auf eine solche Deutung hin.

Um das Verfahren der Äquivalenzumformungen zu verstehen, muss die Deutung des Gleichheitszeichens erweitert werden. Die Einsicht, dass beidseits des Gleichheitszeichens gleiche Manipulationen möglich sind, ist dabei grundlegend. Fehlt diese Einsicht, sind algebraische Anwendungen nur sehr eingeschränkt möglich.
Die Bedeutsamkeit dieser Vorstellungserweiterung ist in der Didaktik bekannt (Borromeo Ferri & Blum, 2011; Molina, Castro, & Ambrose, 2005; Winter, 1982). Von dieser Tatsache geprägt sind insbesondere Forderungen nach

algebraischem Denken auf der Grundschule unter dem Begriff *Early Algebra* (Jacobs et al., 2007). Die Schülerinnen und Schüler sollen möglichst früh das Gleichheitszeichen nicht nur als Operationszeichen, sondern auch als Relationszeichen kennen lernen. Borromeo Ferri et al. (2011) fassen Ergebnisse aus verschiedenen Studien zusammen und halten fest, dass übereinstimmende Ergebnisse deutlich machen, dass das Gleichheitszeichen häufig als Handlungszeichen (gerichtet) und nicht als Beziehungszeichen (symmetrisch) verstanden wird. Als Beispiel fügen sie an, dass die Gleichung 3=3 von den Schülerinnen und Schülern nicht als solche akzeptiert wurde. Erstaunlicherweise gibt es einige Befunde, die belegen, dass sich solche unzureichenden Vorstellungen bis in den tertiären Bereich nicht ändern (Borromeo Ferri & Blum, 2011).

Aktuelle Lehrmittel, beispielsweise das Zahlenbuch (Müller & Wittmann, 2005), reagieren auf diese didaktische Hürde und führen auf der Grundschule mit geeigneten Aufgaben hin zu einer Deutungserweiterung des Gleichheitszeichens. Beispielsweise können Strukturerkennungen in produktiven Übungen ein Anstoß sein, Rechnung als Ganzes zu betrachten. Gezielte Musteruntersuchungen dieser Art helfen, eine einseitige Sicht (operational) auf das Gleichheitszeichen aufzulösen.

Gleichheit visualisieren: Waagemodell und Modell Knack die Box

Die Fähigkeit flexibel zwischen den Repräsentationsebenen (enaktiv, ikonisch und symbolisch) zu wechseln und diese zu vernetzen, ist für die Darstellung von mathematischem Wissen und für das Mathematiklernen bedeutsam (Böttinger, 2006). Somit können Anschauungsmittel beim Verständnisaufbau hilfreich sein. Sie sind ein Bindeglied zwischen Denken und Handeln und unterstützen einen intuitiven Zugang. Erfahrungen mit algebraischen Objekten können im Konkreten verankert und überprüft werden.

Anschauungsmittel sollten einerseits logisch im Sachkontext eingebettet sein. Das heißt, dass sie im Konkreten angewendet nicht zu einem Widerspruch führen. Gleichzeitig müssen sie zentrale Strukturen möglichst genau abbilden.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Gleichungen zu visualisieren (van Amerom, 2002, p. 14). Um die oben beschriebene Deutungserweiterung des Gleichheitszeichens zu stützen, hat sich das Waagemodell bewährt. Es ist in Schweizer Schulen weit verbreitet und bei Lehrpersonen beliebt.

Das Waagemodell

Mit diesem Anschauungsmittel wird das Gleichheitszeichen als Relationszeichen visualisiert. Die linke und die rechte Waagschale werden miteinander verglichen. Sind sie im Gleichgewicht, besteht „Gleichheit“. Der Inhalt (das Gewicht) der linken Waagschale ist gleich groß wie der Inhalt der rechten. Diese Visualisierung ist eine gute Metapher für die Gleichwertigkeit von Termen.

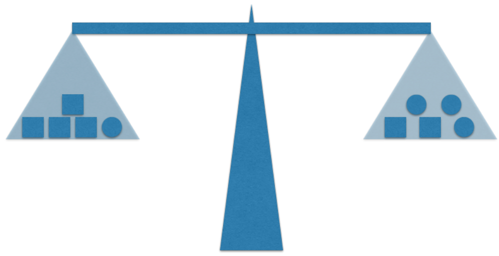


Abbildung 17 Beispiel eines Waagemodells

Das reale Modell der Waage birgt aber auch einige Schwachpunkte bezüglich der Deutung von Variable und Term. Die Charakteristik der Variable wird mit dem Waagemodell nicht präzise abgebildet. Der Gewichtsaspekt, der im Waagemodell im Vordergrund steht, kann irritierend sein. Es werden ja Gegenstände in die Waagschale gelegt und letztlich das Gewicht der Gegenstände verglichen. Dies kann Fehlvorstellungen unterstützen in der Art, dass Zahlen und Variablen als Gegenstände oder als Gewichtssteine gedeutet werden. Bei Variablen kommt zudem noch das Gewicht der leeren Box dazu.
Darum ist es wichtig, das Waagemodell die Grenzen des Modells bewusst zu thematisieren.
Hier setzt die Weiterentwicklung zum Modell *Knack die Box* ein. Die grundlegende tragfähige Idee der Balance wird beibehalten. Mithilfe der Boxen wird das Bild der Variable, ein Platzhalter für eine (An-)Zahl verdeutlicht (S. 70f).

Das Modell Knack die Box

Die Ausführungen zum Modell sollen aufzuzeigen, wie Herausforderungen im Aufbau eines Gleichungsverständnisses verbunden mit dem Verständnis von Variable und Term angegangen werden kann.

Abbildung 18 Lernumgebung 10, mathbuch 1 (Affolter et al., 2002)

Im mathbuch 1 Lernumgebung 10 (Affolter et al., 2014) ist das Modell *Knack die Box* in eine Lernumgebung eingebettet. In Form von Aufgabenstellungen wird der Umgang mit dem Modell angeleitet, dabei steht die Frage im Zentrum:

Wie viele Hölzchen könnten jeweils in den Boxen sein?

Es gelten folgende Regeln:

- Beidseits des Gleichheitszeichens liegt die gleiche Anzahl Hölzchen.
- In Schachteln gleicher Farbe muss die gleiche Anzahl Hölzchen drin sein.

Mit diesen Regeln werden die algebraischen Konventionen, die für Variable und Gleichung gelten, aufgenommen:

- Beidseits des Gleichheitszeichens ist die gleiche Anzahl.
- Innerhalb einer Gleichung gilt für gleiche Variablen der gleiche Wert (Verweisungscharakter (Siebel, 2005)).

Die Regeln (Konventionen) werden beim Lösen der Aufgaben immer wieder implizit wiederholt. Dadurch machen sich Lernende mit ihnen vertraut.

Die Ausgangssituation ist als reichhaltige Aufgabe angelegt. Es wird mit zwei Variablen gearbeitet, das Gleichungssystem ist unterbestimmt. Dadurch wird eine vertiefte Auseinandersetzung mit Termen ermöglicht.

Darstellungen in den verschiedenen Repräsentationsformen enaktv, ikonisch, symbolisch werden durch Aufgabenstellungen angeregt. Jede dieser Darstellungsebenen bietet sowohl Raum für die relationale als auch die operationale Sichtweise.

Ausgehend von einer Handlung, wird die Wertetabelle erstellt (Hantieren und Zusammenhänge erforschen). Die Boxen und Hölzchen sind konkrete Gegenstände. Sie unterscheiden sich jedoch kaum voneinander und können so als Repräsentanten gedacht werden, die eine Loslösung vom Gegenständlichen (relational) hin zu Zahlen (operational) unterstützen. Die Übersetzung von der Handlung zum Bild ist direkt übersetzbar. Anstelle des Legens von Boxen und Hölzchen können Rechtecke und Striche gezeichnet werden. Auch bei diesem Transfer von der Handlung zum Bild ist sowohl ein Hantieren als auch ein vernetzendes Denken gefordert (Abbildung 19).

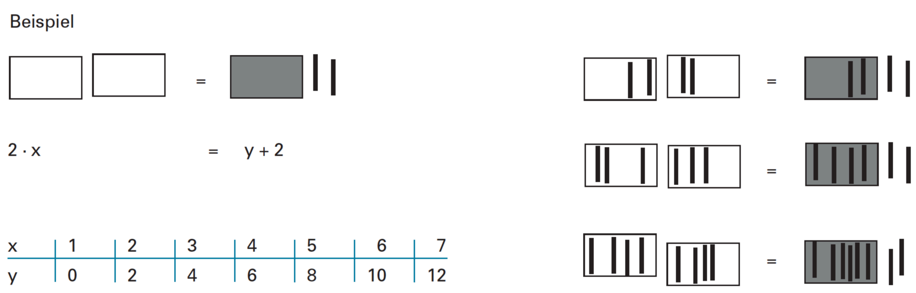
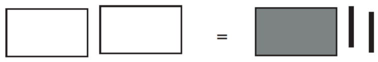


Abbildung 19 mathbu.ch 7, Lernumgebung 10, Arbeitsheft (Affolter et al., 2002)

Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass verschiedene Zahlbeispiele möglich sind. Sie machen sich mit der Strategie des Einsetzens von Zahlen (Terme auswerten) vertraut.

Der Schritt vom Bild zur Gleichung ist ein weiteres direktes Übersetzen. Die Variablen können zuerst einzeln aufgelistet werden ($x + x = y + 2$, Abbildung 20). Diese Denkhandlung entspricht einem Übertragen und liegt im Bereich des operationalen Denkens. In einem zweiten Schritt werden die Summanden addiert. Auch die Addition werden die Schülerinnen und Schüler, sobald sie eine gewisse Geläufigkeit im Umgang mit den algebraischen Objekten erreicht haben, mit einer vorwiegend operationalen Sichtweise angehen.

Beispiel



$2 \cdot x = y + 2$

Abbildung 20 Übersetzung vom Bild zur Gleichung in ‚Knack die Box'.

Am Beispiel des Modells *Knack die Box* kann illustriert werden, wie die drei Begriffe Variable, Term und Gleichung gemeinsam in ihrer Komplexität thematisiert werden können. Es lohnt sich, diese nicht isoliert zu betrachten. Vorstellungen zu Variable, Term und Gleichung sind eng miteinander verwoben. Um sie möglichst ganzheitlich aufzubauen, ist ein beweglicher Wechsel zwischen den beiden Denk- oder Sichtweisen notwendig.

Teil III Datenerhebung und Auswertung

1 Methode

Das methodische Vorgehen stützt sich auf einen Leitfaden zur qualitativen Forschung von Hollenstein (2012) und ist wie folgt strukturiert:

1.1 Einleitung
1.2 Darlegung der Ausgangslage
inkl. Vorgehen im Überblick und Stichprobe
1.3 Festlegung des Materials
inkl. Aufgabensets, Arbeitsmaterial und Beschreibung der Moderation
1.4 Methodologisches Vorgehen,
inkl. Definition der Analyseeinheit, Darlegung des Vorgehens zur Datenerhebung und zur Entwicklung von Kategoriensystem und Modell

1.1 Einleitung

Im aufgezeigten Stand der Forschung wird bereits deutlich, dass die einseitige Betrachtung von algebraischen Objekten Schwierigkeiten beim Algebraisieren von Sachkontexten und damit beim Verstehen von Algebra bewirken kann.
Die Bedeutsamkeit des Perspektivenwechsels der beiden Denk- oder Sichtweisen zu untersuchen im Bereich Sachkontexte Algebraisieren, steht im Mittelpunkt der hier vorgestellten Studie.

Folgende Forschungsfragen sind dabei leitend

- Inwiefern können die beiden Sicht-, respektive Denkweisen in den beobachteten Lösungsprozessen erfasst werden?

- Gibt es Hinweise, dass die Wechsel zwischen beiden Perspektiven für das Algebraisieren einfacher Sachkontexte bedeutsam sind?
- Welche Unsicherheiten und Schwierigkeiten können in den Lösungsprozessen beobachtet werden, die auf einen fehlenden Wechsel zwischen den beiden Denkweisen zurückzuführen sind?
- Welche Strategien und tragenden Ideen können beobachtet werden, die diesen Wechsel zwischen den beiden Denkweisen unterstützen?
- Lassen sich Umsetzungsideen und didaktische Hinweise für den Unterricht ableiten?

Die Fachdidaktik hat einen Beitrag zur Unterrichtsentwicklung zu leisten. Der besteht unter anderem auch in Form konkreter Unterrichtsvorschläge. Dies bedingt eine Vernetzung der Lernprozessforschung mit der Unterrichtsmaterialienentwicklung (Prediger, 2005). Diese Zielrichtung wird auch in der vorliegenden Arbeit angestrebt.

In Form einer qualitativen Studie werden Unsicherheiten, Klärungsversuche und Strategien erfasst. Als Strategien werden diejenigen Aktionen aufgeführt, die deutlich zu beobachten sind, zielorientiert scheinen und als hilfreich eingestuft werden.

Die erhobenen Daten werden mit den theoretischen Erkenntnissen vernetzt und analysiert. Die Ergebnisse werden soweit konkretisiert, dass sich daraus Hinweise für die Praxis herleiten lassen. Damit fühlt sich die vorliegende Arbeit den drei Komponenten des Modells der didaktischen Rekonstruktion verpflichtet - der *fachlichen Klärung*, *Erfassung der Schülervorstellungen* und *didaktischen Strukturierung.* Diese Komponenten stehen dabei in engen wechselseitigen Beziehungen.

Die fachliche Klärung erfolgte in den Kapiteln 1-3. Im nun folgenden empirischen Teil wird das Schülervorgehen erfasst, mithilfe eines Kategoriensystems strukturiert und anhand eines Modells interpretiert. Die Ergebnisse werden konkretisiert und daraus Hinweise für die Praxis abgeleitet. Auf diese Weise entsteht eine Vernetzung von theoretischer, empirischer und entwickelnder Arbeit.

1.2 Ausgangslage und Vorgehen im Überblick

Als Grundlage zur Entwicklung des Unterrichtsdesigns diente eine Vorstudie (Nydegger, 2012), die im Rahmen einer Masterarbeit erstellt wurde. Auch diese Studie lag im Bereich Sachkontexte algebraisieren. Der Fokus wurde auf die Abfolge der Lösungsschritte gelegt. Im Folgenden wird das Vorgehen dieser Vorstudie kurz expliziert, bevor das Vorgehen der eigentlichen Studie vorgestellt wird.

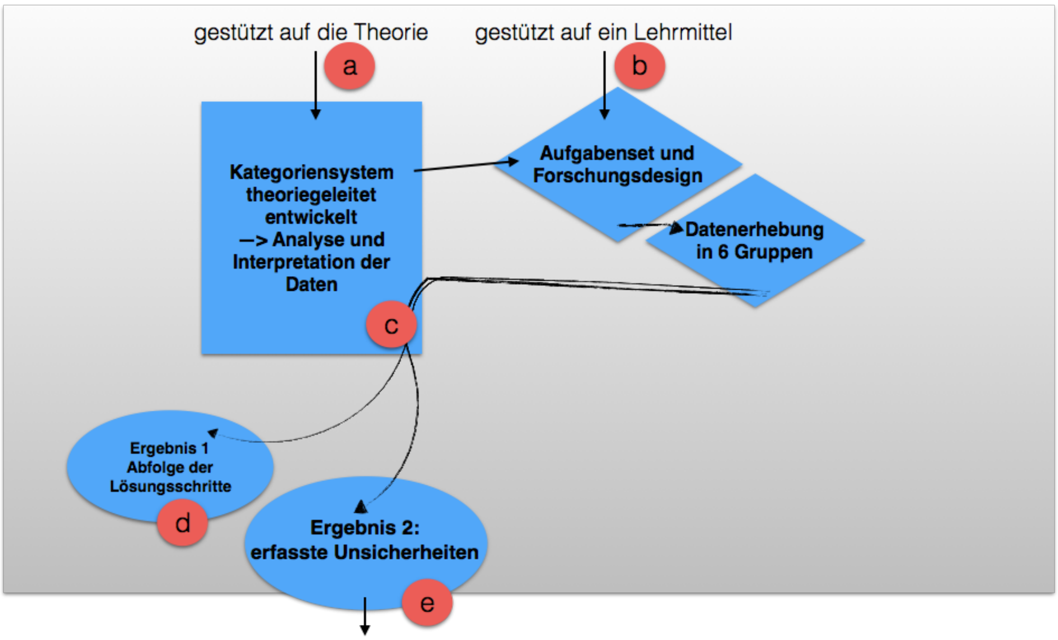


Abbildung 21 Das Vorgehen in der Vorstudie

Die Vorgehensschritte a - e kennzeichnen das Vorgehen der Vorstudie. Sie hat die Funktion einer Pilotierung für Aufgabenstellung und Design.

(a) Ein Kategoriensystem wurde gestützt auf das Stufenmodell von Berlin entwickelt (deduktiv) (siehe pp. 49)

(b) Ausgehend von einer Aufgabe aus dem Lehrmittel mathbuch (Affolter et al., 2002) wurde ein Design entwickelt, mit welchem das Vorgehen der Schülerinnen und Schüler gemäss den vorgegebenen Kategorien beobachtet werden konnte.

(c) Sechs Schülergruppen lösten das Aufgabenset und wurden dabei videografiert.
Es folgte eine Analyse der Beobachtungen, gestützt auf das Kategoriensystem.
Die Ergebnisse lassen sich auf zwei Ebenen zusammenfassen, in der Darstellung sind diese Schritte mit D und E markiert.

(d) Ergebnis 1: Die Lösungsprozesse verliefen in den meisten Fällen nicht linear. Zahlenbeispiele, Tabellen und handlungsorientierte Zugänge waren dabei hilfreich.

(e) Ergebnis 2: Es lassen sich vielfältige Unsicherheiten und Klärungsversuche explizieren, die beim Algebraisieren des vorgegebenen Sachkontextes auftreten können. Die Zusammenstellung dieser Unsicherheiten und Klärungsversuche wurde in der Vorstudie nicht weiter untersucht und werden nun zum Ausgangspunkt und Gegenstand der vorliegenden Studie.

Nun wird ein neuer Fokus auf das Algebraisieren von Sachkontexten gerichtet. Unsicherheiten und Strategien werden dahingehend untersucht, um der Bedeutsamkeit des Perspektivenwechsels zwischen den beiden Sichtweisen operational und relational nachzugehen.
In der folgenden Darstellung wird das Vorgehen der vorliegenden Studie zusammengefasst. Die schwarzen Pfeile geben den Ablauf der Arbeit wieder und zeigen eine Vernetzung von entwickelndem und empirischem Vorgehen auf.

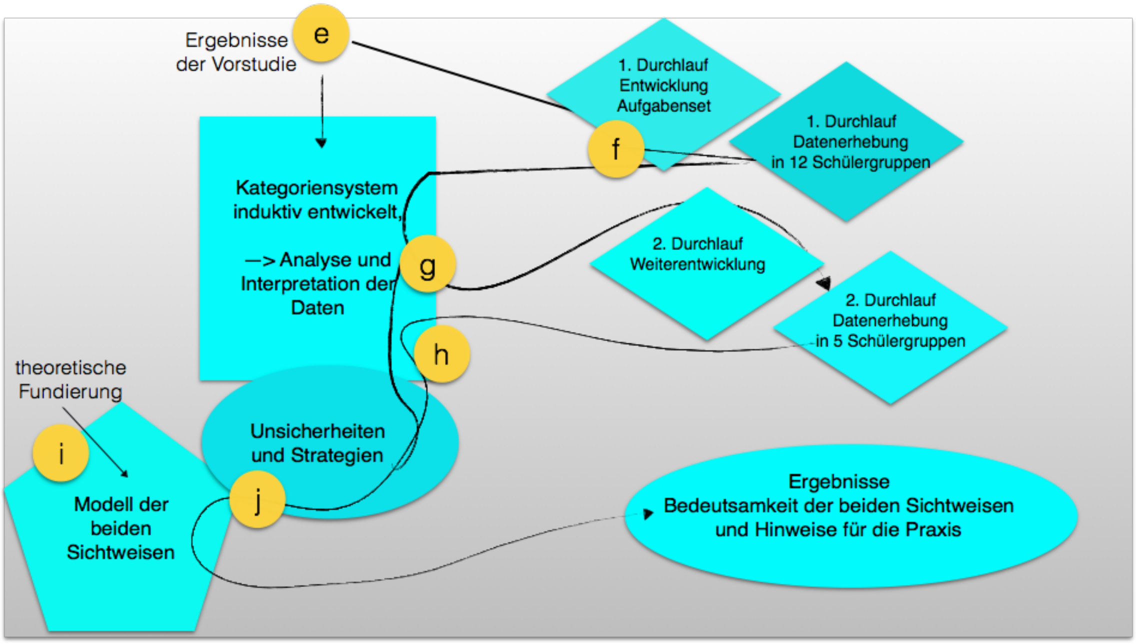


Abbildung 22 Vorgehen der vorliegenden Studie

(E) Die Zusammenstellung der unterschiedlichen Unsicherheiten dient der Entwicklung eines Kategoriensystems (induktiv).

Die Entwicklung des Forschungsdesigns stützt sich auf die Erfahrungen der Vorstudie. In einem ersten Durchgang werden 12 Schülergruppen videografiert.

(F) Die erhobenen Daten, die sowohl Unsicherheiten als auch Strategien enthalten, werden analysiert und führen zu einem weiteren Entwicklungsschritt des Designs. Entsprechend wird in einem zweiten Durchgang das Aufgabenset erweitert und die Moderation eingeschränkt.

(G) Das Vorgehen von weiteren Schülergruppen wird mit diesem neuen Design untersucht.

(F & G) Unsicherheiten und Strategien beider Durchgänge werden interpretiert und als Ergebnisse zusammengefasst.

(H) Damit liegt eine Zusammenstellung möglicher Herausforderungen im Bereich Algebraisieren von Sachkontexten vor.

(I) Um diese nun im Sinne der Frage *Warum ist das Algebraisieren von Sachkontexten schwierig?*, zu interpretieren, wird ein Modell zur Beschreibung der Lösungsschritte entwickelt, das sich sowohl auf theoretische Erkenntnisse als auch auf die Struktur des Kategoriensystems stützt. Mit dem Kategoriensystem werden die beiden Denk- oder Sichtweisen operational und relational fokussiert.

(H) Alle erhobenen Daten werden mithilfe dieses Modells interpretiert. Die Ergebnisse enthalten sowohl eine Zusammenfassung von Herausforderungen im Bereich Algebraisieren von Sachkontexte (Bereich Stoffdidaktik, (Wittmann, 2013)),als auch Hinweise für die Praxis (Bereich Unterrichtsentwicklung).

1.1.2 Übersicht zur zeitlichen Abfolge

Die Arbeitsabfolge der vorliegenden Studie strukturiert sich durch zwei Entwicklungsdurchgänge (f und g Abbildung 22).

	Erster Durchgang		**Zweiter Durchgang**	
Vorstudie		Erste Erfassung und Datenanalyse		Zweite Erfassung und Datenanalyse
Aufgabenset Vorstudie nur connected	Zusammenstellung der Unsicherheiten und Strategien aus der Vorstudie sichten., entscheiden an welchen Stellen eine präzisere Erfassung sinnvoll wäre. Vernetzung mit theoretischen Grundlagen. Weiterentwickeln des Aufgabensets, der Moderation und des Kategoriensystems. (Schritte E, F und G Abbildung 22)	Aufgabenset1 connected und disconnected. Gleichung	Datenanalyse sichten und Rückkopplung zur Theorie. Um die Erfassung noch stärker zu fokussieren, werden das Aufgabenset, die Moderation und das Kategoriensystem überarbeitet. (Schritte h, J und I Abbildung 22)	Aufgabenset2 connected und disconnected, stärker Fokus auf Umgang mit algebr. Termen
Moderation Vorstudie mit Hilfe		Moderation 1: a) mit Hilfe und b) ohne Hilfe		Moderation 2: wie Moderation 1b)
Videomaterial Vorstudie (Spiez)		Videomaterial Zwei Schulen ein Aufgabenset (Aufgabenset1)		Videomaterial Fünf Schulen zwei Aufgabensets (Aufgabenset1 und Aufgabenset 2)
→ **Kategoriensystem Vorstudie theoriegeleitet**		**→Kategorien-system mit Unsicherheiten und Strategien**		**→Modell zur Interpretation der beiden Denk – und Sichtweisen operational und relational**
2010 - 2012		2012 - 2014		2014 – 2016

Abbildung 23 Übersicht über die zeitliche Abfolge der Analyse- und Entwicklungsschritte in der Studie

In Abbildung 23 wird in vertikaler Schrift das Vorgehen, welches die Handlungsabläufe des Datenerhebungsprozesses steuert, beschrieben. In horizontaler Schrift sind Angaben über das entsprechende Material aufgelistet.

1.1.3. Stichprobe

Um dem Phänomen Sachkontexte Algebraisieren möglichst umfassend begegnen zu können, werden Schülerinnen und Schüler des 6. Schuljahres, die noch keine Kenntnis im Bereich der algebraischen Syntax haben und Schülerinnen und Schüler des 10. Schuljahres, die auch Erfahrungen aus dem Berufsalltag ausweisen, in die Stichprobe aufgenommen, es machen Gruppen aus unterschiedlichen Leistungsklassen mit. Sowohl bezüglich des Alters als auch bezüglich der Leistungsniveaus bietet die Stichprobe ein breites Spektrum. Vertreten sind die Altersgruppen des 6. – 10. Schuljahres und unterschiedliche Leistungsniveaus.
Die Studie ist eine Teilerhebung. An einer Weiterbildungsveranstaltung für Lehrpersonen wird die Studie kurz vorgestellt und Interessierte gesucht. Alle Lehrpersonen, die sich zur Mithilfe bereit erklären, werden in die Erhebung aufgenommen. Insgesamt sind 17 Gruppen beteiligt. Die Schülerinnen und Schüler machen freiwillig mit. Die Auswahl erfolgt somit nach Verfügbarkeit. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind nicht repräsentativ, sondern dienen einer Exploration.

1.2 Festlegung des Materials

Das Aufgabenset und die Moderation der Aufgaben werden vorgestellt (siehe Abbildung 23).

1.2.1 Die Entwicklung des Aufgabensets

Zielstufe dieser Studie ist die Sekundarstufe 1. Die inhaltliche Ausrichtung bezieht sich auf das ‚Algebraisieren von Sachkontexten' und liegt somit im Sachbereich Algebra.

Ein tragfähiges algebraisches Verständnis zeichnet sich im Besonderen durch einen flexiblen Umgang mit algebraischen Ausdrücken in Sachsituationen aus. Diese Anwendungsorientierung ermöglicht eine Verbindung mit eigenen Erfahrungen und dem Alltagswissen. Das ist vor allem für den Aufbau eines tragfähigen algebraischen Verständnisses eine wichtige Forderung.

Die Aufgaben müssen so konzipiert sein, dass alle Schülerinnen und Schüler einen Einstieg schaffen. Anleitungen zur Konkretisierung und zu handlungsorientierten Zugängen können dabei hilfreich sein (Ergebnisse aus der Vorstudie).

Gleichzeitig muss die Problemstellung in dieser Studie so herausfordernd sein, dass beim Lösen dieser Aufgaben Unsicherheiten entstehen und sichtbar werden (ab Seite 27). Sowohl eine Verstehensorientierung wie auch der Sinnzusammenhang sind dabei tragend. Nur wer die Situation versteht, kann sich auch die beschriebenen Zusammenhänge vorstellen und sie mit dem eigenen Vorwissen verknüpfen. Die im Kapitel *Theoretische Grundlagen zum Algebraisieren von Sachkontexten* aufgeführten lerndidaktischen Hinweise sind für die Entwicklung des vorliegenden Aufgabensets leitend.

Auf den ersten Blick scheinen die Aufgaben traditionellen Textaufgaben aus alten Schulbüchern sehr ähnlich. Der Unterschied liegt darin, dass nicht nach einer bestimmten Lösung gefragt wird, sondern nach möglichen

Zahlenbeispielen. Der *Umweg*, die Beziehungen zuerst in Zahlenbeispielen zu quantifizieren, ermöglicht einen explorativen Zugang. Die Schülerinnen und Schüler können ausprobieren, welche Zahlen möglich sind. Die Einstiegsrampe ist flach, eine Anknüpfung an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler ist möglich. Die Denkhandlungen werden von einer relationalen Denkweise ausgehend mit einer operationalen verbunden. Die Aufgaben geben Alltagssituationen soweit vereinfacht wieder, dass sie bereits in Form eines Realmodells vorliegen. Mathematisierungsprozesse werden unter dem Fokus der beiden Denk- und Sichtweisen relational und operational betrachtet.

Die Aufgaben sind inhaltlich angelehnt an das Lehrmittel *mathbu.ch* (Affolter et al., 2002). Sie wurden in ähnlicher Form in der Zeitschrift ‚mathematiklehren' publiziert (Nydegger, 2011).

Aufgabenset1: „Personenaufgabe"

Das Set1 besteht aus fünf Aufgaben, drei sogenannt Personenaufgabe, die sich auf den Kontext im..... Diese beziehen sich auf denselben mathematischen Inhalt, wobei sie in zwei unterschiedlichen Kontexten eingebettet sind. Der eine Kontext stützt sich auf die Anzahl Bewohner eines Hauses (P 1, P 2, P 3), der andere thematisiert eine Aufteilung von Karten (K 4 und K 5).

Beispiel Aufgabe (P1) des Aufgabensets1

In einem dreistöckigen Haus wohnen im Parterre doppelt so viele Personen wie im Dachgeschoss. Im ersten Stock wohnen dreimal so viele Personen wie im Dachgeschoss.

Auf den ersten Blick scheinen die Aufgaben traditionellen Textaufgaben aus alten Schulbüchern sehr ähnlich. Der Unterschied liegt darin, dass nicht nach einer bestimmten Lösung gefragt wird, sondern nach möglichen Zahlenbeispielen. Der *Umweg*, die Beziehungen zuerst in Zahlenbeispielen zu quantifizieren, ermöglicht einen explorativen Zugang. Die Schülerinnen und Schüler können ausprobieren, welche Zahlen möglich sind. Damit ist der

Zugang auf verschiedenen Niveaus zu bewältigen, eine Anknüpfung an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler angelegt. Die angeregten Denkhandlungen werden von einer relationalen Denkweise ausgehend mit einer operationalen verbunden.

Aufgabenset2 für den zweiten Durchgang: *Kartenaufgabe*
Die Weiterentwicklung hin zum Aufgabenset2 zielt auf eine Erhöhung des Schwierigkeitsgrades hin, so dass Unsicherheiten und Strategien im Umgang mit Termen noch prägnanter sichtbar werden. Dies wird in drei Bereichen umgesetzt.

- Gleichung stärker gewichten
- Mit ‚*unverbundenen'* Aufgaben (disconnected) ergänzen
- Gleichwertigkeit von Termen – Umgang mit der formalen Sprache

Gleichung stärker gewichten

Der Umgang mit Gleichungen konnte in der Vorstudie nicht in gewünschtem Maß beobachtet werden.
Demzufolge wird das Aufgabenset 1 dahingehend erweitert, dass sich die Schülerinnen und Schüler auch mit dem Bestimmen von Lösungen auseinandersetzen müssen. In jeder Aufgabe wird nach einer allgemeinen Betrachtung der Relationen auch eine Gesamtanzahl vorgegeben und nach der entsprechenden konkreten Verteilung gefragt. Dies in zwei Varianten: Einmal ist die Gesamtanzahl klein gewählt, so dass die Verteilung noch leicht ohne Gleichung zu bestimmen ist und einmal ist es eine große Zahl, so dass der Einsatz einer Gleichung hilfreich wäre.

Ein Beispiel aus dem Aufgabenset2 (Aufgabe K4):

Alois hat halb so viele Karten wie Barbara. Cyrill hat zwei Karten mehr als Barbara.

A) Gib die Terme an.

B) Insgesamt haben sie 27 Karten. Wie viele Karten hat jedes?

C) Insgesamt haben sie 130 Karten. Wie viele Karten hat jedes?

Mit unverbundenen Aufgaben (disconnected, vgl. S. 77) ergänzen

Im Aufgabenset der Vorstudie sind alle Aufgaben, wie die Aufgabenbeispiele oben, *verbunden* (connected). Zwei Relationen beziehen sich immer auf die dritte, die Bezugsgröße. Es zeigte sich im ersten Durchgang, dass die Schülerinnen und Schüler im Setzen der Bezugsgröße kaum Schwierigkeiten hatten. Darum wird das Aufgabenset1 erweitert. Gemäss Theorie gelten ‚disconnected – Aufgaben' als anspruchsvoller (siehe Seiten 84).

Die ersten Aufgaben bleiben in der Form *verbunden*. Die weiteren sind *unverbunden*.

Beispiel einer 'unverbundenen' Aufgabe (P3)

In einem dreistöckigen Haus wohnen im ersten Stock vier Personen mehr als im Parterre. Im Dachgeschoss wohnen doppelt so viele Personen wie im ersten Stock.

Gleichwertigkeit von Termen – Umgang mit der formalen Sprache

Im Aufgabenset2 werden zwei weitere Herausforderungen eingebaut. In Aufgabe 4 steht das Erkennen der Gleichwertigkeit zweier Terme im Zentrum. Terme werden in der algebraischen Sprache vorgegeben. Die Schülerinnen und Schüler müssen sie nicht selber entwickeln, sondern entscheiden, welche Terme die vorgegebene Situation wiedergibt. Diese Aufgabenstellung gibt einen Einblick, inwiefern die Schülerinnen und Schüler die algebraische Schreibweise verstehen.

Eine Diskussion, ausgehend von der algebraischen Sprache, wird angeregt. Bewusst wird der Umgang mit Termen, ohne die Lösung der Gleichung einzufordern, fokussiert. Damit soll ein weiterer Einblick in das Verständnis von algebraischen Termen möglich sein.

Beispiel Aufgabe 4 aus Set 2
Vergleiche die Terme.
Alois hat dreimal so viele Karten wie Barbara.
Cyril hat drei Karten weniger als Alois.

Terme 1:	*Alois: 3x*	*Barbara: x*	*Cyrill: 3x -3*
Terme 2:	*Alois: x + 3*	*Barbara: (x+3) : 3*	*Cyrill: x*

Welche Terme sind richtig, Terme 1, Terme 2 oder beide Vorschläge? Begründe.

1.2.2 Unterschiedliche Moderationen zur Aufgabenbearbeitung

Im ersten Durchgang werden die Hälfte der Schülerinnen und Schüler durch die Moderation 1a, die andere Hälfte die Moderation 1b angeleitet (siehe Abbildung 23). Der Unterschied der beiden Moderationen bezieht sich nur auf die Einstiegsaufgabe. Diese wird in der Moderation 1a, im Gegensatz zur Moderation 1b eng geführt.

Moderation 1a
Bei der Einstiegsaufgabe leiten die Interviewenden den Lösungsprozess eng an. Sie bitten die Schülerinnen und Schüler, mögliche Verteilungen mit Plättchen zu legen. Die Zahlenbeispiele werden in einer Wertetabelle eingetragen. Dadurch wird ein handlungsorientierter Zugang aufgezeigt und ein strukturiertes Festhalten des Lösungsprozesses vorgeschlagen.

> Die Einstiegsaufgabe lautet:
> In einem dreistöckigen Haus wohnen im Parterre doppelt so viele Leute wie im Dachgeschoss. Im ersten Stock wohnen dreimal so viele wie im Dachgeschoss.

Ein A3 Blatt mit der Struktur eines Hauses und einer Wertetabelle liegt vorbereitet vor.

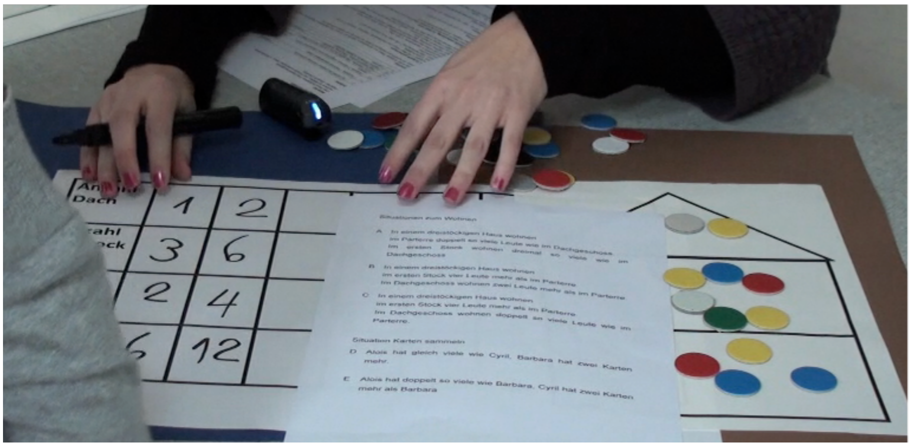


Abbildung 24 Moderation1a Aufgabe 1. Teil

Die Schülerinnen und Schüler lesen die Aufgabe vor und legen mögliche Verteilungen mit Plättchen. Sie tragen die Zahlen in der Wertetabelle ein und untersuchen deren Beziehungen.

Die Konkretisierungen der beschriebenen Relationen mithilfe von Zahlen sind noch losgelöst vom Wissen und Können im Umgang mit der algebraischen Sprache. Sie geben einen Einblick in Herausforderungen, die nicht im Umgang mit algebraischen Ausdrücken liegen. Sie sind grundsätzlicher Natur wie etwa das Erkennen der mathematischen Struktur oder ein zu wenig ausgebautes Operationsverständnis.

Erst nach dieser Konkretisierung möglicher Verteilungen erfolgt der Wechsel in den algebraischen Bereich. Dieses Vorgehen bietet eine flache Einstiegsrampe. Ein handlungsorientierter Zugang ohne algebraisches Wissen ist möglich. Mit dieser Aufgabenkonstellation wird die Möglichkeit geschaffen, Unsicherheiten zu lokalisieren. Liegen sie im Bereich eines allgemeinen mathematischen Verständnisses oder ist der Umgang mit algebraischen Ausdrücken schwierig.

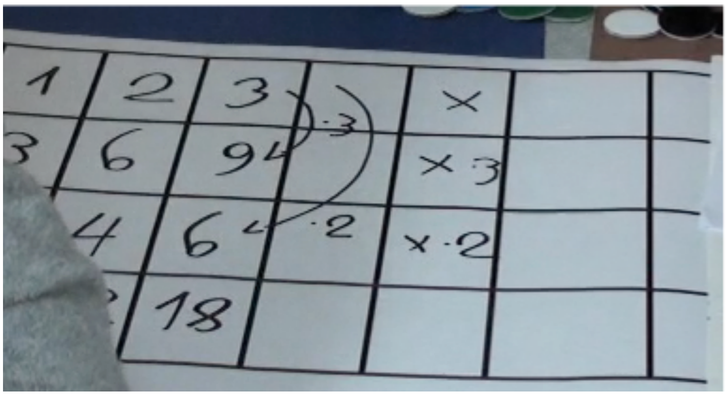


Abbildung 25 Moderation 1a Aufgabe 2. Teil

Der nächste Schritt fordert nun auch ein algebraisches Verständnis. Jetzt stellt sich die Frage an welcher Stelle die Variable gesetzt werden soll. Die im Text beschriebenen Relationen werden in Terme übersetzt. Zusätzlich kann eine Visualisierung mithilfe von Pfeilen helfen, die Richtung der Relation zu klären.

Mit dieser Moderationsform kann die Bedeutsamkeit der Hilfestellungen, die in der Einstiegsaufgabe angeleitet werden, überprüft werden. Greifen die Schülerinnen und Schüler auch bei den weiteren nicht moderierten Aufgaben auf diese zurück, ist anzunehmen, dass die Schülerinnen und Schüler diese Hilfestellungen als nützlich einschätzen.

Moderation 1b

Dem gegenüber wird in der Moderation B die Einstiegsaufgabe nicht angeleitet, das Material liegt jedoch auf dem Tisch bereit. Die Interviewenden fordern die Schülerinnen und Schüler auf, die Aufgabe laut vorzulesen. Sie fragen nach, ob noch etwas zu klären sei. Es folgen keine weiteren Hinweise wie die Aufgabe gelöst werden könnte. Moderation B gibt einen Einblick, wie Schülerinnen und Schüler ohne Anleitung Sachkontexte algebraisieren.

Die weiteren Aufgaben werden sowohl in Moderation 1a als auch in Moderation 1b auf die gleiche Weise unterstützt. Es folgen keine Anleitungen

mehr. Die Interviewenden greifen nur ein, wenn die Schülerinnen und Schüler nicht mehr weiter kommen oder eine Aussage nicht verstanden wird. Die Unterstützung ist minimal, sie beschränkt sich darauf, wenn nötig den Lösungsprozess wieder anzuregen.
Im zweiten Durchgang (siehe Abbildung 23) wird auf die Moderation 1a verzichtet. Es wird nur die Moderation 1b umgesetzt, das heißt die Hilfe zur Aufgabenbearbeitung ist minimal. Bei Fragen stehen die Studierenden zur Verfügung.
Diese Änderung hat zwei Gründe:
Von den geleiteten Einstiegen liegen nun schon einige Beispiele vor,
die nicht angeleiteten Moderationen lassen eine größere Lösungsvielfalt zu.

1.3 Methodologisches Vorgehen

1.3.1 Analyseeinheit

Eine Analyseeinheit umfasst den Lösungsprozess einer Aufgabe. Das Aufgabenset1 besteht aus fünf Aufgaben (vgl. Abbildung 24).

Drei Aufgaben stützen sich auf den Kontext Hausbewohner (vgl. ab Seite111) und werden mit Personen1 (P1), Personen2 (P2) und Personen3 (P3) bezeichnet.

Die zwei weiteren Aufgaben beziehen sich auf eine Sachsituation mit Karten, Kartenaufgabe1 (K1) und Kartenaufgabe2 (K2).

(Aufgabenset siehe Anhang)

Zehn Gruppen lösen das Aufgabenset1 bestehend aus 5 Einheiten. Es liegen somit insgesamt 50 Einheiten zum Aufgabenset1 vor.

Das Aufgabenset2 (vgl. Abb 24) besteht aus sieben Aufgaben. Dieses ist eine Weiterentwicklung des Aufgabensets1 und ist anders als das Aufgabenset1 strukturiert. Zwei Personenaufgaben werden zu einem Datensatz zusammengefasst, ebenso die beiden Kartenaufgaben.

Das Set wird mit einer Aufgabe zu gleichwertigen Termen und einer solchen, die explizit den Umgang mit einer Gleichung fordert, ergänzt. Somit besteht das Aufgabenset2 aus vier Einheiten:

P1&2, K1&2, gleichwertige Terme *(Vergl)*, Gleichung *(Gleich).*

Vier Gruppen lösen das Aufgabenset2, das sind insgesamt 16 Einheiten.

1.3.2 Datenerhebung

Die zeitliche Abfolge der Videoerstellung im Überblick:

	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Video erstellen	Videos Spiez	Videos Munz Aufgaben-set1	Videos Baet Aufgaben-set1	Videos Biel, Köniz, Gampel Aufgaben-set1 und 2	keine weiteren Videos	keine weiteren Videos

Abbildung 26 Zeitliche Abfolge zum Erstellen der Videos

Das Erfassen der Unsicherheiten und Strategien wird in Form von klinischen, teilstandardisierten Interviews durch Studierende der Pädagogischen Hochschule Bern geführt.

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten jeweils zu zweit ein Aufgabenset. Durch die Zusammenarbeit der beiden wird erhofft, dass sie sich austauschen, bei Unsicherheiten gegenseitig nachfragen und versuchen, die Sache gemeinsam zu klären. Mit dieser Form wirkt das klinische Interview weniger künstlich als im Einzelgespräch. Der Umstand, dass Schülerinnen und Schüler zu zweit arbeiten, entspannt die Situation, gibt Sicherheit in der ungewohnten Situation und erleichtert ein möglichst stressfreies Denken und Handeln. Um Sprachbarrieren möglichst klein zu halten, wird das Interview in Mundart geführt. Die Videos werden in den für die Schülerinnen und Schüler gewohnten Räumen durchgeführt.

Die Studierenden arbeiten jeweils auch zu zweit. Eine Person führt die Kamera, die andere moderiert (vgl. 116). Zur Moderation 1a liegt ein Interviewleitfaden vor (siehe Anhang).

Bei den weiteren Aufgaben und bei Moderation 1b sind die Studierenden angeleitet, bei interessanten Aussagen der Schülerinnen und Schüler nachzufragen. Wenn die Arbeit ins Stocken gerät, sollen sie mit kleinen

Unterstützungshilfen, wie *Legt es doch mit Material, Zählt nochmals, Stimmen diese Terme?* versuchen, den Lösungsprozess wieder in Gang zu bringen oder auf Fehler aufmerksam zu machen, falls diese eine Weiterarbeit behindern.

Eine Studentin führt jeweils das Interview, die zweite führt die Kamera. Bei der nächsten Aufnahme wird gewechselt, so dass möglichst unterschiedliche Interviewende beteiligt sind. Dies soll allfällige Einschränkungen durch die Interviewenden möglichst klein halten. Mit der Kamera wird der Blick von hinten auf die Aktivitäten der Schülerinnen und Schülern gerichtet.

Die Studierenden sind auf die Interviewführung vorbereitet. Sie kennen die Intention der Studie, setzen sich vorgängig mit dem Aufgabenset auseinander und erproben das Vorgehen mithilfe des Leitfadens. Mögliche auftretende Lernschwierigkeiten werden jedoch nicht thematisiert, um den Gang des Interviews nicht zu beeinflussen.

14 von 17 Videos liegen transkribiert vor.

Drei Videos werden nicht weiter verarbeitet, dies aus folgenden Gründen:

- Eine Gruppe aus Biel wird durch die Interviewende so schlecht moderiert, dass das Vorgehen der Schülerinnen und Schüler nicht sichtbar wird.
- Die Gruppe ‚Gampel' wird nicht weiter ausgewertet, weil diese Schülerinnen und Schüler die Aufgaben sehr sicher lösen. Es stellt sich heraus, dass sie dieses Themengebiet direkt vor dem Interview bearbeitet haben.

Die Videos einer Gruppe aus Bätterkinden kann nicht ausgewertet werden, weil das Tischmikrofon nicht zufriedenstellend funktioniert. Somit liegen 14 Videos zur Auswertung vor.

Im Vorfeld der Interviews werden die Transkriptionsregeln mit den Studierenden diskutiert und festgelegt.

1.3.3 Vorgehen Transkribieren und Codieren

Das Transkribieren der Videos wird in mehreren Sitzungen mit den Studierenden festgelegt und geübt. Videos der vorliegenden Art sind schwierig zu transkribieren. Der Text allein ist zu wenig aussagekräftig. Neben den verbalen Äußerungen müssen auch Handlungen und Darstellungen kommentiert werden. Dieses Vorgehen setzt unterschiedliche Formen des Transkribierens voraus:

Transkriptionen des gesprochenen Textes

> Beispiel:
>
> *S1: Ehm.. allgemein einfach zum Zusammenzählen, weil hier, ehm.. musst du immer noch überlegen wie viele hat. Er hat jetzt schon wieder gehabt und so, ja, mit dem Haus ist es praktischer, einfacher.*

Die Transkriptionen von Handlungen und Darstellungen

> Beispiel:
>
> *S2: Notiert von oben nach unten eins, zwei, drei und sechs als Total.*

Die ergänzenden Bemerkungen heben Feststellungen hervor, die nur implizit aus dem Text zu lesen sind (Paraphrasierungen).

> Beispiel ergänzende Bemerkung
>
> *Der Interviewer macht sie darauf aufmerksam, dass sie konkret vorgehen können, dass sie die Situation mit den Karten legen können.) Dieser Hinweis hilft. Sie finden die Lösung rasch. Analyse.*
>
> *P_Baet_oH_E1_jh_an_G2_Kl7*

Die Kodierung wird durch die Autorin geleistet. Eine Gruppe von 10 Personen (Studierende des Forschungspraktikums der PH Bern) führen eine Reliabilitätsprüfung durch. Im Vorfeld werden die Kategorien zuerst besprochen und anschließend wird die Kodierung geübt und umgesetzt. Die Übereinstimmung wird paarweise überprüft. Die dabei höchste Übereinstimmung liegt bei knapp 80%. Somit ist die Reliabilität nur auf tiefem Niveau gegeben. Dies lässt sich dadurch erklären, dass das Kodiermanual sich auf die feine Gliederung des Kategoriensystems abstützt. Diese schwache Trennschärfe wird bewusst in Kauf genommen, weil mit dieser Gliederung, Unsicherheiten und Strategien differenzierter erfasst werden können. Auf diese Weise wird dem Charakter der Studie, sie ist eine nicht repräsentative Exploration, Rechnung getragen.

1.3.4 Entwicklung des Kategoriensystems und des Modells der beiden Sichtweisen

Die Entwicklung erfolgt sowohl theoriegeleitet als auch empirisch gestützt.

Übersicht der zeitlichen Abfolge

Vorstudie: Kategoriensystem zur Erfassung der verschiedenen Lösungsschritte (theoriegeleitet)		Kategoriensystem zur Erfassung der Unsicherheiten und Strategien (empirisch gestützt)		Modell zur Interpretation der Heraus-forderungen und Strategien (theoretisch und empirisch gestützt)
2011	2012	2013	2014	2015

Abbildung 27 Zeitliche Abfolge der Erstellung der Kategoriensysteme

Das Kategoriensystem aus der Vorstudie wurde theoriegeleitet, gestützt auf das Modell von Berlin (siehe pp. 49) entwickelt und ist die Grundlage der Datenanalyse der Vorstudie (deduktives Vorgehen).

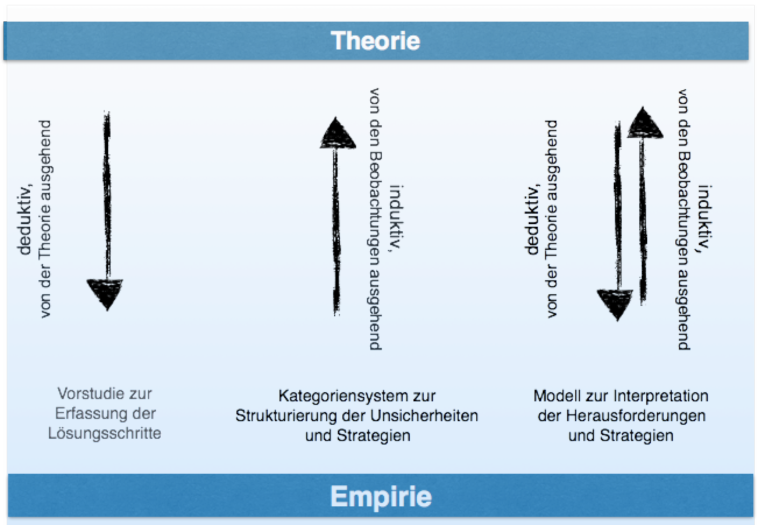


Abbildung 28 Begriffe Induktion und Deduktion (Mayring, 2000)

Das Kategoriensystem

Die Entwicklung des Kategoriensystems der vorliegenden Studie setzt mit einer Strukturierung der erfassten Unsicherheiten aus der Vorstudie ein.
Das induktive Verfahren zeichnet sich durch eine empirische Überprüfung, Ergänzung und Verdichtung der Daten der Vorstudie aus. Daraus entsteht ein Kategoriensystem zur Strukturierung von Unsicherheiten und Strategien Mit folgender Struktur.

- Alltagssprache verstehen
- Verallgemeinerung verstehen
- Relation verstehen
- Operation verstehen
- x bestimmen

Die Kodierregeln zu den Unsicherheiten, respektive zu den Strategien, werden in Form von Memos allgemein beschrieben (vgl. ab 132). Als Illustration wird jeweils ein Ankerbeispiel (ein typisches Beispiel aus dem Datensatz) im Kategoriensystem angefügt. (Das vollständige Kategoriensystem und Kodiermanual ist im Anhang).

Ein Beispiel einer Kategorie

Kategorie	**Unsicherheit (Memo)**	**Code**	**Ankerbeispiel**
Verallge-meinerung, Textstruktur erfassen	Es scheint unklar zu sein, dass beliebig Zahlenbeispiele möglich sind.	UV1	S1: Spielt es keine Rolle wie viele dass drinnen wohnen? I: Ehm... Was würdest du sagen? S 2: Es sind eigentlich keine Zahlen angegeben?... (Liest nochmals Aufgabe 1). Nein es ist ja keine Zahl angegeben. #00:00:48-7# ((P_Koe_oH_17_12_Kl10))

Abbildung 29 Ausschnitt aus der Tabelle Kategoriensystem

Die verschiedenen Kategorien werden im Bereich der Unsicherheiten wie auch im Bereich der Strategien ausgeführt.

Kategorie	**Unsicherheit (Memo)**
Alltagssprache Wörter verstehen	Die SuS haben ein Wort nicht verstanden Die SuS scheinen den Text nicht verstanden zu haben.
Verallgemeinerung, Textstruktur erfassen	Es scheint unklar zu sein, dass beliebig Zahlenbeispiele möglich sind.
	Es scheint unklar zu sein, dass man mit einer beliebigen Zahl starten kann. / dass man das x an einer Position setzen kann.
	Es scheint unklar zu sein, dass das x nur an einer Stelle gesetzt werden kann, die anderen dann entsprechend der Beziehung mit einem Term beschrieben werden. (Verweisungscharakter einer Variable ((Siebel S89))
Relation, Beziehungen verstehen Die SuS sind unsicher beim Übersetzen der Relation in einen Term.	Den SuS scheint die Richtung der Relation unklar zu sein. Die Wörter *mehr als, so viel mal wie* werden nicht richtig verwendet.
	Die SuS setzen das x nicht geschickt.(Bezugsgröße)
	Die SuS sind verunsichert, wenn der Bezug bei den beiden Sätzen nicht derselbe ist.
	Die SuS führen eine Zahlstruktur weiter, die nicht mit der Aufgabe übereinstimmt.
	Die SuS sind unsicher, ob es sich bei der Relation um eine multiplikative oder additive Struktur handelt / ob mal oder durch; ob plus oder minus
Operation verstehen Kalkül	Die SuS machen Rechnungsfehler (Z.B. Klammerregel)oder sind unsicher beim Ausrechnen der Zahlenterme.
	Die SuS vertauschen additive und multiplikative Struktur im Bereich der Zahlen. Die SuS vertauschen die additive und die multiplikative Struktur im Bereich der Terme
	Die algebraische Schreibweise, dass zwischen zwei Faktoren kein Multiplikationszeichen steht, verunsichert.
	Die SuS sind unsicher bei der Reihenfolge der Faktoren oder der Summanden oder beachten die Klammerregel nicht. Sie sind verunsichert, wenn die Terme komplexer werden. (wenn der zu bildende Term sich auf ein Binom bezieht. (Z.B.: 2 mal x +4)
	Die SuS haben Unsicherheiten beim zusammenzählen der Terme / beim Vereinfachen der Terme
x bestimmen Ausgehend von einem Total die Zahl der einzelnen Stockwerke bestimmen	Die SuS haben keine Idee, wie die Anzahl der verschiedenen Stockwerke bestimmt werden könnte, wenn die Gesamtzahl gegeben ist. Sie probieren mit Zahlenbeispielen aus
	Die SuS sind verunsichert inwiefern Terme zum Bestimmen der Werte genutzt werden können.
	Die SuS sind unsicher beim Auflösen der Gleichung

Abbildung 30 Kategorien Unsicherheiten

Beobachtete Strategien und Klärungsversuche:

	Strategie, Klärungsversuch (Memo)
Alltagssprache Wörter verstehen Die SuS stellen (wieder) einen Bezug zum Text her (gestützt mit Material, mit Zeigen, mit Lesen, ...)	Jegliche Form des Wiedergebens eines Textes: Die SuS geben Text nochmals in eigenen Worten oder Handlungen (auf dem Blatt zeigen) wieder.
	Die SuS strukturieren den Text neu und schreiben ihn abgekürzt oder mit eigenen Worten. Sie schreiben die Namen auf (1. Stock, ..., Alois, ...)
Verallgemeinerung, Textstruktur erfassen	Die SuS legen beliebig viele Plättchen auf die eine Position (Parterre, 1. Stock oder Dachgeschoss).
	Die SuS setzen für das Dachgeschoss, 1. Stock oder Parterre eine beliebig gewählte Zahl / setzen anstelle einer Zahl die Variable x
Relation, Beziehungen verstehen	Die SuS zeigen im Bild die Richtung der Relation auf. Die SuS zeichnen die Relationsrichtung mithilfe von Pfeilen ein. Die SuS notieren die Zahlenbeispiele in einer Wertetabelle.
	Die SuS setzen das x willkürlich. Die SuS schreiben Zahlenbeispiele ungeordnet auf.
	Die SuS setzen das x geschickt, so dass die Terme leicht gebildet werden können. Die SuS zeigen auf, dass das x an unterschiedlichen Stellen gesetzt werden kann.
	Die SuS schreiben die Zahlenbeispiele als Rechnungsterme auf, so dass die Struktur der Aufgabe erhalten bleibt.
Operation verstehen Kalkül	Die SuS schreiben die Terme in einer anderen Form. Die SuS addieren anhand der geschriebenen Terme in der Wertetabelle oder im Bild Schritt für Schritt.
	Die SuS gehen sicher mit Umkehrüberlegungen um.
	Die SuS überprüfen die Terme durch Einsetzen von Zahlen und vergleichen mit ihren Zahlenbeispielen (Wertetabelle)
x bestimmen Ausgehend von einem Total die Zahl der einzelnen Stockwerke bestimmen	Die SuS probieren unstrukturiert die gesuchten Zahlen zu finden.
	Die SuS probieren durch geschicktes Einsetzen die gesuchten Zahlen zu finden.
	Die SuS stellen eine Gleichung auf (auch mündlich), um die gesuchten Zahlen zu bestimmen.
	Die SuS lösen die Gleichung korrekt.

Abbildung 31 Kategorien Strategien

Alle transkribierten Datensätze werden mithilfe dieses Kategoriensystems strukturiert und Unsicherheiten und Strategien möglichst detailliert erfasst.

1.5.2 Modell zur Interpretation der Unsicherheiten und Strategien

Nach der Erfassung und Strukturierung der Unsicherheiten sind die Ursachen nicht geklärt. Der Versuch, diesen auf die Spur zu kommen, führt wieder zurück in die Theorie. Einige Studien machen darauf aufmerksam, dass die beiden Sicht- oder Denkweisen eine besondere Herausforderung beim Einstieg in die Algebra darstellen.

Diesen Hinweisen wird nachgegangen. Die Daten werden noch einmal selektiv analysiert, der Fokus wird dabei auf die beiden Denk- oder Sichtweisen gerichtet.

Um den Grund der nun mithilfe des Kategoriensystems strukturiert vorliegenden Unsicherheiten und Strategien zu verstehen, wird ein Modell entwickelt. Dieses stützt sich sowohl auf theoretische Erkenntnisse, bezüglich den beiden Sichtweisen relational und operational (siehe pp. 36) und nimmt gleichzeitig die Struktur Kategoriensystems auf, welches den Ablauf eines Algebraisierungsprozesses abbildet.

Mit dieser neuen Strukturierungshilfe wird ein anderer Blick auf die erfassten Unsicherheiten und Strategien ermöglicht. Daraus sollen sich Erklärungen zur Frage, *Was macht das Algebraisieren von Sachkontexten schwierig?,* ableiten lassen.

Leitend sind Fragen wie *Wird jeweils bei der Unsicherheit oder Strategie hauptsächlich eine operationale, respektive relationale Sichtweise eingenommen?*, *Wie wird der Wechsel von der einen zur anderen Sichtweise vollzogen?.*

Die vertikale Unterteilung des Modells stützt sich auf die theoretische Analyse. Die horizontale Einteilung der Lösungsschritte bildet die Struktur des Kategoriensystems ab.

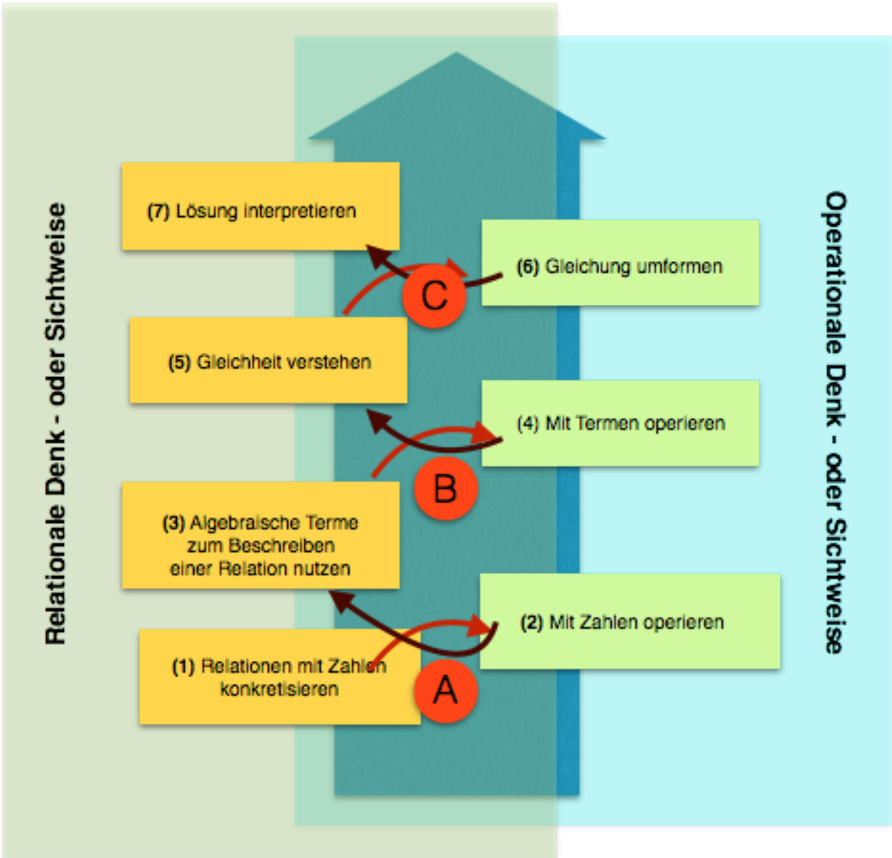


Abbildung 32 Modell der beiden Sichtweisen in einem Algebraisierungsprozess

Der große vertikale blaue Pfeil illustriert den Lösungsverlauf. Die Lösungsschritte sind mit den Nummern 1 – 7 explizit aufgeführt. Diese Aufteilung entspricht der Struktur des Kategoriensystems dieser Studie. Die beiden schwach gefärbten Rechtecke, welche die Darstellung horizontal zweiteilen, stellen die Bereiche der beiden Denk- oder Sichtweisen dar. Durch die Positionierung der verschiedenen Lösungsschritte wird sichtbar gemacht, dass dazu unterschiedliche Denk- oder Sichtweisen gefordert sind. So etwa liegt Schritt 3 *Algebraische Terme zum Beschreiben der Relation nutzen* im Bereich der relationalen Denk- oder Sichtweise was bedeutet, dass die dazu geforderten Denkhandlungen stark mit einer relationalen Sichtweise verbunden sind. Bei Schritt 4, *Mit Termen operieren* wird die Bearbeitung hauptsächlich mit einer operationalen Sichtweise vollzogen. Somit ist dieser Denkschritt in der rechten Hälfte der Darstellung positioniert.

Die Buchstaben A, B und C deuten auf die Wechsel zwischen den beiden Sichtweisen hin. Unsicherheiten und Strategien werden mit dem Modell dahingehend interpretiert, um Erkenntnisse herauszuschälen, wie bedeutsam diese Sichtweisen und der Wechsel zwischen ihnen zum Algebraisieren von Sachkontexten sind.

Die Erfassung ist bei diesem Vorgehen punktuell auf Lösungsprozesse eines Aufgabentyps gerichtet. Der Blick auf diese Mikroebene, macht es möglich, Lösungsschritte und Hürden in individuellen Prozessen zu untersuchen. Daraus lassen sich wiederum allgemein sensible Stellen in Lernprozessen erkennen.
Das Modell wird zu einer lokalen Theorie, die dazu dienen kann, wichtige Aspekte im Bereich des Anwendens der Algebra herauszuschälen.

2 Datenanalyse und Interpretation

Die Analyse ist nach den Teilkategorien des Kategoriensystems strukturiert.

1. Teil Unsicherheiten und Strategien im arithmetischen Bereich
   - Alltagsbezug
     - Text verstehen
     - Alltagsbezug als Herausforderung
   - Struktur der Relation erfassen
     - Annahme treffen
     - Richtung der Relation
     - Operationsverständnis

2. Teil Unsicherheiten und Strategien im algebraischen Bereich
   - Variable verstehen (algebraischer Bereich)
     - Variable als Platzhalter
     - Position der Variable
     - Verweisungscharakter und Substitutionen
   - Term verstehen (algebraischer Bereich)
     - Begriff ‚Term' verstehen
     - Terme bilden
     - Operationsverständnis
     - Richtung der Relation, Bezugsgröße
   - Operieren mit Termen
     - Konventionen und Rechenregeln
     - Terme addieren
   - Gleichung als Hilfsmittel nutzen

Textstellen aus den Transkripten werden den entsprechenden Unterkategorien des Kategoriensystems zugeordnet und entsprechend analysiert und interpretiert.

Die Interpretation stützt sich auf das *Modell der beiden Sichtweisen im AlgebraisierungsprozesS* (S. 36ff).

Zu jeder Teilkategorie werden in einem Rahmen die Kenndaten der Datensätzen aus MAXqda zusammengefasst:

- Kodiermanual (Memo) dient dem Zuordnen von Textstellen.
- Quantifizierungen in Form von Angaben zur Anzahl der analysierten Textstellen (Codings) und zur Anzahl Schülergruppen, bei welchen die Unsicherheiten beobachtet wurden.

Die Quantifizierungen geben Hinweise bezüglich der Gewichtung der verschiedenen Unsicherheiten. Daraus lässt sich herauslesen, wie häufig entsprechende Unsicherheiten beobachtet wurden und ob diese nur bei einzelnen oder bei einigen Gruppen auftraten. Treten viele Unsicherheiten in wenigen Gruppen auf, so hat dies nicht dieselbe Bedeutung, wie wenn Unsicherheiten breit verteilt über alle Gruppen auftreten. Wird eine bestimmte Unsicherheit in vielen Gruppen beobachtet, kann dies auf eine Herausforderung hinweisen, die auf eine didaktische Herausforderung hinweist.
Diese Quantifizierungen werden jedoch nicht weiter ausgeführt. Dies ist nicht die Intention dieser Arbeit. Sie stehen somit nur für Zusatzinformationen, die Hinweise geben, wie eine Unsicherheit interpretiert werden kann.

In einem einleitenden Text wird, zum besseren Leseverständnis, die Spezifität der Teilkategorie nochmals knapp beschrieben und mit theoretischen Ausführungen der vorangehenden Kapitel vernetzt. Anschließend folgen die Analysen der Teilkategorien, aufgeteilt in die Bereiche *beobachtete Unsicherheiten* und *beobachtete Strategien*. Als hilfreiche Strategien, kurz Strategien, werden diejenigen Aktionen aufgeführt, die deutlich zu beobachten sind, zielorientiert scheinen und als hilfreich eingestuft werden. Anhand von Ausschnitten aus Transkripten und Bildern aus Videos werden Unsicherheiten und Strategien illustriert, ergänzende

Bemerkungen aus den Transkripten (Paraphrasierungen) werden wiedergegeben.

Die anschließende Interpretation fokussiert die erfassten Unsicherheiten und Strategien auf die beiden Sichtweisen ‚operational' und ‚relational'. Damit wird dem Hauptziel dieser Analyse nachgegangen, nämlich dem Beantworten der Fragen dazu, inwiefern diese beiden Sichtweisen und der Wechsel zwischen ihnen für das Algebraisieren von Sachkontexten bedeutsam sind.

2.1 Relationen verstehen (arithmetischer Bereich)

2.1.1 Alltagsbezug

Die Aufgaben des Sets sind soweit vereinfacht, dass der Modellierungsschritt, der zur Bearbeitung von Alltagssituationen gefordert ist, wegfällt. Der Sachkontext ist einfach gehalten, so dass er sich leicht in ein Realmodell übersetzen lässt. Im Zentrum steht der Mathematisierungsprozess (vgl. S. 54ff). Der Sachverhalt soll für die Schülerinnen und Schüler vorstellbar sein und dadurch auch ein Sinnzusammenhang gewährleistet werden.

In zwei verschiedenen Ausprägungen zeigen sich Unsicherheiten im Bereich der Alltagssprache. Einerseits gibt es Wörter oder Begriffe, welche die Schülerinnen und Schüler nicht kennen. Andererseits müssen die Schülerinnen und Schüler verstehen, dass der Text eine verallgemeinerte Situation wiedergibt.

> *Zum Beispiel: Alois hat doppelt so viele Karten wie Barbara, Cyril hat zwei Karten mehr als Barbara.*

Aus dem Text lassen sich keine konkreten Zahlangaben herauslesen. Es werden nur Relationen zwischen den verschiedenen Anzahlen beschrieben. Diese Art von Problemstellung unterscheidet sich von vielen herkömmlichen Schulbuchaufgaben mit genau einer Lösung.

Der *Alltagsbezug* wurde hinsichtlich der folgenden Aspekte analysiert:

- Text verstehen
- Starker Alltagsbezug als Herausforderung
- Struktur der Relation erfassen

Text verstehen

> Memo: „Die Schülerinnen und Schüler scheinen den Text oder ein einzelnes Wort nicht verstanden zu haben“.
> Diese Unsicherheit wurde 6 mal codiert und ist bei 2 von 14 Gruppen zu beobachten.

Beobachtete Unsicherheiten
Zwei Schülergruppen kennen das Wort *Parterre* nicht. Im Weiteren stolpern sie über die Namen Cyrill und Alois. Diese kleinen Unsicherheiten klären die Schülerinnen und Schüler ohne Mühe selbständig.
Weitere Unsicherheiten treten im Zusammenhang mit Quantifizierungen auf. Das zeigt sich in Fragen wie *Was heißt drei mehr? Muss ich dazuzählen oder wegzählen?.* Diese Klärungsversuche werden nicht hier, sondern weiter hinten im Abschnitt Operationsverständnis aufgeführt. Sie werden nicht als eine Herausforderung im Umgang mit der Alltagssprache gedeutet, sondern werden dem Bereich Operationsverständnis zugeteilt.

Beobachtete Strategien
Die Begriffe werden fortlaufend im Gespräch geklärt.

Interpretation
Die Aufgaben sind sprachlich einfach gehalten. Darum haben die meisten Schülerinnen und Schüler wohl auch keine Mühe, die gegebene Sachsituation zu erfassen.

Starker Alltagsbezug als Herausforderung

Memo: Die Schülerinnen und Schüler sind stark an ihre Alltagserfahrungen gebunden. Sie zählen nicht beliebige Bsp. auf, sondern überprüfen immer, ob ihr Vorschlag zu den Alltagssituationen passt. Diese Unsicherheit wurde 12 mal codiert und ist in 2 von 14 Gruppen zu beobachten.

Der Alltagsbezug als Unsicherheit wird nicht normativ als Teilkategorie gesetzt, sondern erst im Rahmen der Analysen der Daten aufgenommen. Darum ist diese Teilkategorie (Code) erst während des Codierungsprozesses in das Kategoriensystem aufgenommen worden (MAXqda: In-vivo Code).

Beobachtete Unsicherheiten

Zwei Gruppen, beide aus dem 6. Schuljahr, sind verunsichert, weil sie die Situation mit ihren Alltagserfahrungen verbinden. Beide Schülergruppen lassen nicht beliebige Zahlen zu. Ihr Bild von einem Haus mit drei Etagen ist eingeschränkt. Sie lassen nur eine kleine Anzahl Bewohner zu. Zuerst überprüfen sie, welche Zahlenbeispiele für die vorliegende Sachsituation in Frage kommen. Damit klären sie die Definitionsmenge, gestützt auf ihre Alltagserfahrungen.

> 6. Schuljahr
> S2: 4 Leute, dann ... (*zeigt auf die Aufgabenstellung*) wohnen im Dachgeschoss 8.
> S1: Ja und im 1. Stock ... (*zeigt auf die Aufgabenstellung*) dreimal so viele wie im Dachstock.
> S2: Dann wären es 24 ... Das ist ziemlich viel.
> S1: Gehen wir von 2 aus?
> S2: Ja.
> S1: Dann wären es 4 (*zeigt oben auf die Aufgabenstellung*) und nachher ...
> S2: Und nachher 12.
> S1: Ist immer noch ziemlich viel ...
> S1: So geht es etwa auf. Im Parterre ist eine Single-Wohnung ...

Sie sind stark in der Vorstellung verhaftet, inwieweit eine solche Situation in einem Haus überhaupt möglich ist.

Beobachtete Strategien

Um Unsicherheiten im Bereich Textverständnis zu klären (siehe pp. 31), helfen Darstellungen der Situationen wie beispielsweise eine Hausdarstellung mit drei Etagen oder handlungsorientierte Zugänge wie etwa das Legen und Verschieben von Plättchen. Die Situation kann auf diese Weise nachgespielt werden und wird so für die Schülerinnen und Schüler besser vorstellbar. Unsicherheiten, die sich auf einen starken Alltagsbezug stützen können auf diese Weise nicht ausgeräumt werden. Hier braucht es grundsätzliche Klärungen wozu solche Problemstellungen gelöst werden.

Interpretation

Die starke Bindung an den Kontext weist auf eine relationale Sichtweise hin. Zum Generieren der Zahlenbeispiele braucht es nun den Switch hin zur operationalen Sichtweise. Dies gelingt den Schülerinnen und Schülern gut. Sie vollziehen
den Loslösungsprozess von den beschriebenen Beziehungen hin zur Übersetzung in die Zahlenbeispiele sorgfältig. Die Zahlen werden immer wieder überprüft, ob sie dem beschriebenen Sachkontext entsprechen. Dadurch werden die beiden Sichtweisen operational und relational stark vernetzt.

Die kritische Überprüfung der Grundmenge ist nur bei den Gruppen des 6. Schuljahres zu beobachten. Dies könnte ein Hinweis sein, dass im Verlaufe der weiteren Schuljahre im Mathematikunterricht das Herauslösen mathematischer Strukturen aus Sachkontexten gezielt geübt wird (siehe S. 14ff).

Solche Loslösungen fokussieren auf das Grundlegende der Algebra und sind wünschenswert. Allerdings geht es beim Algebraisieren von Sachkontexten auch darum, zu entscheiden welche Zahlenmenge sinnvoll ist. Das Überprüfen der Grundmenge hilft mit, den Sinnzusammenhang nicht aus den Augen zu verlieren. Bei dieser Überprüfung wird wieder von der operationalen zur relationalen Sichtweise gewechselt. Daher sind solche Überlegungen ein gutes Lernfeld, um die beiden Denk- oder Sichtweisen miteinander zu vernetzen (siehe S. 27ff).

2.1.2 Struktur der Relation erfassen (ohne algebraische Beschreibung)

Der vorliegende Aufgabentyp enthält keine konkreten Zahlangaben. Der Sachverhalt ist allgemein beschrieben.

> *Beispiel Aufgabe 1:*
> *In einem dreistöckigen Haus wohnen im Parterre doppelt so viele Leute wie im Dachgeschoss. Im ersten Stock wohnen dreimal so viele wie im Dachgeschoss.*

Mit dieser Form von Aufgaben kann erfasst werden, wie selbstverständlich Schülerinnen und Schüler verallgemeinerte Sachsituationen inhaltlich erfassen können. Dazu müssen die im Text beschriebenen Relationen verstanden werden.

Beispielsweise muss die Redewendung *Im Parterre sind doppelt so viele Personen wie im Dachgeschoss* gedeutet werden. Die Angabe *doppelt so viele* bezieht sich auf das Parterre, ausgehend von der Anzahl im Dachgeschoss. Die Anzahl im Dachgeschoss ist somit die Bezugsgröße. Will man konkrete Zahlen als Lösungen nennen, muss zuerst eine Annahme getroffen werden, beispielsweise die Anzahl Personen des ersten Stockes.

Wird eine andere Bezugsgröße gewählt, kommen entsprechende Umkehroperationen zum Einsatz. Alle diese Überlegungen sind ohne Kenntnisse der algebraischen Sprache möglich. Sie liegen im Bereich des algebraischen Denkens (siehe S. 17ff) Weil der Kontext allgemein beschrieben ist, sind beliebig viele Lösungen (im Bereich der natürlichen Zahlen) möglich.

Es zeigen sich drei Bereiche als herausfordernd:

- Annahme treffen
- Richtung der Relation verstehen
- Operationsverständnis

Diese werden nun explizit ausgeführt.

Annahme treffen

Memo: Die im Text beschriebene Beziehung (Relation, Zusammenhang) wird nicht verstanden oder die Struktur des Textes wird nicht richtig oder nur zum Teil erfasst.
Unterkategorien sind: beschriebene Relation / Abhängigkeit / Beziehung nicht verstanden.
Mögliche Indikatoren sind: Bezugsgröße wählen, Beziehung oder Abhängigkeit als Operation aufschreiben.
Diese Unsicherheit wurden insgesamt 24 mal codiert und in 8 von 14 Gruppen beobachtet.

Der Kontext ist allgemein beschrieben. Implizit sind bereits Variablen mit im Spiel, auch wenn sie noch nicht in der algebraischen Form verwendet werden (siehe S 69ff). Um Zahlenbeispiele zu generieren, muss zuerst eine erste Annahme getroffen werden. Dabei muss die Bezugsgröße berücksichtigt werden. Das heißt, man muss sich entscheiden, an welcher Stelle die Annahme getroffen werden soll, ob im Parterre, im 1. Stock oder im Dachgeschoss.

Beobachtete Unsicherheiten

Diese Art von Aufgabenstellung löst bei einigen Gruppen Unsicherheiten aus.

6. Schuljahr

S2: Es könnte irgendetwas sein.

S1: Ja wahrscheinlich schon

I: Ja, vielleicht müsst ihr ja etwas festlegen.

S2: Bei einem dreistöckigen ...

S1: Ja sagen wir doch in einem ... wohnen

S2: So 4, 5 Leute.

S1: Ja wir könnten sagen ... sagen wir doch im Parterre wohnt eine Familie mit 4 Leuten.

P_Baet_oH_B , jh_an_G2_Kl6

9. Schuljahr

S2: (*Liest vor)* In einem dreistöckigen Haus wohnen im Parterre doppelt so viele Leute wie im Dachgeschoss. Im ersten Stock wohnen dreimal so viele wie im Dachgeschoss.

I: Jetzt habt ihr hier so ein Haus zur Verfügung. Schiebt das Haus-Schema näher zu den Schülerinnen.

S1: Legt doch einmal diese Situation mit diesen Punkten (Plättchen).

S1: (*Die Schülerinnen murmeln die Aufgabenstellung vor sich hin.)* Einfach irgendwo einmal soviel hinlegen, oder?

P_Munz_mH_A_E_tr_ts_G1_Kl9

In beiden Beispielen sind die Schülerinnen und Schüler irritiert. Es ist ihnen nicht geläufig, dass allgemein beschriebene Strukturen mit Zahlenbeispielen konkretisiert werden können.

Einige Schülergruppen berücksichtigen die im Text beschriebenen Bezugsgrößen nicht. Es können dabei unterschiedliche Vorgehen beobachtet werden.

A) Sie bestimmen die Position der gewählten Zahl durch die Hausanordnung (örtlich bestimmt, zuunterst im Haus beginnend).

6. Schuljahr

1: Wollen wir nun noch mal vom Untersten ausgehen?

S2: Ja.

S1: (*Zeichnet ein neues Haus hin.)*

S2: Also wenn wir vom Untersten ausgehen ...

S1: Gehen wir von 5 aus (schreibt 5 in das Parterre des neuen Hauses).

P_Baet_oH_D_jh_an_G2_Kl6

Die Aussage *noch mal vom untersten ausgehen* lässt vermuten, dass ihre Strategie nicht gezielt die im Text beschriebene Bezugsgröße aufnimmt. Durch diese Wahl der Bezugsgröße entstehen komplexere Terme, die mit Umkehroperationen beschrieben werden müssen.

B) Sie starten mit der Anzahl im Parterre, weil das Parterre die erst genannte Position im Text ist.

Aufgabe: Im Parterre hat es doppelt so viele Leute wie im Dachgeschoss.
Im 1. Stock sind dreimal so viele Leute wie im Dachgeschoss.

9. Schuljahr

S2: (*Nimmt ein Plättchen und legt es ins Parterre.)* Nehmen wir zum Beispiel hier eine Person, dann sind hier 2 (*legt 2 Plättchen in das Dachgeschoss*) und hier sechs (*legt Plättchen in den 1. Stock ...*

S1: Im Dachgeschoss ...

S2: wie?

...

S2: (Legt im Parterre 1 Plättchen, im Dachgeschoss 2 Plättchen. Im 1. Stock verdreifacht er die Zahl des Dachgeschosses.

S1 liest nochmals im Text nach und bestätigt dies.

P_Munz_1_juh_an_ oM_Kl9

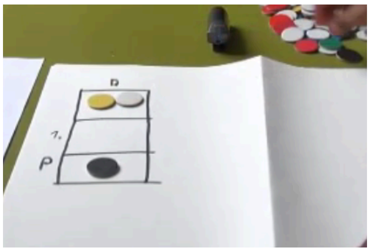


Abbildung 33 Bezugsgröße willkürlich gewählt (P_Mun_oH_A_ju_an_Kl9)

Die Vorgehen A) und B) scheinen sich auf ein rezeptives Vorgehen zu stützen,
Vermutung: Der Text startet mit den Worten im Parterre hat es… Darum startet S2 mit dem Legen einer Zahl im Parterre. ... „Im Parterre sind doppelt so viele wie im Dachgeschoss". Er übersetzt anschließend den Ausdruck doppelt so viele falsch. Er verdoppelt die Anzahl im Dachgeschoss (falsche Richtung der Relation).

Beobachtete Strategien

Unsicherheiten dieser Art werden mit Legen von Plättchen in einer Hausdarstellung geklärt. Manchmal braucht es mehrere Verschiebungen, bis die Schülerinnen und Schüler sicher sind, dass die Zahlenbeispiele zutreffen. Der handlungsorientierte Zugang scheint eine gute Stütze zu sein, um die Zahlenbeispiele zu überprüfen.

Interpretation

Vermutlich sind die Schülerinnen und Schüler solche Aufgaben nicht gewohnt.
Einige Unsicherheiten lassen sich darauf zurückführen, dass der Aufgabentext nicht als Ganzes erfasst wird. Zum Teil werden Zahlen oder hilfreich scheinende Wörter herausgefiltert ohne den Inhalt des Textes zu erarbeiten. Bei einigen Gruppen kann beobachtet werden, dass die im Text beschriebenen Relationen nicht oder falsch in Zahlenbeispiele übertragen werden. Das (rezeptive) Herausfiltern der Zahlen aus dem Text und das kontextlose Verarbeiten, weist auf eine operationale Sichtweise hin.

Beim vorliegenden Aufgabentyp ist dies nicht sinnvoll. Die beschriebenen Relationen sind Ausgangspunkt. Der entsprechende Lösungsschritt muss von der Beschreibung (relational) hin zur operationalen Sichtweise führen. Um diesen Sichtwechsel zu vollziehen, kann als erster Schritt eine Zahl angenommen werden. Damit wird es möglich, die beschriebenen Relationen zu quantifizieren.
Relationale und operationale Sichtweisen sind eng verwoben. Zuerst muss die Bezugsgröße erfasst werden (relational). Anschließend wird eine Zahl gewählt und an der entsprechenden Position gesetzt. Mit der Wahl dieser Zahl wird ein operationales Vorgehen möglich. Die weiteren in diesem Kontext stehenden Relationen können in Operationen übersetzt und mithilfe von Zahlen wiedergegeben werden.

Die meisten Schülergruppen können mithilfe der Zahlenbeispiele, zum Teil auch handlungsorientiert, die im Text beschriebenen Relationen selbstständig klären.
Solche Auseinandersetzungen scheinen wichtig zu sein. Sie regen eine enge Vernetzung der beiden Sichtweisen (relational <-> operational) an und unterstützen den Sinnzusammenhang.

Richtung der Relation und Schlüsselwörter

Memo: Schülerinnen und Schüler sind unsicher die Schlüsselwörter (‚mehr als', ‚weniger als', ‚doppelt so viele wie ...') zu deuten oder sie übersetzen sie falsch. Schlüsselwörter wie beispielsweise ‚mehr' werden nicht beachtet.
Diese Unsicherheit wurde 8 mal codiert und in 5 von 14 Gruppen beobachtet.

Als Schlüsselwörter werden hier Formulierungen bezeichnet, die auf Rechenoperation hinweisen wie etwa , mehr als', ‚so viel wie'.

> In einem dreistöckigen Haus wohnen im ersten Stock vier Leute mehr als im Parterre. Im Dachgeschoss wohnen doppelt so viele Leute wie im Parterre.
> Im ersten Stock sind vier Personen mehr als im Parterre.

Der zu untersuchende Aufgabentyp beschreibt Ordnungsrelationen, die Beziehungen sind transitiv und antisymmetrisch. Das heißt die Richtung der Relation ist entscheidend.
Nun muss überlegt werden, wie mögliche Lösungen gefunden werden können. Setzt man für die Anzahl Personen im Parterre die Zahl 5, heißt der Zahlenterm für die Anzahl Personen im ersten Stock 5 + 4 = 9. Wird die Zahl 5 für den ersten Stock gewählt, heißt der Zahlenterm für die Anzahl im Parterre 5 – 4 = 1.
Die beschriebene Relation kann direkt in die arithmetische Operation übersetzt werden, wenn die Zahl entsprechend der Bezugsgröße im Text gewählt wird. Legt man die Zahl an einer anderen Stelle fest, muss die entsprechende Umkehroperation gewählt werden.

Beobachtete Unsicherheiten

In fünf Schülergruppen sind Unsicherheiten zu beobachten, die offen legen, dass die entsprechenden Schlüsselwörter oder die Richtung der Relation unklar sind.

Im Bereich der Schlüsselwörter

7. Schuljahr

Die Aufgabe: In einem dreistöckigen Haus wohnen im ersten Stock vier Leute mehr als im Parterre.

S1: Im ersten Stock sind es dann vier Personen mehr als im Parterre. Im Dachgeschoss wohnen zwei Leute mehr als im Parterre.

S2: (Schreibt eine 1 beim Parterre. Dann schreibt er eine Vier beim ersten Stock.)

S1: Im Dachgeschoss wohnen zwei Leute mehr als im Parterre.

S2 (Schreibt eine Zwei beim Dachgeschoss und eine Sieben beim Total unter dieses erste Zahlenbeispiel.)

S1 Zwei, also drei. (Zeigt auf die Zwei im Dachgeschoss.)

S2 Aha, hier. (Setzt mit dem Stift an, um beim Dachgeschoss etwas zu ändern.) Drei?

S1: Zwei Leute mehr.

P_Baet_mH_B_tr_ts_G1 Kl7

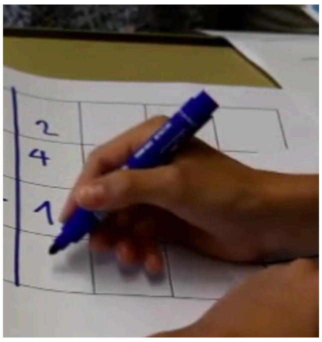


Abbildung 34 Umgang mit Schlüsselwörtern (P_Baet mH B_tr_ts_7Kl)

S2 beherrscht die Rechenoperationen gut. Seine Schwierigkeit ist, die im Text beschriebene Relation zu erfassen. Das Wort mehr wird im ersten Schritt nicht beachtet oder nicht verstanden. Schüler 2 setzt die Zahlen losgelöst von der beschriebenen Relation (falsch). Der

Schüler 1 ist mit diesem Vorgehen einverstanden. Erst später erkennen sie den Fehler und korrigieren die Zahlen.

Im Bereich der Richtung der Relation

9. Schuljahr
S1: Nicht? Also, was? Da hier mal drei, nicht wahr? Zeigt auf die beiden Plättchen im Parterre.
S2: Nein. Hier sind es dreimal so viele. Zeigt auf das Dachgeschoss und den ersten Stock.
Legt drei Plättchen in den 1. Stock.
S1: Drei, oder? Ja.

P_Munz_mH_A_E_tr_ts_G1_Kl9

Unsicherheiten treten dann auf, wenn es darum geht zu entscheiden, ob nun vom Parterre oder vom Dachgeschoss ausgehend die Rechenhandlung durchgeführt werden soll. In diesem Beispiel kann eine Unsicherheit bezüglich der Richtung der Relation beobachtet werden. Soll die Zahl des Parterres oder diejenige des Dachgeschosses verdreifacht werden? S2 wirkt sicherer. Sie zeigt die Relation anhand der Haus - Darstellung.

Dieses Beispiel zeigt auf, dass es nicht selbstverständlich ist, die Richtung der Relation zu erfassen. Wird die Redewendung *Im Parterre hat es dreimal so viele wie im Dachgeschoss*, nicht auf ihre Bedeutung hin untersucht, sondern operativ der Reihe nach abgearbeitet, erscheint zuerst das *Parterre*, anschließend steht die Aussage *dreimal so viel*, dann das Wort *Dachgeschoss*. Dieses schrittweise Abarbeiten des Satzes führt zu einer falschen Rechenhandlung.

Falsch: → Parterre x; → 3x → gilt für das Dachgeschoss

Drei Gruppen zeichnen oder nennen die Richtung der Relation falsch. Die Schülerinnen und Schüler suchen nur nach Schlüsselwörtern und Zahlen und filtern diese aus dem Text.

Beobachtete Strategien

Bei allen Gruppen scheint ein gründliches Lesen des Textes ein hilfreiches Vorgehen zu sein. Einige konkretisieren die Sachsituation zusätzlich mit Material.

> 9. Schuljahr:
> S2: Warte schnell. Es steht ja: Im Parterre wohnen doppelt so viele Leute wie im Dachgeschoss. Dann kannst du zum Beispiel hier vier und hier zwei, (*Zeigt im Haus-Schema zuerst auf das Dachgeschoss und dann auf das Parterre.)* weil dann ist es ja doppelt soviel.
> S1: Legt vier Plättchen ins Dachgeschoss. Vier. Zwei. Was?
> S2: Und hier zwei, oder nicht? Weil da steht ja: In einem dreistöckigen Haus wohnen im Parterre doppelt so viele Leute wie im Dachgeschoss.
> S1: Aha. Aber dann sind es da vier und da zwei. So. (*Schiebt die vier Plättchen aus dem Dachgeschoss ins Parterre und legt zwei Plättchen ins Dachgeschoss.*)
> S2: Jaja.
>
> *P_Munz_mH_A_E_tr_ts_G1_Kl9*

Sie klären die Aufgabe durch Hinlegen von Plättchen. Anhand der Plättchen (durch Schieben der Plättchen klären sie die Richtung der Relation. (doppelt so viel … zuerst falsche Richtung der Relation). Sie lesen den Text laut und betonen *doppelt so viel wie*. Dabei erkennen sie die falsch gesetzten Plättchen

Interpretation

Das Erfassen der Relation ist eng verbunden mit gründlichem Lesen und Textverstehen. Erst wenn die Aussage als Ganzes verstanden wird, kann auch die Richtung der Relation erfasst werden. Eine zu starke Fokussierung auf Schlüsselwörter kann auch hinderlich sein, nämlich dann, wenn diese aus dem Kontext gelöst verarbeitet werden. Ein schrittweises Abarbeiten, das sich an einer operationalen Sichtweise orientiert, ist in dem Fall nicht erfolgreich. Die beschriebenen Relationen müssen als Ganzes gedeutet werden (relationale Sichtweise). Somit ist ein Klären der Schlüsselwörter wichtig, gleichzeitig muss den Schülerinnen und Schüler bewusst sein, dass es nicht genügt, nur diese zu verarbeiten.

Operationsverständnis im arithmetischen Bereich

Memo: Die Schülerinnen und Schüler sind unsicher, welche Operation die gegebene Relation beschreibt. (falsche Rechenoperation, Rechnungsschwierigkeiten) Unterkategorien:

- Operationsverständnis:
  Diese Unsicherheit wurde 10 mal codiert und in 6 von 14 Gruppen beobachtet.
- Struktur der Operation:
  Diese Unsicherheit wurde 13 mal codiert und in 6 von 14 Gruppen beobachtet.
- Verdoppeln als unpassende Struktur:
  Diese Unsicherheit wurde 13 mal codiert und in 3 von 14 Gruppen beobachtet.
- Kalkül, Rechenschwierigkeiten:
  Diese Unsicherheit wurde 2 mal codiert und in 2 von 14 Gruppen beobachtet.

Das Operationsverständnis ist eine wichtige Grundlage, um Zahlenbeispiele generieren zu können und wird den Erfolg im Umgang mit Termen stark mitbestimmen (S. 68ff). Wenn Schülerinnen und Schüler die Bedeutung der Grundoperationen nicht sicher verstehen, werden sie auch Mühe haben, Sachkontexte zu algebraisieren.

In der Datenerfassung werden Unsicherheiten, die das Operationsverständnis betreffen, getrennt auf vier Bereiche aufgenommen.

- Struktur der Operation erkennen
- Operationsverständnis allgemein
- Verdoppeln als unpassende Struktur
- Rechenschwierigkeiten

Diese vier Bereiche überschneiden sich im Bereich der Strategien stark und werden im folgenden Abschnitt zusammengefasst.

Beobachtete Unsicherheiten

Den Text in eine entsprechende Rechenoperation zu übersetzen, gelingt den Schülerinnen und Schülern zum Teil nicht, weil sie einerseits die Struktur der Relation nicht erkennen oder weil ihr Operationsverständnis zu wenig ausgebaut ist.

Struktur der Operation erkennen

Die Schülerinnen und Schüler sind nicht sicher wie die im Text beschriebene Relation in eine Rechenoperation übersetzt werden kann. Fragen wie, *Was heißt drei mehr? Muss ich dazuzählen oder wegzählen?*, weisen darauf hin. Schlüsselwörter müssen einerseits erfasst aber auch richtig interpretiert werden.

Operationsverständnis allgemein

Einige Schülerinnen und Schüler sind nicht sicher, ob addiert oder multipliziert werden soll. Ihnen scheint der Unterschied der beiden Operationen nicht geläufig zu sein.

6. Schuljahr

S1: Dann haben wir... Im ersten Stock sind es vier mehr, also nehme ich an vier mal zwei gibt acht.

S2: Genau.

P_Baet_mH_B_tr_ts_G1_Kl6

Die Schülerin deutet ‚vier mehr ...' als ‚vier mal ...' und kommt von 2 zu acht. Die Rechnung hat sie nur gerechnet, nicht gelegt.

Weniger häufig treten Unsicherheiten auf, bei denen die Situation eine Division oder eine Subtraktion erfordert. Auch sind die meisten Schülerinnen und Schüler hier im Umgang mit den Umkehroperationen sicher. Das erstaunt. Man könnte annehmen, dass der Umgang mit der Division und der Subtraktion sowie Überlegungen, die eine Umkehroperation erfordern, anspruchsvoller sind. In der Analyse zeigt sich jedoch, dass Addition und Multiplikation für die Schülerinnen und Schüler schwieriger zu unterscheiden sind. In drei Gruppen treten Unsicherheiten auf, die auf Schwierigkeiten bei der Unterscheidung von Multiplikation und Addition hinweisen.

Eine Besonderheit im Umgang mit Multiplikation und Addition zeigt sich bei drei Schülergruppen. Sie bilden, nachdem sie das erste Zahlenbeispiel richtig erstellt haben, die weiteren durch Verdoppeln des ersten.

9. Schuljahr

S1: Drei. Fünf. Und Eins. Sechs, Sieben, Acht, Neun. So. D: Schreibt die Zahlen in die erste Spalte der Wertetabelle.

S2: Und das gleiche kannst du jetzt alles immer wieder doppelt nehmen.

S1: Schreibt in die zweite Spalte: 6, ... S:2 (*Diktiert:)* zehn, zwölf, achtzehn.

P_Munz_mH_B_tr_ts_G1_Kl9

Die Schülerinnen und Schüler verfolgen die Strategie des Verdoppelns, obwohl dies in diesem Beispiel zu falschen Zahlen führt.

Das machen sie sehr unreflektiert und automatisiert. Sie stellen ihr Vorgehen nicht in Frage und
verlieren dabei die Übersicht. Die in der Aufgabe beschriebenen Relationen , sind aus dem Blick geraten. Die Schülerinnen haben die Verbindung zum gegebenen Sachkontext verloren. Durch Verdoppeln der Zahlen des ersten Zahlenbeispiels entsteht eine neue Zahlstruktur, die nicht mit der vorgegebenen übereinstimmt.

Bei zwei weiteren Gruppen sind Unsicherheiten auf Rechen-schwierigkeiten zurückzuführen.

Beobachtete Strategien

Die Fehler erkennen die Schülerinnen und Schüler meist selber. Ab und zu weisen die Interviewenden auf Ungereimtheiten hin. Dann hilft ein gründliches Lesen des Textes. Einige Gruppen sind von den Fehlern so stark verunsichert, dass sie zur Klärung die Situationen mit Plättchen legen.

9. Schuljahr

S1: Kann man das gerade verdoppeln? Oder nicht?

S2: Wir können es... Wenn wir jetzt zwei haben... Legt ein Plättchen mehr ins Parterre.

S1: Hier oben würde es stimmen, aber hier unten... (*Zeigt auf den ersten Stock in der Wertetabelle, die Fünf, und dann aufs Parterre.*)

S2: Dann haben wir hier also zwei. Dann, doch wir müssen hier unten, würde ich sagen. Nimmt das Plättchen wieder weg.

P_Munz_mH_C_tr_ts_G1_Kl9

Sie untersuchen den Sachverhalt anhand der Hausdarstellung und schieben Plättchen entsprechend hin und her. Es scheint, dass sie die Struktur der Relationen noch nicht ganz durchschauen. Die Hausdarstellung wird zu einer wichtigen Stütze.

Eine Gruppe legt die Plättchen strukturiert, entsprechend den beschriebenen Relationen. Sie wirken sehr sicher.

> Beispiel 6. Schuljahr
>
> I: (*Zeigt auf die aufgeschriebene Lösung.)* Das ist eine mögliche Lösung, gibt es noch mehr?
>
> S1: Ja logisch. Wenn wir oben drei nehmen (*legt drei Plättchen auf das Blatt)* dann sind es unten 6.
>
> S2: Dann sind es hier auch 3 (*zeigt auf das Plättchen unten*).
>
> S1: *(Macht aus den 6 Plättchen unten jeweils 3er-Päckchen.)* Und dann sind hier 9 (*zeigt auf die Mitte)*.
>
> *P_Baet_oH_B , jh_an_G2_Kl6*
>
> Für die Schülerinnen und Schüler ist klar, dass es weitere Lösungen gibt. Sie legen mit den Plättchen eine weitere Lösung. Sie strukturieren das Hinlegen der Plättchen, so dass die Multiplikation sichtbar bleibt (strukturiertes Legen).

Diese Strategie scheint hilfreich, weil die im Text beschriebenen Relationen auch nach der Handlungsphase sichtbar bleiben. Interessant ist, dass diese Strategie nur von einer Gruppe aus dem 6. Schuljahr angewendet wird.

Interpretation

Um, ausgehend von beschriebenen Relationen, Zahlbeispiele zu generieren, ist es unabdingbar zu wissen, welche Handlungen den Rechenoperationen zugrunde liegen. Bei der Addition, geht es beispielsweise um ein *Dazugeben*. Das strukturierte Legen der Plättchen als Strategie die Rechenoperation sichtbar zu machen, ist vielleicht darum ausschließlich bei Schülerinnen und Schüler des 6. Schuljahres zu beobachten, weil diese Strategie in der Grundschule angewendet und geübt wird. Die Schülerinnen und Schüler des

7. – 10. Schuljahres haben dieses Vorgehen womöglich nicht mehr präsent. Vielleicht würde es sich lohnen, diese vermehrt auch in den höheren Schuljahren zu thematisieren.
Das Erkennen, welche Operation zum Kontext passt, liegt im Bereich der relationalen Sichtweise. Um anschließend im Lösungsprozess weiter zu kommen, müssen die Relationen aus ihrem Kontext gelöst und in eine Operation übersetzt werden. Ist dieser Schritt vollzogen, können Zahlen oder Terme addiert werden (siehe S. 45ff).
Bei Unsicherheiten, die durch Verdoppeln des ersten Zahlenbeispiels entstehen, ist es gerade umgekehrt. Die Lösungen, welche auf diese Weise erstellt werden, entsprechen nicht den vorgegebenen Relationen. Das rezeptive Vorgehen, das sich vermutlich durch eintrainierte Übungen eingeschlichen hat, taugt für die vorliegende Aufgabe nicht. Die Schülerinnen und Schüler nehmen eine operationale Sichtweise ein, die beschriebenen Relationen sind nicht mehr im Blickfeld.
Als sie den Fehler bemerken, sind einige verunsichert und haben keine Erklärung, warum diese Berechnungen nicht mit den im vorgegebenen Kontext übereinstimmen.

Zusammenfassend lassen sich bereits im arithmetischen Bereich Unsicherheiten erkennen, wenn es darum geht allgemein beschriebene Sachkontexte mit Zahlenbeispielen zu erfassen. Dies ist ein Hinweis, dass bereits in diesem ‚propädeutischen Bereich' der Algebra, wo nur algebraisches Denken, ohne Einbezug der algebraischen Fachsprache gefordert ist, beide Sichtweisen beobachtet werden können und einige Unsicherheiten auf eine einseitige Sichtweise zurückzuführen sind.
Somit ist es bereits im arithmetischen Bereich möglich, diese beiden Denk- oder Sichtweisen zu thematisieren. Dies wird auch in Studien zu ‚Early Algebra' untersucht und vorgeschlagen

2.2 Relationen algebraisch erfassen

Im zweiten Teil der Analyse werden Unsicherheiten beschrieben, die im Umgang mit algebraischen Ausdrücken beobachtet werden, aufgeteilt in *Variablenverständnis*, *Umgang mit Termen und Gleichungen*. Beide Bereiche sind eng miteinander verwoben. Das Variablenverständnis kann oft erst beim Auswerten von Termen eingeschätzt werden oder wenn die Position der Variable beim Aufstellen der Terme gewählt werden muss.

2.2.1 Variable verstehen

Die erfassten Unsicherheiten im Bereich *Variable verstehen* lassen sich weiter aufteilen in:

- Unsicherheiten, dass eine Variable als Platzhalter für Zahlen dienen kann
  (Variable als Platzhalter)
- Unsicherheiten, an welcher Stelle die Variable gesetzt werden soll (Position der Variable)
- Unsicherheiten im Bezug auf den Verweisungscharakters einer Variable

Variable als Platzhalter für Zahlen

Memo: Variable als Platzhalter

Es scheint den Schülerinnen und Schüler nicht geläufig, dass man Zahlen in Terme einsetzen kann oder dass die Variable für eine Zahl steht.

Diese Unsicherheiten wurden insgesamt 11 –mal codiert und in 8 von 14 Gruppen beobachtet.

Die Variable dient im Kontext der Aufgabe als Platzhalter für Zahlen. In den untersuchten Aufgaben kommen alle drei Handlungsaspekte (Gegenstands-, Einsetz- und Kalkülaspekt, der Variable zum Tragen (vgl. S. 69ff).

Beobachtete Unsicherheiten

In acht Schülergruppen lassen sich Unsicherheiten beobachten. An verschiedenen Stellen wird deutlich, dass die Variable nicht als Leerstelle für Zahlen, sondern als eine Art Bezeichnung gedeutet wird.

7. Schuljahr

I: Könnt ihr nun einen Term für die alle Bewohner angeben? *(Die Terme y, y + 2 und y +4 liegen vor.)*

S2: Also, so einen Term fürs Ganze?

I: Ja genau.

S2: y, y plus vier.

S1: Dann y plus zwei.

S2: Schreibt ein y beim Parterre, die Formel y + 4 im ersten Stock und die Formel y + 2 beim Dachgeschoss.

I: Und was wäre das nun hier? (*Zeigt auf die Zeile des Totals*.).

S2: y plus sechs.

P_Baet_mH_B_tr_ts_G1_Kl7

Die Gruppe kann den Rechenweg (relationale Sichtweise) in Form von Termen korrekt erfassen. Sowohl die Zahlenbeispiele wie auch die erstellten Terme sind richtig. Beim Addieren der verschiedenen Terme zeigt sich aber dass die Schülerinnen und der Schüler nicht sicher sind, wie Variablen gedeutet werden müssen. Es werden nur die Zahlen verrechnet. Die Variable wird als eine Art Bezeichnung mitgenommen, wie sie etwa bei Größenangaben verwendet wird. Sie addieren die einzelnen Zahlwerte des Zahlenbeispiels und hängen an das Ergebnis ein y an. Die Terme lauten dann y ; y + 2; y + 4. Daraus bilden die Schüler den Summenterm y + 6.

Beobachtete Strategien

Einige Schülergruppen nähern sich sukzessive der algebraischen Schreibweise an. Zuerst werden Buchstaben gewählt, die sich stark auf den Kontext stützen wie etwa *P* für Parterre, *1S* für erster Stock, *D* für Dachgeschoss oder *A*, *B, C* für Alois, Barbara und Cyrill. Diese Buchstaben stehen zuerst für eine Bezeichnung. Im Verlauf des Lösungsprozesses werden diese zu Platzhalter für Zahlen. Durch die Weiterverarbeitung verändert sich die Funktion des Buchstabens nach und nach. Beim Beobachten der Lösungsschritte ist manchmal nicht klar auszumachen, zu welchem Zeitpunkt die Buchstaben mehrheitlich noch als Bezeichnungen oder bereits im Sinne von Variablen (Platzhalter für Zahlen) gedeutet werden.

> Beispiel 9. Schuljahr:
>
> Aufgabe: In einem dreistöckigen Haus wohnen im ersten Stock vier Leute mehr als im Parterre. Im Dachgeschoss wohnen 2 Leute mehr als im Parterre.
>
> S2: Im Parterre ist das x.
>
> S2: (Notiert auf das Blatt: Parterre=x, 1S.= 4 + Parterre, DG= 2 + Parterre.) So.
>
> *P_Munz_oH_eh_ml_G1_B_Kl9*

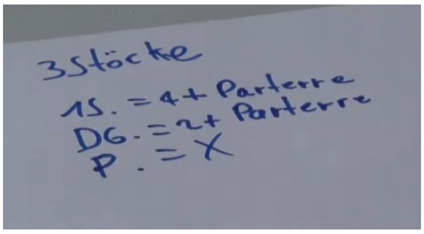


Abbildung 35 Die Umdeutung des Buchstabens von einer Bezeichnung zum Platzhalter einer Zahl P_Munz_oH_eh_ml_G1_B_Kl9

Die Schüler des 9. Schuljahres sind bereits gewohnt mit Variablen zu arbeiten. Sie wechseln die Deutung von Bezeichnungen der einzelnen Stockwerke mit den Kürzeln 1S für 1. Stock, DG für Dachgeschoss, P für Parterre, hin zur Deutung dieser Kürzel als Platzhalter für Zahlen. Ohne zögern bezeichnen sie die Bezugsgröße mit der Variable x.

Obschon sie die Variable x bereits für das Parterre gesetzt haben, wählen sie bei den weiteren Termen das Wort ‚Parterre' als Wortvariable.

Erst später schreiben sie die Terme auch mit der Variable x auf. Die Wortvariable scheint hier ein hilfreicher Zwischenschritt zu sein, um die Terme zu bilden.

Einige Schülerinnen und Schülern des 6. Schuljahres setzen ebenfalls Buchstaben zuerst im Sinne einer Bezeichnung ein.

Das folgende Bild illustriert ein solches Vorgehen.

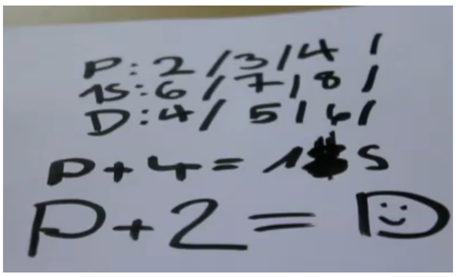


Abbildung 36 P Der Buchstabe als Bezeichnung hin zur Deutung als Baet_oH_C_jh_an_G2_Kl6

Die Buchstaben P, 1S und D stehen in den ersten drei Zeilen als Bezeichnung der Stockwerke. Die entsprechenden Zahlenbeispiele werden hinten angefügt. Beim Erstellen der Terme in der 4. und 5. Zeile verwenden sie diese Bezeichnungen jedoch korrekt als Variablen, als Platzhalter für die Anzahl der Personen.

Interpretation

Es ist nachvollziehbar, dass Schülerinnen und Schülern des 6. und 7. Schuljahres den Variablenbegriff noch nicht im nötigen Maß aufgebaut haben. Sie haben wenige oder keine Erfahrungen im Bereich der Algebra. Der Algebraunterricht setzt erst im 7. Schuljahr ein. Der Zugang über Wortvariablen scheint eine taugliche Strategie zu sein. Auch bei Gruppen des 9. Schuljahres lässt sich jedoch beobachten, dass zuerst Wörter als Platzhalter für Zahlen gewählt werden.
Ein Übersetzen der Relationen mit Hilfe von Wortvariablen scheint die Termbildung zu unterstützen. Aus den Beobachtungen ist zu entnehmen, dass Variablen, in Worte gefasst, stark mit der relationalen Sichtweise verbunden sind.

Position der Variable festlegen

Memo: Die Position der Variable ist wählbar. Es scheint den Schülerinnen und Schülern nicht geläufig, dass die Variable an einer gewählten Position gesetzt werden kann.
Diese Unsicherheiten wurden insgesamt 12 codiert und in 6 von 14 Gruppen beobachtet.

So wie im arithmetischen Bereich die Position der Zahl, muss nun im algebraischen Bereich die Position der Variable bewusst gewählt werden. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten. Entsprechend dieser Wahl werden auch die algebraischen Terme unterschiedlich ausfallen.

Beispiel: Im Parterre sind zwei Personen mehr als im ersten Stock.
Ausgehend vom ersten Stock heissen
die Terme: 1. Stock: x   Parterre x + 2.
Ausgehend vom Parterre heissen die Terme
Parterre: x   1. Stock: x – 2.

Beobachtete Unsicherheiten

Im algebraischen Bereich haben nun auch Schülergruppen Mühe, die im arithmetischen Bereich sicher waren. Einige Schülerinnen und Schüler sind unsicher, ob die Position der Variable gewählt werden kann.

S1: In diesem Fall ist x hier. (*Zeigt auf den ersten Stock.)*
S2: Hä? Du kannst doch nicht einfach sagen: x ist hier. Oder?
S1: Doch, weil du musst ja von hier anfangen. Du musst ja hier irgendwie eine Zahl hinschreiben und dann musst du da weiterfahren...
S2: Im ersten Stock, ah ja.

P Munz B tr_ts_G1 Kl9

Für die Schülerin 2 ist nicht klar, dass die Position für x gewählt werden muss. Schülerin 1 klärt den Sachverhalt, indem sie auf das vorangehende Vorgehen verweist bei welchem die Zahlenbeispiele erstellt wurden.

Um die Position der Variable festzulegen, gehen einige Schülerinnen und Schüler rezeptiv vor. Auf Fragen, worauf sie beim Setzen der Variable achten, nennen sie folgende Vorgehen:

Die Position der gewählten Zahl wird aufgrund der Haus – Darstellung festgelegt. Das Parterre wird vielleicht darum gewählt, weil *man immer unten im Haus mit der Verteilung beginnt*.

Beispiel 7. Schuljahr
I: Wie bist du darauf gekommen, gerade das Parterre zu wählen für x?
S1: Weil man rechnet immer vom Parterre aus.
P_Biel_ B_Aufgabe1+2_jm_mb_1Lekt_7Kl

Die Position der gewählten Zahl wird aufgrund der am häufigsten genannten Position gewählt. Der Text wird gescannt, das heißt, dass der Text nicht in seiner Bedeutung erfasst wird, sondern nur einzelne Wörter aufgenommen werden. Es wird festgestellt, dass ein Ausdruck häufiger vorkommt. Dementsprechend wird die Position für die Variable gewählt.

Beispiele
10. Schuljahr
I: Genau. Ja Ihr habt jetzt schon ein wenig eine Strategie.
S1: Ja.
I: Was ist denn genau die Überlegung?
S1: Also wir nehmen immer die Person (*bezieht sich auf die Kartenaufgabe Barbara, Alois und Cyrill*) die am meisten benannt wird... Also weil wir mit dem am meisten anfangen können. Die muss x bestimmen und nachher machen wir die anderen zwei... Also... wie soll ich sagen, einfach... Wir rechnen die anderen zwei nachher einfach aus...

S2: Einfach dann weiterrechnen, ausrechnen und bestimmen, dass...

S1: Ja genau.

S2 : Ja wie es geschrieben ist.

S1: Also jetzt weil Alois hat ja jetzt zwei Karten mehr als Barbara wegen dem kommt dann +2 und...

P_Koe_oH_B_3_A&B_19_12_Kl10

Bei den Erläuterungen der Schülerinnen und Schüler steht eine operationale Sichtweise im Vordergrund. Der Text wird nach einzelnen Wörtern abgesucht. Sie halten sich an eine Regel, die den Blick stark einschränkt. Damit wird die Flexibilität, die Bezugsgröße zu wählen, eingeschränkt.

7. Schuljahr

S1 Also dort wo es am meisten vorkommt.

S2 Ja, Analyse

P_Baet_oH_D_jh_an_G2_Kl7

Diese Gruppe wählt das gleiche Vorgehen wie die davor beschriebene Gruppe. Sie wählen die Bezugsgröße rezeptiv anhand einer Anleitung, was in diesem Fall zu einem tragfähigen Ansatz führt. Im Lösungsverlauf legen beide Gruppen ihre rezeptive Strategie ab und beginnen, die Wahl der Bezugsgröße zu variieren (siehe folgendes Beispiel).

Beobachtete Strategien

In der Mehrzahl der Aufgaben haben die Gruppen den gesamten Kontext im Fokus und legen die Position der Variable geschickt fest. Einige Gruppen gehen im Sinne einer Vorstrukturierung der Frage nach, ‚W*er hat mehr?'*. Solche Untersuchungen mit klarem Bezug zum realen Kontext helfen, die Richtung der Relation zu klären.

Viele Gruppen gehen flexibel mit dem Setzen der Variablen um. Um möglichst einfache Terme zu generieren, wechseln einige bewusst die Position der Variable.

Beispiel 7. Schuljahr

I: Kann man bei dieser Aufgabe das x beliebig wählen?

S1 Ja, aber je nach Wahl des x, ist es dann schwieriger.

S2 Am einfachsten ist es dort, wo es weniger hat und das...

P_Baet_oH_D_jh_an_G2_Kl7

Diese Schülerinnen haben die Sache nun gut durchdrungen. Sie wissen, dass die Position der Variable gewählt werden kann und dass eine geschickte Wahl zu einfacheren Termen führt.

Eine Gruppe startet mit der Variable im Dachgeschoss und übersetzt die gegebenen Relationen richtig in Terme. Es scheint, dass sie sich keine Gedanken machen, an welcher Position die Variable sinnvoll wäre. Sie beginnen einfach zuoberst.

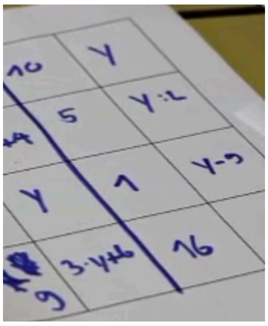


Abbildung 37 Wahl der Bezugsgröße P_Baet_mH_C_tr_ts_G1_Kl7

Mit dieser Positionswahl entstehen vermutlich für sie ungewohnte Terme. Das mag der Grund sein, dass beim Addieren der Terme Unsicherheiten auftreten. Sie lösen diese Herausforderung so, dass sie ein neues Zahlenbeispiel erstellen und die Variable an eine andere Position setzen.

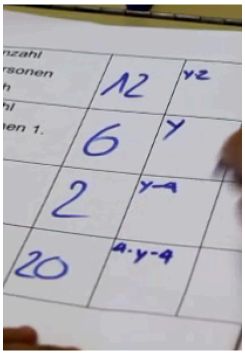


Abbildung 38 Wahl der Bezugsgröße2 P_Baet_mH_C_tr_ts_G1_Kl7.

Mit diesen Termen gelingt es ihnen, die richtige Summe zu bilden.

Eine Gruppe erklärt ihre Strategie: Die Variable wird dort gewählt, wo die kleinste Anzahl gegeben ist. Um dies zu entscheiden, müssen die Relationen bereits operational und relational erfasst sein. Relational in dem Sinne, dass das Ganze im Blick sein muss und operational, da sicheres Rechnen hilft die Übersicht zu gewinnen.

7. Schuljahr
S2: Dann können wir wieder Barbara als x nehmen.
S1: Ja, oder ... Barbara hat zwei... weniger als Alois. Cyril hat doppelt so viele Karten ... dann müssen wir fast Barbara als x nehmen. Diesmal hat niemand weniger als Barbara.
S2: Ja.

P_Baet_oH_F_jh_an_G2_Kl7

Sie wählen die Position der Variable gezielt, begründen mit dem Text und nennen die entsprechenden Terme.

Beim Festlegen der Position der Variable scheinen strukturierte Darstellungen, wie etwa Tabellen, hilfreich.
Als Beispiel ist hier die Darstellung einer Gruppe aus dem 9. Schuljahr angefügt.

Die Aufgabe lautet: Im 1. Stock hat es vier Personen mehr als im Parterre. Im Dachgeschoss hat es zwei Personen mehr als im Parterre.

Die Schülerinnen und Schüler lesen die Aufgabe vor. Sie legen mögliche Zahlenbeispiele mit Plättchen. Sie tragen die Zahlen in der Wertetabelle ein und untersuchen deren Beziehungen.

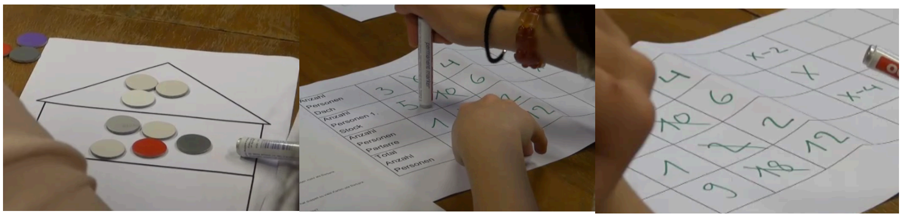


Abbildung 39 Klärung mithilfe von Hausdarstellung und Tabelle, Munz_2_tr_ts_mH_Kl9

Einige Schülerinnen und Schüler zeichnen mit Pfeilen die Richtung der Relation ein.

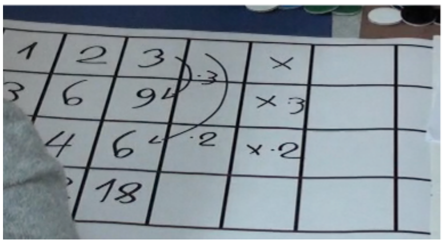


Abbildung 40 Pfeile zur Klärung der Relation P_Munz_mH_jh_jm_A_Kl9

Interpretation

Durch das Anwenden von Rezepten verlieren die Schülerinnen und Schüler den Blick auf die relationale Sichtweise. So schränkt die Strategie, die Variable an derjenigen Position zu setzen, die am meisten im Text genannt wird, die Wahl der Bezugsgröße stark ein und weist auf eine rein operationale Sichtweise hin.

Alle diese Rezepte greifen zu wenig, um Sachkontexte sicher algebraisieren zu können. Dazu ist ein Verstehen des Sachkontextes nötig. Um beschriebene Relationen zu erschließen, sind Handlungen und Darstellungen hilfreich. Die meisten Gruppen verwerfen durch Handlungen und Darstellungen während des Lösungsprozesses auch das allein rezeptive, operationale Vorgehen und öffnen den Blick auf eine ganzheitliche, relationale Erfassung des Sachkontextes. Nach und nach entwickeln sie einen beweglichen Umgang mit der Wahl der Bezugsgröße. Dies mag daran liegen, dass sich die Aufgaben auf den gleichen Sachkontext beziehen. Durch die wiederkehrenden Übersetzungen werden die beschriebenen Relationen gründlich erfasst.

Dies zeigt sich in den vielfältigen Strategien, die darauf zielen, mithilfe verschiedener Darstellungsebenen (enaktiv, ikonisch und symbolisch) den Sachkontext zu algebraisieren.

Memo: Variable hat Verweisungscharakter
Es scheint unklar zu sein, dass eine Variable nur an einer Position gesetzt werden kann. Die weiteren Positionen werden dann mithilfe von Termen, entsprechend der Beziehungen im Text, beschrieben. (Verweisungscharakter)
Diese Unsicherheiten wurden insgesamt 14 codiert und in aus 5 von 14 Gruppen beobachtet.

Der Verweisungscharakter einer Variablen ist für deren Verständnis zentral (S. 70ff). Das heißt, die Zuschreibung wofür eine Variable steht, kann innerhalb eines Kontextes nicht verändert werden. Die gleiche Variable kann nicht für unterschiedliche Platzhalter stehen. Umgekehrt ist es zwar möglich Zweitvariablen einzusetzen, die durch Substitution in die Variable überführt werden können, sie müssen jedoch untereinander wieder in Bezug gebracht werden. Der Verweisungscharakter der Variable wird in den meisten Gruppen berücksichtigt.

Beobachtete Unsicherheiten
In diesem Bereich liegen die Unsicherheiten eher im formalen Bereich. Die Schülerinnen und Schülern verstehen, dass die im Text beschriebenen Bezüge aufgenommen werden müssen. Sie sind aber nicht sicher, in welcher Form die Variablen gewählt werden sollen, wie beispielsweise, ob mit einer oder zwei Variablen gearbeitet werden soll.

> 9. Schuljahr
> S1: Also lass uns das als x2 nehmen. (Zeigt auf den 1. Stock.)
> I: Also, willst du das x2 wie eine zweite Variable verwenden, oder wie meinst du das?

S1: Ihr habt ja vorher gesagt, dass wir es nicht als y bezeichnen sollen.
I: Ja ich würde die Anzahl Leute im Parterre gleich mit dem x beschreiben.
S2: Meinst du x2 benutzen statt y, um den 1. Stock zu benennen?
S1: Ja, also eben als zweites x. P_Munz_oM_2_jh_an_Kl9

In der vorangehenden Aufgabe setzte diese Gruppe zwei Variablen (x und y) ein. Nun fordert der Interviewer sie auf, nur eine Variable zu verwenden[3]. Dies führt zu einer Unsicherheit. Es ist anzunehmen, dass die Schülerinnen und Schüler nicht verstehen, warum sie nur mit einer Variable arbeiten sollen. Sie bleiben beim Konzept mit zwei Variablen und nennen entsprechend der ersten Variable, die sie x nennen, die zweite Variable x2. Den Sachverhalt haben sie verstanden, die Terme können sie bilden.

Beobachtete Strategien

Variablen werden in vielfältiger Weise eingesetzt. Während des Lösungsprozesses ist in einigen Fällen eine Umdeutung der Variable zu beobachten, ausgehend von einem Buchstaben, der für eine Bezeichnung steht, hin zum Buchstaben, der ein Platzhalter für eine Zahl ist (S. 69ff).

Eine Schülergruppe des 9. Schuljahres zeigt ein interessantes Vorgehen zur Bildung der Terme. Die Deutung der Variable verändert sich während des Lösungsprozesses.

Aufgabe: Im 1. Stock hat es vier Personen mehr als im Parterre. Im Dachgeschoss hat es doppelt so viele Personen wie im ersten Stock.

Die beiden Term P + 4 zugeordnet. Der P wird so zu einem Platzhalter für Zahlen. Das Dachgeschoss wird mit DG bezeichnet, ihm wird der 2P zugeordnet.

[3] Das Vorgehen des Interviewers entspricht nicht den Vorgaben im Interviewleitfaden.

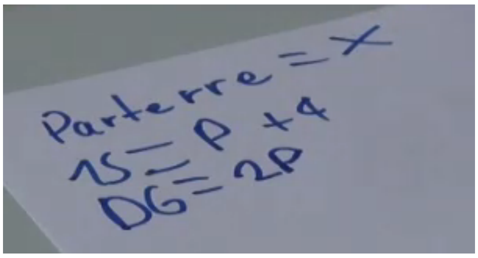


Abbildung 41 Substitution 1 P_Munz_oH_C_eh_ml_G1_Kl9_ (1. Teil)

Nach der Aufforderung des Interviewers, die Variable in den Termen mit x zu bezeichnen, werden die Terme entsprechend angepasst. Die Buchstaben P werden mit x überschrieben.

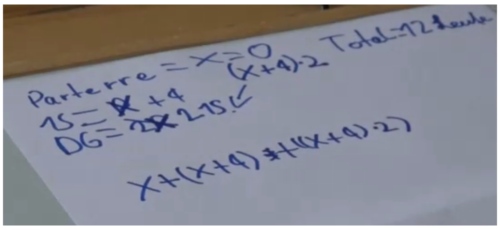


Abbildung 42 Substitution 2_ P_Munz_oH_C_eh_ml_G1_Kl9 (2. Teil)

In diesem Schritt hat sich ein Fehler eingeschlichen. Der Term des Dachgeschosses stimmt nicht mit der Formulierung der Aufgabe überein.

Im Dachgeschoss sind doppelt so viele Personen wie im ersten Stock.

Diesen Fehler erkennen die Schüler und schreiben neben dem falschen Term *2x* den Term *2 1S*. Ohne größere Unsicherheiten ersetzen sie dann *1S* mit dem entsprechenden Term *(x + 4) · 2*. Sie verwenden die Klammern richtig. In diesem Schritt wird für die Variable 1S ein Term substituiert, um so die vorliegende Relation zu beschreiben.

Interpretation

Das Vorgehen des Substituierens kann als eine Art Zwischenschritt betrachtet werden, um die verschiedenen Bezüge, die in den Relationen beschrieben werden zu strukturieren. Die unterschiedlichen Variablen können auf diese Weise in einem zweiten Schritt untereinander in Bezug gebracht werden. Beispielsweise können bei unverbundenen (disconnected, S. 87) Aufgaben die beschriebenen Relationen paarweise erfasst werden und müssen nicht gleich in der Dreierbeziehung, so wie es die vorliegenden Aufgaben verlangen, vernetzt werden. Die Terme, die mithilfe von Substitutionen erstellt werden, sind korrekt. Die Substitution scheint den Transfer vom Text zum Term zu vereinfachen.

2.2.2 Term verstehen

Terme sind **das** Instrument, um Relationen algebraisch zu beschreiben. Damit verbunden sind auch die entsprechenden Grundlagen wie Operationsverständnis, Variablenverständnis und Textverständnis. In dieser Arbeit soll der Umgang mit Termen möglichst entflochten beobachtet werden können. Spezifische Unsicherheiten, die sich auf den arithmetischen Bereich oder auf das Variablenverständnis beziehen wurden in den vorangehenden Abschnitten ausgeführt. An dieser Stelle werden nun weitere Unsicherheiten zu algebraischen Termen analysiert, .die noch nicht im Zusammenhang mit Gleichungen stehen. Erst im darauf folgenden Abschnitt werden Unsicherheiten im Umgang mit Gleichungen betrachtet. Interessant ist, dass einige Schülerinnen und Schüler, die im Umgang mit arithmetischen Termen sicher sind, nun bei algeraischen Termen Unsicherheiten zeigen.

Die Abschnitte sind:

- Begriff ‚Term' verstehen
- Terme bilden
- Operationsverständnis

- Richtung der Relation und Bezugsgröße erkennen im algebraischen Bereich
- Terme auswerten

‚Begriff Term' verstehen

Memo: Die Schülerinnen und Schüler verstehen das Wort ‚Term' nicht.
Diese Unsicherheiten wurden insgesamt 3–mal codiert und in 3 von 14 Gruppen beobachtet.

Vorstellungen und Begriffsklärungen sind facettenreich und werden beim Anwenden von Algebra nach und nach ausgeweitet. Der Begriff ‚Term' wird im Alltagsgebrauch selten verwendet und muss im Algebraunterricht entsprechend geklärt werden (S. 31ff).

Beobachtete Unsicherheiten und Strategien

Unsicherheiten und Strategien werden zusammengefasst, weil sie in diesem Bereich teilweise kaum zu trennen sind. Die Unsicherheiten sind eng verbunden mit Begriffsklärungen. Formulierungen, die nahe an der Schülersprache sind, scheinen hilfreich (S. 31ff). Diese können auch als Strategien interpretiert werden.

Bei drei Schülergruppen werden entsprechende Unsicherheiten, respektive Strategien, beobachtet.

> Eine Schülergruppe des 6. Schuljahres kennt den Begriff *Term* nicht und versteht somit den Auftrag, entsprechende Terme zu bilden, nicht. Erst als der Interviewer den Term mit dem Wort *Rechenweg* umschreibt, verstehen die Schüler den Auftrag und bilden die Terme richtig. Die Formulierung *Rechenwege beschreiben* ist den Schülern bekannt.

6. Schuljahr

I: Könnt ihr den entsprechenden Term aufschreiben?

S2: Also eine eigene Formel, oder wie meint ihr das?

I: Ich habe mich vielleicht ein wenig verwirrend ausgedrückt, vielleicht sollten wir mal den Rechnungsweg aufschreiben.

S1: Aha.

S2: Aha, ja.

P_Baet_oH_B , jh_an_G2_Kl6

Die Schülerinnen des 6. Schuljahres sind noch nicht gewohnt mit Variablen umzugehen. Sie verstehen den Begriff *Term* nicht. Erst als der Interviewer nach dem Rechnungsweg der verschiedenen Beispiele fragt, verstehen sie, was sie tun sollen.

Eine andere Gruppe des 6. Schuljahres erstellt die Zahlenbeispiele und schreibt unter Verwednung der Operationen „·2“ und „+ 2“ den Rechenweg richtig auf. Den Schülerinnen ist jedoch nicht klar, welche Rolle die Variable spielt und sie können darum auch keine korrekten Terme bilden.

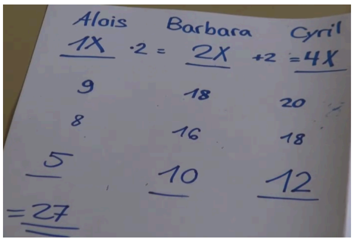


Abbildung 43 Rechenvorschrift statt Term, P Baet_oH_eh_ml_G1_Kl6

Den Umgang mit Variablen (hier x) sind die Schülerinnen und Schüler des 6. Schuljahres nicht gewohnt. Sie können wohl den Rechenweg richtig nennen, sie wissen jedoch nicht, wie sich ein Rechenweg in einen Term mit Platzhalter für eine Zahl übersetzen lässt.

Interpretation

Die Begriffe *Term* und *Variable* sind bei Schülerinnen und Schülern des 6. nur zum Teil bekannt. Der Begriff ‚Rechenweg', gibt eine Beschreibung der Denkschritte wieder. Terme, die als Rechenwege gedeutet werden, sind stark mit einer relationalen Denkweise verbunden.

Für Schülerinnen und Schüler ist es dann auch nicht verständlich, dass mit diesen Rechenanleitungen oder Beschreibungen von Rechenwegen operiert werden kann, sie beispielsweise zu addieren. Rechenanleitungen haben die Aufgabe, die Abfolge verschiedener Denkschritte wiederzugeben und liegen im Bereich des relationalen Denkens. Der Perspektivenwechsel zur operationalen Denkweise, also den Term als Platzhalter für eine Zahl zu verstehen, ist damit noch nicht eingelöst.

Rechenwege aufzuschreiben, kann, so zeigen es die Analysen, ein hilfreicher Zwischenschritt sein, um die relationale Sichtweise zu klären. Anschließend braucht es jedoch eine Umdeutung, um zu verstehen, dass nicht nur die Variable sondern auch der Term für eine Zahl stehen kann.

Terme bilden

Memo: Schülerinnen und Schüler generieren nur mithilfe **eines** Zahlenbeispiels die Terme. Sie sind sich nicht bewusst, dass ein Zahlenbeispiel alleine noch nicht genügt, um den Term eindeutig zu beschreiben.
Diese Unsicherheiten wurden insgesamt11 mal codiert und in 8 von 14 Gruppen beobachtet.

Das Bilden eines Terms umfasst verschiedene Herausforderungen. Einerseits müssen die beschriebenen Relationen verstanden und die entsprechende Operation erkannt werden. Dies liegt im Bereich des Mathematisierens. Es ist eine Transferleistung, die durch Übersetzungen in unterschiedliche Darstellungsformen gestützt werden kann (S. 54ff). In diesem Abschnitt werden nur Unsicherheiten und Strategien aufgeführt, die das Generieren der Terme fokussiert. Unsicherheiten im Bereich Operationsverständnis werden im nächsten Abschnitt beschrieben.

Beobachtete Unsicherheiten

Fünf Schülergruppen erstellen nur ein Zahlenbeispiel entsprechend dem Text. Nun bilden sie Terme aufgrund des einen Zahlenbeispiels. Ihnen ist nicht bewusst, dass dieses eine Beispiel nicht genügt, um die Struktur der Relation zu erfassen.

Dazu ein Beispiel:
Im Parterre hat es doppelt so viele wie im 1. Stock.
Im Dachgeschoss hat es zwei mehr als im 1. Stock.
Das Zahlentrippel (2, 4, 6) kann beispielsweise mit den Termen (x, 2x, 3x) oder den Termen (x, x + 2, x + 4) beschrieben werden

Ein solches Vorgehen hat zur Folge, dass das eine Zahlenbeispiel zwar korrekt gebildet wird, die entsprechenden Terme jedoch nicht mit den Zahlen übereinstimmen. Die Schülerinnen und Schüler merken erst beim Überprüfen der Terme, dass etwas nicht stimmt. Sie sind dann einen Moment irritiert, weil sie überzeugt sind, dass ihre Terme richtig sind.

Beobachtete Strategien

Oft hilft ein Auswerten der Terme, um festzustellen, dass die gesetzten Terme nicht zu den im Text beschriebenen Relationen passen. Das Einsetzen von Zahlen und die entsprechenden Operationen liegen im Bereich der operationalen Denkweise. Um nun die festgelegten Terme mit dem Text abzugleichen, braucht es wiederum die relationale Sichtweise. Klare Darstellungen, ein handlungsorientierter Zugang und Umformulierungen helfen den Sachverhalt zu klären.

Interpretation

Vieles machen die Schülerinnen und Schüler richtig. Sie erkennen die richtigen Operationen und übersetzen die Relationen in ein Zahlenbeispiel. Sie erfassen darin ein Muster und generieren daraus weitere Lösungen. Das Scheitern gründet wohl darin, dass sie sich zu früh vom Kontext lösen. Die Struktur der Relation ist noch zu wenig präsent.

Operationsverständnis

Memo: Operationsverständnis allgemein algebraisch / inkl. plus / mal, inkl. Schlüsselwörter
Diese Unsicherheiten wurden insgesamt 32mal codiert und in 12 von 14 Gruppen beobachtet.

Das Operationsverständnis ist beim Algebraisieren von Sachkontexten zentral. Wer nicht weiss, mit welcher Operation sich die beschriebene Relation erfassen lässt oder grundsätzlich Mühe hat, additive und multiplikative Strukturen zu unterscheiden, wird auch beim Bilden der entsprechenden algebraischen Terme Schwierigkeiten haben (S. 68ff).

Beobachtete Unsicherheiten

Unsicherheiten im Bereich des Operationsverständnisses wurden bereits im Abschnitt *Operationsverständnis arithmetisch* beschrieben. Es gibt nun aber Schülergruppen, die zwar sicher Zahlenbeispiele erstellen, aber Schwierigkeiten haben, die richtige Operation beim Bilden algebraischer Terme einzusetzen.

Häufige Schwierigkeiten treten im Zusammenhang mit der Unterscheidung Multiplikation - Addition auf und zwar in allen Schuljahren, also verteilt über die gesamte Stichprobe (10. bis 6. Schuljahr).

Es folgen dazu verschiedene Beispiele:

> 10. Schuljahr
>
> S1: Also... Alois hat 3 mal so viele Karten wie Barbara. Das heißt er hat...
>
> S2: 3 mal...
>
> S1 AS: 3x.
>
> S2 AS: Nicht x plus 3, oder? Das wäre ja eigentlich +3.
>
> P_Koe_oH_C_4_19_12_Kl10

S2 übersetzt ‚3 mal so viele’ mit , x plus 3‘.

> 9. Schuljahr
>
> S2: x ist eins.

S1: Ehm, im ersten Stock vier Leute mehr als im Parterre. Vier Leute mehr. Ehm. S1: Warte schnell. Moment schnell. Im ersten Stock vier Leute mehr als im Parterre.

S2: Das stimmt. Es sind hier fünf. Und hier ist eins. Und dann...
S1: Dann musst du doch hier x mal vier machen. Oder nicht?
S1: Dann hast du vier mal mehr.

P_Munz_mH_B_tr_ts_G1_Kl9

Der Text wird falsch wiedergegeben. Anstelle *4 mehr* sagt die Schülerin *Du musst x mal vier machen*. Dann hast du *vier mal mehr*. Sie vertauschen Begriffe der additiven Struktur (*mehr*) mit denjenigen der multiplikativen Struktur (*mal mehr).*

7. Schuljahr
S2:... vier Leute mehr als im Parterre. Wollen wir mal x+4?
S1: Nein, mach doch 4*x
S2: 4x (notiert 4x.)
S1: Es sind ja vier mal mehr Leute.
S2: vier mal mehr? Vier Leute(liest nochmals auf dem Aufgabenblatt 4 Leute mehr) Aha, aber dann müssen wir dann schauen, am Schluss müssen wir dann wohl doch noch ein + daraus machen,

Baet_ D_eh_ml_oH _7.Kl

7. Schuljahr Biel
S2: (Zeigt auf Cyril.) und da mal.. x mal 2? Weil Cyril hat zwei Karten mehr als Alois.
S1: x plus 2. (Beide überlegen, schauen sich an.)
S1: er hat ja zwei mehr nicht…

P_Biel_HS13_C1_Aufg3 a+b_jm_mb_1Lekt_7Kl

Alle (!) untersuchten Gruppen sind mindestens bei einer Aufgabe in Ansätzen unsicher, ob sie beim Aufstellen der Terme addieren oder multiplizieren sollen, auch Gruppen, die im arithmetischen Bereich die Zahlenbeispiele sicher bilden können.

Beobachtete Strategien

Als Strategien wählen einige Gruppen einen handlungsorientierten Zugang. Es scheint hilfreich zu sein, Operationen anhand von Handlungen zu klären. Die Plättchen aber auch Wertetabellen und Haus-Darstellungen werden zu wichtigen Kommunikationsstützen.

Interpretation

Bei einigen Schülergruppen treten Unsicherheiten im Umgang mit Operationen auf obwohl die Schülerinnen und Schüler mit Zahlen sicher operieren können. Das scheint auf den ersten Blick erstaunlich, handelt es sich doch um dieselben Operationen. Dieser Widerspruch könnte damit erklärt werden, dass Schülerinnen und Schüler Operationen im arithmetischen Bereich so geläufig ausführen, dass sie sich der jeweiligen Handlung, die der Operation zugrunde liegt, nicht mehr bewusst sind. Sie sind sich bei diesen einfachen arithmetischen Aufgaben so sicher, dass sie diesen häufig gelösten Aufgabentyp eher rezeptiv lösen (operational). Das Operieren mit Buchstaben, die sich nicht direkt verrechnen lassen, sind die Schülerinnen und Schüler nicht gewohnt. Spätestens im Umgang mit Termen ist bei der Wahl der Operation eine relationale Denkweise gefordert.

Im Besonderen liegen die Schwierigkeiten in der Unterscheidung der beiden Operationen Multiplikation und Addition. Diese Schwierigkeit erstaunt, da sich die Schülerinnen und Schüler schon ab den ersten Schuljahren mit diesen Operationen auseinandersetzen. Auch wenn die Multiplikation als fortgesetzte Addition interpretiert werden kann, müsste die Unterscheidung der beiden Operationen deutlich sein. .

Auseinandersetzungen mit den Rechenoperationen auf der algebraischen Ebene bieten einen guten Lernanlass, um die Grundoperationen, insbesondere die Unterscheidung von *mal* und *plus* wieder bewusst zu machen (pp.13). In diesem Anfangsunterricht werden in Termen meist kleine ganze Zahlen eingesetzt. Die Fähigkeit eines geläufigen Kopfrechnens rückt in den Hintergrund. Somit haben auch Schülerinnen und Schüler, die Mühe im Umgang mit Rechenoperationen haben wieder eine Möglichkeit, sich mit diesen im Umgang mit einfachen Zahlen auseinanderzusetzen.

Die Struktur der Grundoperationen wird in der Algebra auf einer abstrakten Ebene, eben in Form von Termen, thematisiert und wiederholt. Durch die verallgemeinerte Form ist eine bewusste Auseinandersetzung mit den Operationen gefordert. Beim Übersetzen der Relationen in algebraische Terme steht eine relationale Sichtweise im Vordergrund.

Richtung der Relation und Bezugsgröße erkennen, resp. festlegen

Memo: Bezugsgrösße, Richtung der Relation und Unsicherheiten im Umgang mit unverbundenen Aufgaben Unsicherheiten: Bezugsgrösße Diese Unsicherheiten wurden insgesamt 12 mal codiert und in 6 von 14 Gruppen beobachtet. Unverbundene Aufgaben: Diese Unsicherheiten wurden insgesamt 6 mal codiert und in 5 von 14 Gruppen beobachtet.

Das Operationsverständnis ist eng verknüpft mit dem Erfassen der Richtung der Relation. Entsprechend der Position, die für die Variable gewählt wird, muss die Operation oder die Umkehroperation gewählt werden. Somit spielen auch das Verständnis der Umkehroperation und die Einsicht, dass die Position der Variable gewählt werden muss, eine wichtige Rolle. Die Richtung der Relation drückt sich in der Termstruktur aus. Was im Sachkontext als Bezugsgröße implizit beschrieben wird, muss beim Bilden des Terms berücksichtigt werden.

> Beispiel: Im ersten Stock sind vier Personen mehr als im Parterre.
> Die entsprechenden Terme lauten:
> Entweder Parterre: x / 1. Stock x + 4
> oder 1. Stock x, Parterre x – 4

Beobachtete Unsicherheiten

In verschiedenen Schülergruppen werden Unsicherheiten dieser Art beobachtet. Sie treten oft erst beim Überprüfen der Terme auf. Häufig hilft ein Hinweis der Interviewenden, die Unstimmigkeit zu erkennen.

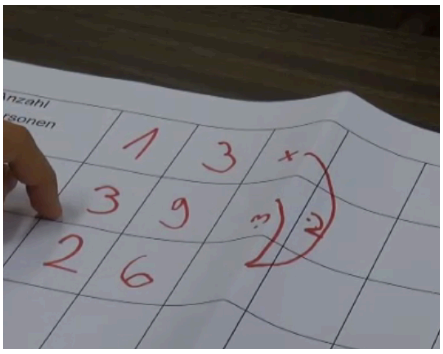


Abbildung 44 Bezugsgröße darstellen P_Munz_mH_jh_jm_A_Kl9

Ein Beispiel aus dem 9. Schuljahr: Das x setzen die Schülerinnen für die Personenzahl im Dachgeschoss. Sie zeichnen die Relationen mithilfe von Pfeilen in die Wertetabelle. Eine Schülerin beachtet nicht, dass sich beide Aussagen auf dieselbe Bezugsgröße beziehen und zeichnet den zweiten Pfeil falsch.

Im ersten Stock hat es dreimal so viele Personen wie im Dachgeschoss.

Sie zeichnet den Pfeil vom Parterre zum Dachgeschoss. Beide überprüfen die Pfeile anhand des Zahlenbeispiels.

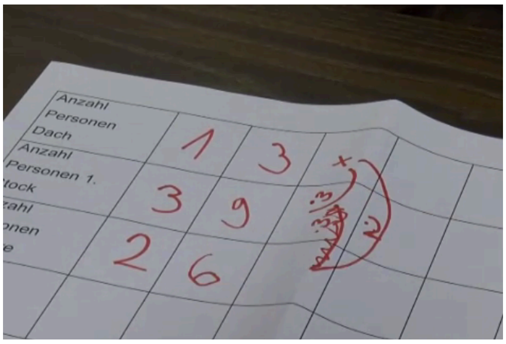


Abbildung 45 Bezugsgröße mit Variable P_Munz_mH_jh_jm_A_Kl9

S1 stellt fest, dass der eine Pfeil nicht richtig ist, weil er nicht zum ersten Zahlenbeispiel passt. Die Schülerinnen sind kurz irritiert und überprüfen mithilfe des Textes die Relationen. Anschließend korrigieren sie den Pfeil.

7. Schuljahr

S1 Also ich glaube die Lösung 1 stimmt, weil Alois hat dreimal so viele Karten wie Barbara. Und Barbara… wissen wir ja nicht. (*zeigt auf die x bei Barbara, zeigt auf Cyril*). Und da ist drei Mal x. (*zeigt auf Cyril*.) Und nachher…hem…Cyril hat drei Karten weniger als Alois. Also drei Mal minus drei. S2: mhm (*stimmt zu*) S1: Deswegen glaube ich ist es die Lösung eins.

I: mhm (ja) stimmt. Die erste ist richtig. Und die zweite? Wie sieht es mit dieser aus?

S1: Ich glaube das ist falsch, weil…. Ja diese ist sowieso falsch, weil… ehm… da steht nichts von einem Plus, also hat mehr.

S2: (zeigt auf Barbara) Hier wird bei Barbara geteilt durch drei gemacht. Das kommt ja davor.

D_P_Biel_D_Aufg4_5_jm_mb_2L_K7

Schüler begründet einsichtig, warum die Lösung 1 richtig ist. Interessant ist seine Aussage, dass sie die Anzahl von Barbara nicht kennen. Das trifft ja auch auf die anderen beiden zu. Er meint wohl, dass man Barbara als Bezugsgröße gewählt hat. Warum die Lösung zwei falsch ist, begründet er mit: „*Weil nirgends etwas von plus, also* *mehr steht*." Es ist ihm nicht bewusst, dass bei einer Umkehrung mit dem Wort *weniger* sehr wohl auch eine Addition beschrieben werden kann. Schüler 2 ist sich nicht so sicher. Er beobachtet, dass die Division durch drei passen könnte.

Beobachtete Strategien

Als erstes muss der Kontext erfasst werden (relational). Die Schülerinnen und Schüler setzen verschiedene Strategien ein. Gründliches Lesen und Umformulieren des Textes helfen, den Text zu verstehen. Dabei scheint die Wertetabelle eine wichtige Funktion zu haben.

9. Schuljahr

S1: Ach schau, dann musst du hier minus vier. (Zeigt in der Wertetabelle beim ersten Zahlenbeispiel auf den ersten Stock, die Fünf, und dann aufs Parterre.)

S2: Du musst einfach alle... Aha.

S1: Ja schau, da musst du x minus vier machen. Oder? Ich schreibe es einmal hin: x minus vier. (Schreibt die den Term in die Wertetabelle, ins Feld zum Parterre.) Weil: Da sind es ja vier mehr (Zeigt auf den ersten Stock, das x-Feld.) als hier (Zeigt auf das Parterre, wo x - 4 steht.). Schau, da ist ja auch fünf minus vier ist eins und sechs minus vier ist zwei. Zeigt auf die Felder des ersten und zweiten Zahlenbeispiels.

P_Munz_mH_B_tr_ts_G1_Kl9

Abbildung 46 Strategie Relationen mit Zahlen überprüfen P_Munz_mH_tr_ts_B_Kl9

Nun merken sie anhand der Zahlenbeispiele, dass sie vom ersten Stock ausgehend minus vier rechnen müssen, um die Anzahl des Parterres zu berechnen.

7. Schuljahr (Strategie: Nachfragen wer hat mehr?)
I: mhm Wer hat drei Karten weniger?
S1: Cyril
S2: Ah doch, ist anscheinend doch richtig.
S1: nein.
S2: Doch schau. (Zeigt auf Alois.) Alois hat ja dann dreimal so viel Karten wie Barbara. (Zeigt auf Barbara.) Dann ist es geteilt durch drei.
I: also vielleicht zuerst… kannst du vielleicht zuerst erklären wieso Alois x plus drei hat. Wenn Cyril x hat.
S2 A: Weil ehm hier ist man einfach rückwärtsgegangen. Also Cyril hat ja drei Karten weniger als Alois, deswegen hat er dann drei Karten mehr. Anstatt bei ihm minus, hat man beim Alois plus. Verstehst du?

P_Biel_D_Aufg4_5_jm_mb_2L_K7 Teil 1

Die Frage *Wer hat mehr Karten?* löst die Fehlvorstellung. Schüler 2 erkennt nun die Terme als richtig und beschreibt die Umkehroperation mit den Worten: *Man ist rückwärtsgegangen.*

Die beiden Gruppen unterstützen ihre Erklärungen durch Zeigen in der Tabelle und Begründen mithilfe der Zahlenbeispiele.
Die Frage *Wer hat mehr?* hilft, die beschriebene Relation zu strukturieren und ist ein erster Schritt, um den Sachverhalt zu quantifizieren.

Die Darstellung der Tabelle ist eine wichtige Unterstützung zur Kommunikation und zur Denkarbeit.
Es gibt nur wenige Gruppen, die sich bei unverbundenen Aufgaben unsicherer geben als bei verbundenen. Das mag an der

Aufgabenkonstellation liegen. In der Fachliteratur werden unverbundene Aufgaben als anspruchsvoller eingeschätzt. Diese Einschätzung kann hier nicht bestätigt werden.

Beispiele

6. Schuljahr

Aufgabe: Im ersten Stock wohnen 4 Leute mehr als im Parterre, Im Dachgeschoss wohnen doppelt so viele wie im 1. Stock

S1: Wir müssen vom 1. Stock ausgehen.

S2: Nein vom Dachgeschoss. Weil ... ah nein.

S1: Im ersten ...

S2: Wir müssen vom Dachgeschoss ausgehen, weil wir dann das Doppelte ...

S1: Also das Halbe ist dann im 1. Stock ...

S2: Nein das Doppelte.

P_Baet_oH_D_jh_an_G2_Kl6

Sie setzen sich mit den beschrieben Relationen auseinander und überlegen sich, *wo man anfangen mu*ss.

Die Aufgabe ist unverbunden (disconnected). Diese Herausforderung führt dazu, dass die beiden Schüler nicht gleicher Meinung sind, an welcher Stelle die Bezugsgröße gesetzt werden soll.

7. Schuljahr

S1: Hier gibt es kein offensichtliches x .

S2: Ja... aber ... Darf ich noch schnell... (vergleicht mit der vorangehenden Aufgabe. Diese war connected.)

P_Baet_oH_D_jh_an_G2_Kl7

Sie erkennen, dass diese Aufgabe nicht mehr die gleiche Struktur hat wie die vorangehende. Die Bezugsgröße ist in den beiden Sätzen nicht dieselbe (einmal Parterre, einmal erster Stock). Das führt jedoch nur zu einer kurzen Irritation. Mithilfe der Zahlenbeispiele klären die Schüler den Sachverhalt.

Unsicherheiten werden in den meisten Fällen von den Schülerinnen und Schülern selbständig geklärt. Es kommen die gleichen Strategien wie oben erwähnt zum Tragen.

Interpretation

Interessant sind Strategien im Bereich der Übergänge von der einen zur anderen Sichtweise. Einige Gruppen übersetzen die quantifizierbaren Beziehungen aus dem Text direkt in Terme. Die relationale Sichtweise steht dabei im Vordergrund.

Andere Gruppen verwenden Zwischenschritte, die einen Einblick in diesen Sichtwechsel von relational zu operational gewähren.
Als Zwischenschritte beim Wechsel in die andere Sichtweise können Fragen der Art *Wer hat mehr*? beobachtet werden. Solche Frage sind noch stark mit dem Kontext verknüpft, weisen jedoch schon auf eine Quantifizierung hin.

Einige Gruppen wählen zuerst Zahlbeispiele, um die Struktur zu erkunden. Damit werden die beiden Sichtweisen eng verwoben. Zahlen bieten die Möglichkeit eines explorativen Zugangs. Eine tabellarische Darstellung macht die Sicht frei, um Strukturen zu erkennen. Ebenfalls scheint ein Visualisieren der Relationsrichtung mithilfe von Pfeilen unterstützend zu sein. Es zeigt sich jedoch, dass die Zahlbeispiele und die entsprechenden Darstellungen immer noch als Rechenweg (relational) gedeutet werden. Der Schritt zum Term als Platzhalter für eine Zahl (gekapseltes Objekt), kann nach diesem Lösungsschritt noch nicht beobachtet werden.

Bei unverbundenen Aufgaben innerhalb eines Sachkontextes sind die Bezugsgrößen unterschiedlich. Darum entstehen häufiger komplexere Terme, die beispielsweise Klammern oder Divisionen enthalten. Die hauptsächliche Herausforderung in diesen Aufgaben liegt, so lässt sich aus dem Verlauf der

Lösungsprozesse vermuten, nicht in der Struktur der Aufgabe (unverbunden), sondern im Umgang mit Rechengesetzen und einem sicheren Umformen, um mit diesen komplexeren Termen operieren zu können.

Terme auswerten

Memo: Schülerinnen und Schüler sind unsicher, wie man vom Term zum Zahlenbeispiel gelangt. Diese Unsicherheiten wurden insgesamt 8 mal codiert und in 5 von 14 Gruppen beobachtet.

Das Auswerten von Termen ist eng mit dem Variablenverständnis verbunden. Es braucht die Einsicht, dass die Variable als Platzhalter für eine Zahl steht. Diese Einsicht eröffnet eine bedeutsame Strategie. Mithilfe von Zahlen können Terme konkretisiert oder überprüft werden.

Beispiel Strategie geschicktes Ausprobieren

$2x + 3 = 10$ $x = 1$ (zu klein); $x = 4$ (zu groß); $x = 3.5$.

Beim Bearbeiten der Zahlenbeispiele ist die operationale Denkweise im Vordergrund. Mit den Zahlen lässt sich rechnen (pp. 83). Terme auswerten scheint eine verständliche Strategie zu sein, die leicht anzuwenden ist. Es zeigen sich jedoch auch hier Unsicherheiten.

Beobachtete Unsicherheiten

Das Auswerten von Termen macht den Schülerinnen und Schüler kaum Mühe. Ab und zu ist ein Zögern zu beobachten, wenn Rechenoperationen nicht geläufig verfügbar sind.

Bei einer Gruppe ist es offensichtlich, dass ein Einsetzen in den Term b:2 Schwierigkeiten macht. Obschon der Interviewer hilft und den Term in ein halbes B übersetzt, sind sie einen Moment irritiert. Die Gruppe nimmt für b die Zahl 4 an. Nun ginge es darum den Wert des Terms b:2 zu bestimmen. Ein Schüler setzt für den Term b:2 auch die Zahl 4 ein, das Divisionszeichen lässt er unberücksichtigt. Anschließend legen die Schüler mit Plättchen ein Zahlenbeispiel. Sie sind auch hier noch unsicher, wie man den vorliegenden Term auswerten kann. Das zeigt sich an der Aussage:

> 7. Schuljahr
> Der Term lautet (2b + b:2 + 2). Sie setzen für b die Zahl 4 ein.
> S2: Wie müssen wir rechnen 4b oder... ?
>
> P_Baet_mH_D_tr_ts_G1_kl7
>
> Diese Schüler können den Term b:2 nicht als Rechenoperation interpretieren.

Beobachtete Strategien

Das Auswerten von Termen kann an vielen Stellen als hilfreiche Strategie beobachtet werden.

Terme überprüfen

Einige Gruppen überprüfen auf diese Weise konsequent ihre neu erstellten Terme.

> Beispiel 9. Schuljahr
>
> S2: Oder? Dann sind es hier zwei x und hier drei x...
>
> S2: Fünf x. S: ...das zusammen gibt fünf x plus zwei. Weil (H: Zeigt auf das zweite Zahlenbespiel.) fünf mal vier gibt ja zwanzig plus zwei gibt zweiundzwanzig. (Notiert die korrigierte, vereinfachte Formel.) Bevor sie jeweils die Terme aufschreiben überprüfen sie sofort, ob dies mit dem Zahlenbeispiel übereinstimmt.
>
> P_Munz_mH_D_tr_ts_G1_Kl9

Sie wirken beim Erstellen des Terms noch unsicher. Sie überprüfen ihn dann unmittelbar mit einem Zahlenbeispiel. Erst jetzt sind sie sicher, dass der Term richtig ist.

Terme klären

Schwierigkeiten treten beim Auswerten der Terme auf, wenn der Term ein Divisionszeichen enthält. An verschiedenen Stellen kann beobachtet werden, dass ein Auswerten mit Zahlen hilft, Terme mit Divisionszeichen zu klären.

> 7. Schuljahr
>
> Der Term lautet (2b + b:2 + 2). Sie setzen für b die Zahl 4 ein.
>
> S: Genau. Nein. Acht plus... Achtung. B ist ja vier. (*Zeigt auf den zweiten Teil der Gesamtformel, b : 2.*) Durch zwei. Vier durch zwei gibt was?
>
> S2: Ehm, zwei.
>
> I:...zwölf. Also stimmt es. Ja. Genau. Super.
>
> P_Baet_mH_D_tr_ts_G1_kl7

Das Beispiel, das vorne bei den Unsicherheiten aufgeführt wurde, wird hier wieder genutzt, um zu zeigen, wie die Schüler die Schwierigkeit, den Term b:2 mithilfe der Strategie des Auswertens klären können.

Interpretation

Die Strategie, Relationen mithilfe von Zahlen zu konkretisieren, unterstützt den Sichtwechsel vom relationalen zum operationalen Denken. Das Auswerten der Terme kann auch gelingen, wenn die Struktur des Terms nur vage erfasst ist. Die Zahlen helfen, die Struktur zu untersuchen und lassen eine stärkere Konkretisierung zu. Damit ist es leichter möglich, am Vorwissen anzuknüpfen. Beide Sichtweisen sind wichtig. Die operationale Sicht ermöglicht einen explorativen Zugang. Es können verschiedene Lösungen erstellt und verrechnet werden. Liegen Zahlenbeispiele vor, können diese nach Mustern und Gesetzmäßigkeiten untersucht werden. Dazu ist wiederum die relationale Sichtweise gefordert.

Das Auswerten von Termen scheint eine taugliche Strategie zu sein, um diese beiden Sichtwechsel zu verbinden. Interessant ist, dass diese Wechsel zur operationalen Sichtweise im Bereich der Zahlenbeispiele jedoch nicht genügen, um Terme auch sicher addieren zu können. Die operationale Sicht auf Terme liegt auf einer höheren Abstraktionsstufe (pp. 14). In dem Sinn sind Zahlen Hilfestellungen, die einen Sichtwechsel unterstützen. Das Auswerten von Termen ist ein Schritt dahin, Terme aus dem Kontext herauszulösen. Der Terme in eine Zahl übersetzt. Dadurch findet eine Loslösung statt von einer Beschreibung von Relationen hin zu einem Objekt, das sich verrechnen lässt.

Terme umformen

In diesem Bereich stellen sich Anforderungen sowohl im Kennen und Anwenden von Konventionen und Rechenregeln als auch in einem Verständnis von Termen. Die beiden Aspekte lassen sich nicht klar trennen. Das Kennen der Konventionen ist eine Grundlage, um mit Termen operieren zu können und diese in Anwendungen einzusetzen.

Die Analyse deckt einige Unsicherheiten auf, die interessante Hinweise im Umgang mit Termen aufzeigen.

> Memo: Unsicherheiten in den Bereichen Umgang mit Konventionen und Rechenregeln, insbesondere Klammern in Termen.
> Diese Unsicherheiten wurden insgesamt 25 mal codiert und in 12 von 14 Gruppen beobachtet.

Beobachtete Unsicherheiten

An verschiedenen Stellen werden Unsicherheiten in Bezug auf Schreibweisen oder im Umgang mit Klammerausdrücken beobachtet:

2a = a2

Die Multiplikation ist nicht als solche sichtbar, weil das Operationszeichen nicht geschrieben wird.

> 9. Schuljahr
> S2: Aber weisst du, dann... Warte schnell.
> S1: x zwei, schreib x zwei. Ah nein.
> S1: Mal zwei.
> S2: Meinst du zwei x, oder was?
> S1: x mal zwei, das ist ja auch x zwei, man kann ja das Malzeichen weglassen.
> P_Munz_mH_D_tr_ts_G1_Kl9

S1 sagt *x zwei*. Das ist keine übliche Redewendung. S2 schlägt 2(mal)x vor. S2 geht jedoch nicht darauf ein. Die Unsicherheit wird noch dadurch bestätigt, dass sie für sich aufsagt *x2, x mal 2 das Malzeichen kann man ja weglassen.*

x:2 = ½ x

Terme die in Form von Quotienten geschrieben sind, machen Mühe. Die Schülerinnen und Schüler sind überfordert, solche Terme als Summanden zu erkennen und zu verrechnen.

Beispiel 7. Schuljahr
Cyril : plus 2 ... Ja ich glaube schon ... (schreibt unter die Gleichung 2x + 2).
S1: Da bin ich nicht sicher, stimmt das?
I: 2x plus zwei entspricht mal der Barbara und dem Cyril (zeigt auf die entsprechenden Terme.)
S1: Muss ich jetzt ... durch 2 ...Ist es dann einmal x plus 2?
S2 AS: Also, wenn einmal x...

P_Baet_oH_E1_jh_an_G2_Kl7

Der Term x:2 verunsichert, das ist vermutlich der Grund, dass er einfach weg gelassen wird.

x = 1x

Zwei Gruppen formulieren den Term x in 1x um. Dadurch, so scheint es, können sie den Term einfacher als Summand erkennen und ihn operational deuten.

I: Also, du hast es jetzt herausgefunden, indem du hier in der Tabelle geschaut hast, oder? Zeigt auf die Spalte mit dem ersten Zahlenbeispiel. Und wenn man jetzt noch das hier anschaut, ist es logisch, wenn hier x mal sechs steht, wenn hier oben das steht? Zeigt auf die Spalte mit den allgemeinen x-Werten. Vielleicht könnt ihr das auch noch ... verstehen.
S1: Aha, ja wegen dem x.
S2: Es ist logisch.
I: Warum?

S2: Weil, hier machen wir ja mal drei und hier mal zwei und da ist ja schon ein x, und dann wäre es sechs mal x hier unten. Zeigt auf die jeweiligen Felder der Spalte mit den allgemeinen x-Werten.

S2: Weil man schreibt ja nicht x mal eins, man schreibt ja einfach x hin. (*Schreibt mit der Hand in die Luft: x mal eins.)*

I: Ja. S: Genau, du meinst da wäre ja... Zeigt auf das oberste Feld der Spalte mit den allgemeinen x-Werten. S2: Ja.

P_Munz_mH_A_E_tr_ts_G1_Kl9

Die Schülerinnen können auf die Nachfrage erklären wie man die Summe von x + 2x + 3x bildet. S2 sagt, man schreibt eben nur x und nicht 1x.

Um den Term operativ zu deuten, scheint es einfacher den Term x in der Form 1x aufzuschreiben.

Unsicherheiten mit Klammern

An verschiedenen Stellen sind Unsicherheiten im Umgang mit Klammern zu beobachten. Viele Gruppen erkennen selber oder nach Hinweisen der Interviewenden die falsche Schreibweise und korrigieren den Term. Somit ist anzunehmen, dass der Umgang mit Klammern bekannt ist, jedoch während des Lösungsprozesses nicht verfügbar ist.

Dazu ein Beispiel einer Gruppe aus dem 7. Schuljahr mit der Aufgabe:

Beispiel 7. Schuljahr

Aufgabe: Barbara hat 2 Karten mehr als Alois. Cyril hat doppelt so viele Karten wie Barbara.

S2: x mal 2 (schreibt bei Cyril x mal 2.)

I: dann hätte nun der Cyril doppelt so viele Karten wie der Alois.

S1: ja, x minus 2 mal 2.

S2: (*schließt den Filzstift.)*

S1: schreib!

S2: was schreib?

S1: x minus 2 mal 2

S2: da? (*zeigt auf Barbara*.)

S1: ja

S2: (*schreibt bei Barbara x minus 2 mal 2*)

S1: nein, nein da. (*zeigt auf Cyril*)

S2: schreibt bei Cyril x minus 2 mal 2

P_Biel_ C1_Aufg3_jm_mb_lk_1Lekt_7Kl

Schüler 2 zögert, diesen Term aufzuschreiben. Er verliert den Zusammenhang und weiss nicht, an welcher Stelle dieser Term aufzuschreiben ist. Der Umgang mit Klammern scheint ihn zu verunsichern.

Unverbundene (disconnected) Aufgaben

Solche Aufgaben führen durch ihre Struktur eher zu Klammerausdrücken oder zu Termen mit Divisionen. Das Aufstellen der Terme bietet im Vergleich zu den verbundenen Aufgaben kaum größere Unsicherheiten. Die beobachteten Unsicherheiten sind auf Operationen mit komplexeren Termen zurückzuführen.

Beobachtete Strategien

Die unterschiedlichen Schreibweisen 2x = x2 oder auch x:2 = ½ x werden an verschiedenen Stellen durch mehrmaliges Wiederholen und Umformulieren geklärt.

Das Divisionszeichen im Term wird in Worte gefasst.

Beispiel 7. Schuljahr

I : Ja. S: Also, vielleicht könnt ihr ja zuerst einmal... Wir haben hier ein B. *(Zeigt auf das erste b in der langen Formel.)* Was haben wir hier? Eigentlich ein halbes B, oder? *(Zeigt auf den Teil mit b : 2 in der langen Formel.)*

S2: Ja.

I: Einverstanden, ein halbes B. Und hier haben wir ein B und noch eine Zwei. (*Zeigt auf das letzte b in der langen Formel und das finale Zwei*.) Vielleicht hilft euch das schon ein wenig? Wie viele B haben wir insgesamt? Schaut einmal nur die B an.

S2: Drei.
I AS: Haben wir wirklich drei?
S2 AS: Nein, eigentlich nur zweieinhalb.

P_Baet_mH_D_tr_ts_G1_kl7

Der Interviewer unterstützt die Schüler stark, um den Term b:2 zu klären und formuliert ihn um (das ist eigentlich ein halbes b). Der Schüler übernimmt diese Formulierung. So ist es ihnen möglich, b:2 als Summanden zu betrachten (operational).

Einige Gruppen gehen sehr souverän mit Bezugsgrößen um. Wenn ihnen die Terme zum Weiterrechnen zu schwierig scheinen, etwa weil sie Klammern oder Divisionszeichen enthalten, formulieren sie diese um. Sie wählen die Bezugsgröße an einer anderen Position, so dass die Terme einfacher werden.

S2 hem…weil... weil wenn man von da anfängt. (*Zeigt auf Barbara und das Resultat von vorhin.)* Dann würde das nicht stimmen. (*Zeigt auf das alte Resultat von Cyril.)*
I: Stimmt das, oder was hast du gedacht?
S1: Also wenn man von da anfängt und das ausrechnet, so kann man das nicht herausfinden. Also wenn das da hier da wäre… so wäre es kompliziert. Also ja...
I: genau.

P_Biel_HS13_C1_Aufg3 _jm_mb_lk_1Lekt_7Kl

Schülerin 1 begründet, warum sie die Bezugsgröße geändert hat. Die Terme werden auf diese Weise weniger komplex.

Interpretation

Die Schreibweise eines Terms beeinflusst seine Deutung. Es gibt Schreibweisen, die eher relational gedeutet werden. Beispielsweise die Schreibweise x2 entspricht eher einer Rechenhandlung (relational). Die unbekannte Zahl wird verdoppelt. Umgekehrt wird 2x eher operational gedeutet. Das macht dann den Gedankengang möglich: Zu 2x können 6x addiert werden (operationale Sichtweise).

Variablen die als Faktoren aneinandergefügt werden, können verwirrend sein. Die Konvention, dass das Multiplikationszeichen zwischen zwei Variablen nicht gesetzt werden muss, ist einigen Schülerinnen und Schüler nicht präsent. Im Verlauf der Lösungsprozesse, zeigt es sich dann, dass sie diese Regel kennen, dieses aber in einem ersten Schritt nicht anwenden.

Terme addieren

Memo: Unsicherheiten beim Operieren von Termen, insbesondere bei der Addition von Termen
Diese Unsicherheiten wurden insgesamt 74 mal codiert und in 13 von 14 Gruppen beobachtet.

Ein interessantes Phänomen kann beim Addieren der Terme beobachtet werden. Hier treten die meisten Unsicherheiten auf. Obschon die Terme richtig gebildet vorliegen, fällt es den meisten Gruppen schwer, diese korrekt zu addieren. Einzig die Gruppe des 10. Schuljahres addiert die Terme auf Anhieb richtig.

Beobachtete Unsicherheiten

Es werden nur Zahlen addiert und die Variablen als eine Art Bezeichnung mitgeführt

Dieses Phänomen wird bei verschiedenen Gruppen beobachtet und ist im Abschnitt Variable verstehen (S. 69ff) beschrieben.

Ein Term wird bei der Addition nicht als Summand anerkannt und weggelassen

Häufig scheitern die Schülerinnen und Schüler beim Bilden des Summenterms, weil ein Summand weggelassen wird. An verschiedenen Stellen ist zu beobachten, dass einer der drei Terme nicht addiert wird.

Beispiel 7. Schuljahr:

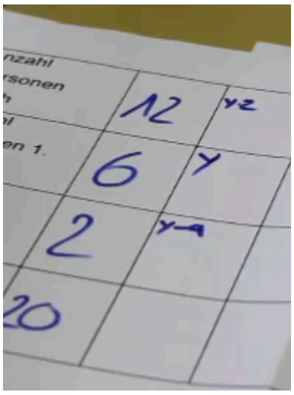


Abbildung 47 Terme addieren 1, P_Baet_mH_C_tr_ts_G1_Kl7.mp4

S2: y minus vier plus y mal zwei.

I: Mhm, das stimmt nicht ganz. Sonst probiert es einmal aus. Also y minus vier plus y minus zwei. y ist ja sechs. Das gibt dann insgesamt wie viel?

S1: y plus zwei. Du kannst *(... unverständlich*) gleich ganz weglassen.

S2: Aha vielleicht... Nein. Drei y mal zwei minus vier ist es nicht, nehme ich an.

P_Baet_mH_C_tr_ts_G1_kl7

Zuerst schlagen die Schüler vor, die beiden Terme y – 4 und y · 2 zu addieren. Die Variable, die für die Bezugsgröße gesetzt wurde, wird nicht als Summand erkannt. Die Interviewerin fordert sie auf, ihren Summenterm mit Zahlenbeispielen zu überprüfen. Mündlich überprüfen sie mit verschiedenen Zahlen. Nun bemerken sie, dass auch die Variable y addiert werden muss. So können sie die richtige Summe nennen.

Beispiel 9. Schuljahr:

'Im ersten Stock wohnen vier Personen mehr als im Parterre. Im Dachgeschoss wohnen doppelt so viele wie im ersten Stock.'

S2: Ah, das abhängig voneinander.

S1: Die zwei... (*Zeigt aufs Parterre und auf den ersten Stock.)*

S2: Das hast du ja durch das herausgefunden. (Zeigt aufs Dachgeschoss.) Weisst du, du hast ja hier mal zwei angehängt. Begreifst du das? Deshalb muss man ohne das (zeigt auf die Vier in der Formel beim ersten Stock.), weil das hast du ja schon gerechnet in diesem drin. Deckt die ganze Formel im ersten Stock ab und zeigt auf die Formel im Dachgeschoss. Dann müssen wir nur das auf... Das weglassen sozusagen. (*Zeigt auf x + 4 in der Formel im Dachgeschoss.)* Dann ist es zwei mal x plus vier mal zwei.

P_Munz_mH_C_tr_ts_G1_Kl9

Sie überprüfen den Term durch Einsetzen und stellen fest, dass er falsch ist. Schülerin 2 beschreibt, dass die Anzahl des Dachgeschosses abhängig ist von der Anzahl der Bewohner des 1. Stockes, richtig (Im Dachgeschoss hat es doppelt so viele wie im ersten Stock.) Schülerin 1 schließt daraus, dass dieser Term beim Bilden des Totals weggelassen werden muss.
Die Erklärung von Schülerin 2 gibt einen Einblick in ihre Entscheidungen: *Dieses x müssen wir nicht addieren, auf das wird ja Bezug genommen.* Die Terme sind in diesem Fall Rechenvorschriften. Die Bezugsgröße, die als x bezeichnet wird, muss aus Sicht der Schülerin nicht addiert werden.

Ein Term, der eine Division enthält, bereitet Schwierigkeiten

Eine Gruppe des 9. Schuljahres hat ein Zahlenbeispiel und die entsprechenden Terme richtig notiert. Nun geht es darum, die Terme zu addieren.

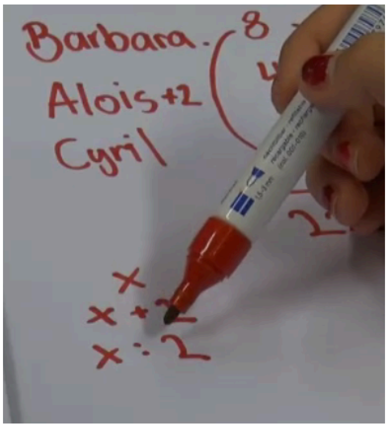


Abbildung 48 Terme addieren 2, P_Munz_mH_D_jh_jm_G2_Kl9

Beispiel 9. Schuljahr
S2: und jetzt müssen wir den ganzen Term noch aufschreiben?
I: genau.

S1: d.h. 3x

S2: nein, zwei, hier haben wir ja noch durch 2.

S1: ah ja, stimmt.

S2: 2x+2, ganz einfach oder nicht? 00:03:45-1

P_Munz_mH_D_jh_jm_D_G2_Kl9

Der Schüler nennt 3x als Summenterm. Vermutlich zählt er alle sichtbaren x zusammen (operational). Die Schülerin interveniert. Sie zählt nur zwei x, weil sie vermutlich die Division : 2 mit berücksichtigt. Dieses Vorgehen könnte so gedeutet werden, dass sie 2x zusammenfasst und diese durch 2 teilt, somit liegt nur noch ein x vor. Dieses addiert sie mit dem weiteren x und der Zahl 2. Der Schüler ist mit dieser Begründung einverstanden. Sie schreiben den Term 2x + 2 auf.

Beide nehmen eine operationale Sichtweise ein und versuchen nach ‚Rezepten' diese Terme zu addieren. Es zeigt sich, dass beide die Terme, die sie ohne Zögern aus dem Kontext generiert haben, also relational verstehen, operational falsch deuten.

Die Variablen und die Zahlwerte werden getrennt betrachtet und addiert

Die Multiplikation wird nicht erkannt. Etwa y ·3 wird gleich verarbeitet wie y + 3. Die geschriebenen y werden addiert und die geschriebenen Zahlen werden addiert ungeachtet der verwendeten Operationszeichen.

Beispiel 7. Schuljahr:

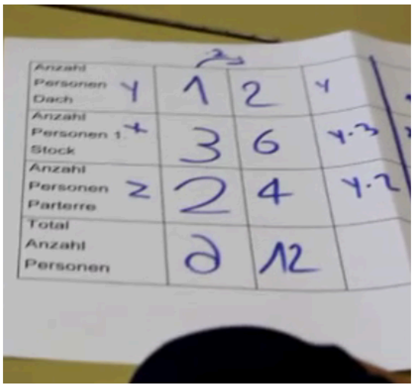


Abbildung 49 Terme addieren 3, P_Baet_mH_C_tr_tss_G1_Kl7

S2 AS: Drei y mal fünf.
I AS: Mhm. Das stimmt nicht ganz.

P_Baet_mH_C_tr_ts_G1_Kl7_P3

In dieser Aufgabe entsteht nun ein Mischung von Multiplikation und Addition. Die sichtbaren Variablen werden zusammengezählt (3y) und die geschriebenen Zahlen werden getrennt addiert. Anschließend wird wieder ein Multiplikationszeichen eingesetzt (3y mal 5 anstelle von 6y).

Beispiel 9. Schuljahr
Die Terme x, 2x und 3x sind in der Wertetabelle aufgeführt. Nun bilden sie das Total.
S2: x mal füüü, fü, fünf?

P_Munz_mH_A_E_tr_ts_G1_Kl9

Das Beispiel aus dem 9. Schuljahr zeigt eine gleiche Fehlinterpretation. Die *sichtbaren* Zahlen werden addiert.

Beobachtete Strategien

Schülerinnen und Schüler überprüfen die Terme durch Einsetzen von Zahlen. (pp. 84). Wenn es so nicht gelingt die Unsicherheiten zu klären, greifen einige Schülerinnen und Schüler auch auf die Handlungsebene zurück. Wertetabellen und das Hantieren mit Plättchen werden zu wichtigen Kommunikationsmitteln. Auf diese Weise ist es häufig möglich, den Sachverhalt eigenständig zu klären.

Einige Gruppen stellen auf einem Beiblatt die Terme als Summanden zusammen. Dieser Übertrag scheint eine Unterstützung zu sein, um Terme aus der Deutung der Rechenanleitung zu lösen.

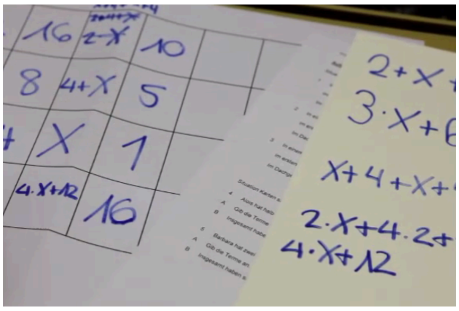


Abbildung 50:Strategie Terme addieren 1, P_Baet_mH_C2_tr_ts_G1_Kl6.mp4

Interpretation

Solange Terme nur als Rechenanleitungen (relational) gedeutet werden, ist es nicht verständlich warum sich solche *Beschreibungen* verrechnen lassen. Verschiedene Unsicherheiten bestätigen diese Interpretation. Drei Terme

liegen als Summanden vor. Nun ist es einigen Gruppen nicht klar, wie daraus eine Gesamtsumme erstellt werden kann.
Das Operieren mit Termen wird erst dann möglich, wenn verstanden ist, dass der Term auch operational, als gekapseltes Objekt, gedeutet werden kann. Erst bei dieser Perspektive ist der Term ein Stellvertreter für eine Zahl (S. 36ff).
Dies scheint eine bedeutsame Hürde beim Algebraisieren von Sachkontexten zu sein. Wenn es den Schülerinnen und Schülern gelingt, Terme entsprechend des vorgegebenen Kontextes zu bilden, steht die Herausforderung an, diese zur Weiterverarbeitung auch operational zu deuten. An dieser Stelle im Lösungsprozess ist ein sicheres Wechseln zwischen den beiden Denk- oder Sichtweisen gefordert.

Das Auswerten von Termen scheint eine hilfreiche Brücke zu sein, einen geläufigen Wechsel zwischen den beiden Sichtweisen zu stärken. Werden Zahlen anstelle der Variablen eingesetzt, können die Terme ausgewertet werden. Dies ist ein Verfahren im operationalen Bereich. Der Term, der soeben noch als Rechenvorschrift gedeutet wurde, erhält eine quantifizierbare Komponente. Wird das Auswerten von Termen zur Überprüfung von Lösungen genutzt, werden die einzelnen Terme sowohl als Summanden gedeutet (operational) wie auch mit einem entsprechenden Sachverhalt verbunden (relational).

2.2.3 Gleichung als Hilfsmittel nutzen

Memo: Lösungen werden durch Rückwärtsrechnen bestimmen
Dieses Vorgehen wurde insgesamt 53 mal codiert und in aus 14 von 14 Gruppen beobachtet.
Unsicherheiten im Interpretieren der Lösungen → Unsicherheit: 2 Diese Unsicherheiten wurden insgesamt 2mal codiert und in 2 von 14 Gruppen beobachtet.
Aufstellen der Gleichung: Unsicherheiten: 0
Auflösen der Gleichung mithilfe der Äquivalenzumformungen: Unsicherheiten: 0

Das Aufgabenset ist so konzipiert, dass zuerst ein intensiver Umgang mit Termen angeregt wird, bevor ein Anwenden von Gleichungen angelegt ist. Der Schritt hin zur Gleichung wird mit einer Zusatzaufgabe eingeleitet. Nach der Angabe der allgemein beschriebenen Relationen werden nun Angaben zur Gesamtanzahl der Personen und der Karten vorgegeben.

> Aufgabenbeispiel
> Alois hat zwei Karten weniger als Barbara, Cyril hat doppelt so viele Karten wie Alois.
> a) Gib die Terme an
> b) Insgesamt haben sie 14 Karten.
> c) Insgesamt haben sie 130 Karten.
> (Aufgabe c) wird in der überarbeiteten Aufgabenserie eingesetzt.)

In den vorangehenden Lösungsschritten wurden die Summenterme erstellt. Nun geht es darum, die entsprechenden Lösungen zu finden.
Wer gewohnt ist mit Gleichungen umzugehen, wird die vorliegenden Terme spätestens bei Aufgabe c) nutzen, um eine Gleichung aufzustellen. Der Term, der die Gesamtanzahl beschreibt, wird mit der entsprechenden Anzahl gleichgesetzt. Die Gleichung wird aufgelöst. Sie ist in dieser Situation ein zweckmäßiges Instrument, um Lösungen zu bestimmen. Nun erstaunt es,

dass bei allen Gruppen zuerst Lösungsversuche durch Rückwärtsrechnen erfolgen. Die vorliegenden Terme werden nicht zum Aufstellen einer Gleichung genutzt.

Beobachtete Unsicherheiten und Vorgehen

In diesem Abschnitt werden nicht nur Unsicherheiten im Umgang mit Gleichungen beschrieben. Es werden auch andere Vorgehensweisen beschrieben, wie die Schülerinnen und Schüler versuchen, die Lösungen zu bestimmen.

Obschon einige Gruppen sicher Gleichungen umformen können, suchen alle Gruppen zuerst die Lösungen durch Rückwärtsrechnen. Drei Schülergruppen nutzen später, nach Hinweisen der Interviewenden, die Gleichung. Die anderen wählen durchwegs die Strategie des geschickten Ausprobierens. Wenn die Gesamtanzahl groß ist (z.B. 130 Personen), sind sie zum Teil stark gefordert.

> An einem Beispiel aus dem 9. Schuljahr werden diese Beobachtungen illustriert.
>
> Die Schülerinnen notieren zuerst Zahlenbeispiele und anschließend die Terme tabellarisch. Sie machen einen sicheren Eindruck.
>
> Der korrekte Term 5x + 2 ist doppelt unterstrichen. Somit liegt ein Summenterm vor. Die Interviewerin fordert die Schülerinnen auf, entsprechende Lösungen zu bestimmen.
>
> *Insgesamt haben sie nun 27 Karten. Wie viele Karten hat jedes?*

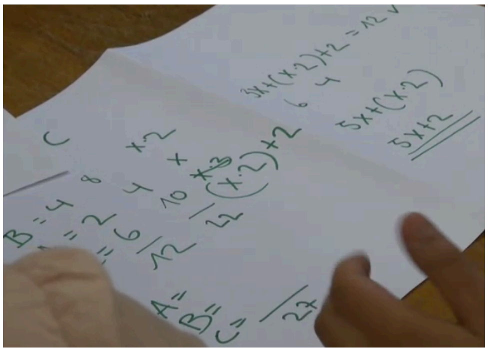


Abbildung 51 Gleichung als Strategie zum Bestimmen der Lösungen 1, P_Munz_mH_D_tr_ts_Kl9

In der Mitte des Bildes sind die einzelnen Terme erkennbar. Der Summenterm ist rechts zu sehen. Die Schülerinnen schreiben nun tabellarisch die Abkürzungen der Namen, A für Alois, B für Barbara und C für Cyril (links). Die Gesamtanzahl Karten wird in einer weiteren Zeile in der Tabelle angefügt. Nun versuchen die Schülerinnen durch geschicktes Rückwärtsrechnen die Lösungen zu bestimmen.

Eine Schülerin teilt die 27 durch 3 und bietet 9 als Lösung an. Dieser Lösungsvorschlag ist interessant. Die Schülerin nimmt eine operationale Sichtweise ein und erkennt, dass drei Lösungen gesucht werden und die Zahl durch drei teilbar ist. Den Blick auf die vorgegebenen Relationen hat sie verloren.

Die andere Schülerin weist auf die Verbindung zwischen den Zahlen und den Termen hin (relational) und versucht diese zu nutzen.

Nach langem Studieren erkennen beide, dass der Summenterm, sie nennen ihn Gesamtformel, mit der 27 gleichgesetzt werden kann. Jetzt sind sie sicher und lösen die Gleichung ohne Schwierigkeiten auf.

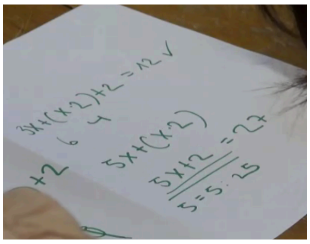


Abbildung 52 Gleichung als Strategie zum Bestimmen der Lösungen P_Munz_mH_D_tr_ts_Kl9

S1: Also, wir haben ja die Formel. Wir machen es mit der Formel. (*Zeigt auf den vereinfachten Term für das Total.)*
S2: Aber wir haben das x ja nicht, das ist das Dumme.
S1: Ah ja, wir haben nur die Formel.
S1: Aha, warte, das ist ja die Gesamtformel. Das brauchen wir nicht. Wir brauchen ja diese Formeln. (*Zeigt auf die einzelnen Terme hinter den Zahlenbeispielen.)*

P_Munz_mH_D_tr_ts_G1_Kl9

Sie interpretieren die Lösung ohne Mühe und setzen die Ergebnisse vorne auf dem Blatt in der Tabelle ein.

Dieses Beispiel zeigt wie Schülerinnen und Schüler, welche Terme gewinnen, Terme auswerten und Terme umformen können, ja sogar die Äquivalenzumformungen kennen, dennoch beim Algebraisieren einfacher Sachkontexte scheitern können. Der Summenterm kann zwar erstellt, aber nicht gedeutet werden.

Beobachtete Strategien

Das häufigste Vorgehen beim Bestimmen der Lösungen ist ein geschicktes Rückwärtsrechnen. Es zeigt sich, dass viele Schülerinnen und Schüler souverän mit Umkehroperationen umgehen können.
Schülerinnen bestimmen die Lösungen mithilfe von Umkehroperationen, obschon der Summenterm vorliegt.

Beispiel 7. Schuljahr:

Alois hat zwei Karten mehr als Barbara. Cyril hat doppelt so viele Karten wie Barbara.

S2: Dann hat Alois plus 2.

S1: (Schreibt rechts neben Barbara Alois und noch weiter rechts Cyril auf. Schreibt unter Barbara x und unter Alois x + 2 hin. Er setzt dann den Stift unten bei Cyril an.

S2: Mal 2 ... doppelt viele wie Barbara.

S1: Schreibt unter Cyril x hin. zögert...

S2: Doch doppelt viele wie Barbara.

S1: Das ergibt 4 mal x plus 2. (*Schreibt unter die Terme 4x + 2 hin*).

S2: So, insgesamt haben sie 30 Karten... 4 mal was ergibt 28?

S1: 4 ähm 12.

S2: Ja.

P_Baet_oH_F_jh_an_G2_Kl7

Sie schreiben die Gleichung auf und rechnen zum Bestimmen der Lösung rückwärts. (Die Schülerinnen und Schüler des 7. Schuljahres kennen die formale Anwendung des Gleichungen Lösens mithilfe von Äquivalenzumformungen noch nicht.)

Einige Gruppen nutzen beim geschickten Ausprobieren die Terme der einzelnen Stockwerke. Sie übernehmen diese Struktur, um rückwärts zu rechnen. Den Term der Gesamtanzahl nutzen sie jedoch nicht.

Auf der Suche nach möglichen Lösungen überprüfen die Schülerinnen und Schüler ihre erstellten Terme noch einmal durch Einsetzen von Zahlen. Einige Gruppen entdecken dabei fehlerhafte Terme, die sie eigenständig verbessern.

Interpretation

Die Einsicht, dass Gleichungen eine gute Strategie zum Bestimmen von Lösungen sind, ist bei den meisten Gruppen noch nicht in gewünschtem Maß entwickelt.

Einige Gruppen rechnen mithilfe der Terme der einzelnen Stockwerke rückwärts. Den Summenterm für die gesamte Anzahl verwenden sie nicht. Es scheint, dass sie diesen nicht entsprechend interpretieren können. Sie haben ihn in der operationalen Sichtweise erstellt. Nun müssten sie wieder eine relationale Sichtweise einnehmen, um den Term entsprechend deuten zu können, nämlich, dass er auch für die Anzahl aller Personen, respektive für die Anzahl aller Karten steht. Diese Deutungsweise ist eine Grundlage, um Gleichungen zum Bestimmen von Lösungen einsetzen zu können.

Das Auflösen der Gleichungen ist je nach Lernstand stärker durch die operationale oder durch die relationale Sichtweise geprägt. Wird eine Gleichung rezeptiv, entsprechend den Äquivalenzumformungen aufgelöst, ist eine operationale Sichtweise vorherrschend. Wer dieses Verfahren beherrscht, muss nicht lange nachdenken und kann die Umformungen geläufig ausführen. Kennen die Schülerinnen und Schüler die Äquivalenzumformungen noch nicht und müssen diese selber erarbeiten, wird die relationale Sichtweise vorherrschen. Die Gleichung wird als Beziehung zwischen zwei Termen interpretiert (relationale Sichtweise).

Werden die Lösungen mit der Strategie des geschickten Rückwärtsrechnens bestimmt, kommen beide Sichtweisen zum Tragen. Einerseits wird mit den Zahlen operiert, andererseits braucht es einen Blick auf die Struktur der gegebenen Relationen, so dass Umkehroperationen erfolgreich eingesetzt werden können.

2.3 Zusammenfassung

Mithilfe des Modells in Abbildung 53 lassen sich die verschiedenen Lösungsschritte beim Algebraisieren von Sachkontexten visualisieren. Dies wird mit einem Pfeil von unten nach oben illustriert, die Lösungsschritte 1 – 7 bilden die zentralen Schritte im Lösungsprozess ab. Die Bereiche der beiden Denk- und Sichtweisen sind mit zwei unterschiedlich farbigen Rechteckflächen unterlegt.

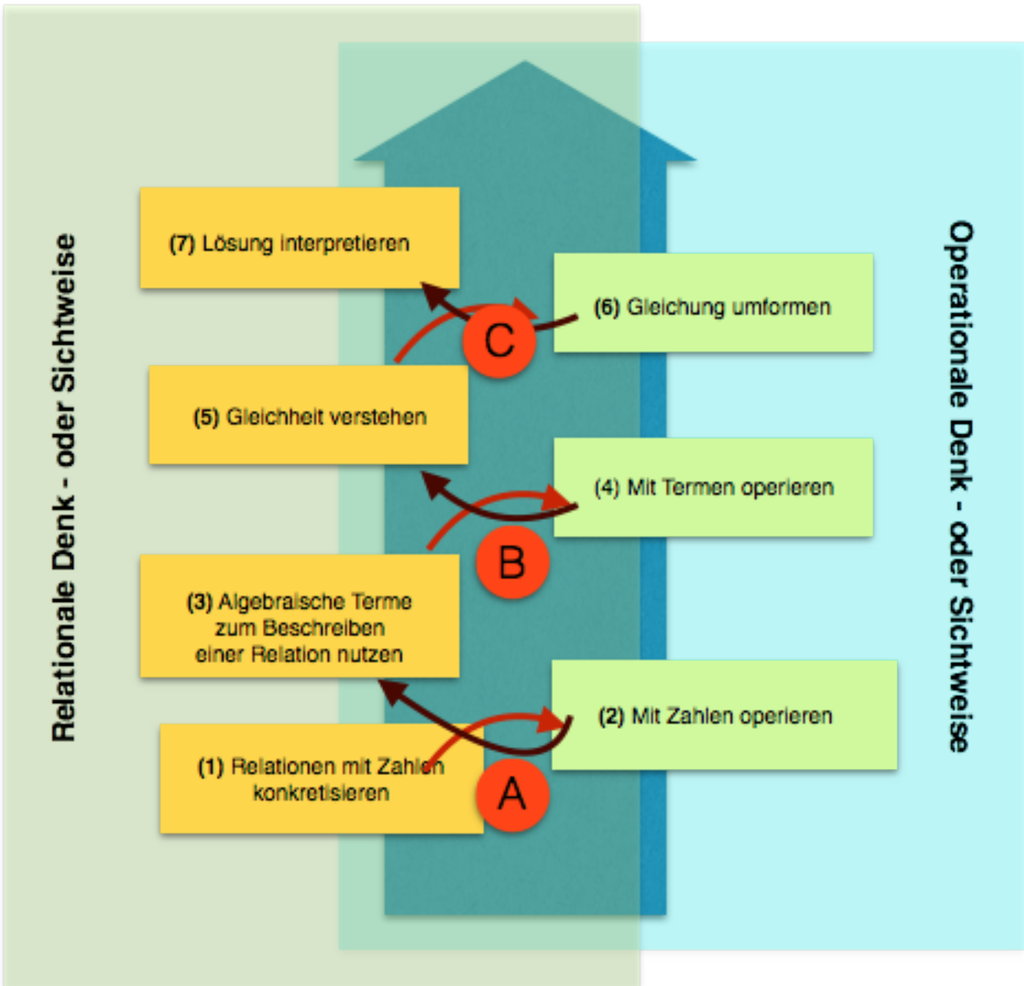


Abbildung 53 Modell zur Beschreibung des Lösungsprozesses beim Algebraisieren von Sachkontexten

Die Struktur dieses Lösungsprozesses ist eine mögliche sinnvolle Abfolge beim Algebraisieren von Sachkontexten. Die tatsächlich stattfindenden Lösungsprozesse sind keineswegs einheitlich, die Schülerinnen und Schüler wählen unterschiedliche Schrittfolgen. Einige Schülerinnen und Schüler steigen bei Schritt 3 ein. Sie versuchen direkt, ausgehend vom Text die Terme aufzustellen und gehen erst bei auftretenden Unsicherheiten zurück zu Schritt 1 und 2, sei es zu einer Abklärung von Vermutungen mithilfe von Zahlenbeispielen oder zum Überprüfen der Terme.
Die Schritte 1 und 2 liegen im Bereich der Arithmetik und werden dem algebraischen Denken zugeordnet. Dieses umfasst auch Auseinandersetzungen im arithmetischen Bereich wie Muster untersuchen, Zusammenhänge erkennen oder verallgemeinernd Rechenregeln zu beschreiben. Im Vordergrund steht dabei etwa das Erkennen von Strukturen oder Mustern (S. 139ff.) Dazu sind keine Kenntnisse der algebraischen Sprache erforderlich.

(1) Relationen mit Zahlen konkretisieren

Liegt eine allgemein beschriebene Situation vor, geht es in einem ersten Schritt darum, die beschriebenen Beziehungen zu erfassen. Dies erfolgt in Schritt 1 durch eine Konkretisierung mit Zahlen. Die Ausgangslage ist die beschriebene Relation, dabei ist die relationale Sichtweise vorherrschend. Um nun entsprechende Zahlenbeispiele nennen zu können, müssen bereits einige Herausforderungen gemeistert werden. Zuerst müssen die Wörter des Textes verstanden werden. Die beschriebene Alltagssituation wird mit eigenen Erfahrungen vernetzt, so dass die Ausgangslage vorstellbar wird.
Um Zahlenbeispiele erstellen zu können, muss zuerst entschieden werden, an welcher Stelle eine Annahme getroffen werden soll. Im Weiteren müssen diese passenden Operationen zugeordnet werden. Dabei ist die Erfassung der Richtung der Relation entscheidend. Um dies zu bewältigen, muss die gesamte Beschreibung der Relation im Blick sein (relationale Sichtweise).

Ein rezeptives, schrittweises Abarbeiten, gestützt auf eine operationale Sichtweise, ist nicht möglich.

(2) Mit Zahlen operieren

Jede Art von Operieren bedingt eine operationale Sichtweise. Dies gilt bereits beim Erstellen der Zahlenbeispiele. Ausgehend von der Bezugsgröße müssen die Operationen angewendet werden.

(3) Algebraische Terme zum Beschreiben einer Relation nutzen

Die Übersetzung der Relationen in algebraische Terme fordert ähnliche Lösungsschritte wie das Erstellen der Zahlenbeispiele in Schritt 1. Wiederum muss die Struktur der Relation erfasst und eine Bezugsgröße gewählt werden. Beide Aktivitäten erfolgen hauptsächlich unter einer relationalen Sichtweise. Dieser Schritt, das Übersetzen in algebraische Terme liegt jedoch auf einer höheren Abstraktionsebene. Es treten mehr Unsicherheiten auf als in Schritt 1.

(4) Mit Termen operieren

Es besteht eine große Diskrepanz zwischen dem Operieren im arithmetischen und dem algebraischen Bereich. Im Gegensatz zu den Operationen im arithmetischen Bereich, machen die Operationen im algebraischen Bereich den Schülerinnen und Schülern zum Teil Mühe. Mögliche Gründe lassen sich nur vermuten wie beispielsweise, dass Rechenoperationen (arithmetischer Bereich) so stark automatisiert sind, dass sich die Schülerinnen und Schüler dabei das Wesen der Operationen nicht mehr bewusst sind (operationale Sichtweise). Nun im Umgang mit Termen braucht es wieder grundsätzliche Überlegungen zu den Grundoperationen bezüglich der zugrunde gelegten Handlungen (relationale Sichtweise).

Große Unsicherheiten treten beim Addieren der Terme auf. Hier können Unsicherheiten anhand einzelner Ausführungen von Schülerinnen und Schülern gedeutet werden. Solange die Terme nur als Rechenweg oder als Beschreibung der Relationen gedeutet werden, können diese nicht addiert werden. Um mit algebraischen Termen operieren zu können, muss ein Term als neues Objekt gekapselt (Sfard, 1991) wahrgenommen werden, das letztlich auch als Platzhalter für eine Zahl steht. Nur auf dieser Grundlage kann das Operieren vollzogen werden.

(5) Terme gleichsetzen

Um Gleichungen zum Lösen von Sachkontexten nutzen zu können, muss die Beziehung zwischen Termen, in dem Fall ihre Gleichwertigkeit, erkannt werden. In der vorliegenden Arbeit steht der Gesamtterm für die Anzahl aller Bewohner, resp. für die Anzahl aller Karten.

Er wird mit der vorgegebenen Zahl, die ebenfalls für die Gesamtanzahl steht, in Beziehung gebracht. Erst wenn dies erkannt ist, kann untersucht werden, welche Zahlen für diese Vorgabe zutreffen.

(6) Gleichung umformen

In diesem Schritt wird die Gleichung regelgeleitet umgeformt.

Die operationale Sichtweise steht somit im Vordergrund. Erst dieser Perspektivwechsel macht ein formales Bestimmen der Lösung möglich.

(7) Lösung interpretieren

Die vorliegenden Lösungen müssen anschließend wieder interpretiert werden, so dass Aussagen zum Sachkontext möglich sind.

Hierzu werden keine Herausforderungen beobachtet. Die Schülerinnen und Schüler interpretieren die vorliegenden Zahlenwerte ohne Schwierigkeiten.

Die maßgeblichen Wechsel sind in der Grafik (Abbildung 53) mit den Buchstaben A, B und C gekennzeichnet:

(A) Beim Erstellen der Zahlenbeispiele kann bereits ein Wechsel zwischen den beiden Sichtweisen beobachtet werden. Dies ist im arithmetischen Bereich nur in Ansätzen beobachtbar. Sobald die Schülerinnen und Schüler eine Annahme treffen, können sie die beschriebenen Beziehungen mit Zahlenbeispielen ausdrücken. Die Beziehung wird relational gedeutet und anschließend (kaum sichtbar) in ein Rechenobjekt überführt. Sobald die erste Zahl (Bezugsgröße) gewählt ist, setzt ein Operieren mit Zahlen ein. (Bsp: Im Parterre hat es drei Personen mehr als im Dachgeschoss 6 → 6+3 = 9.)

Die Wechsel dieser Art liegen im arithmetischen Bereich. Demzufolge können bereits auf dieser Ebene (algebraisches Denken, S. 17ff) die beiden Sicht – oder Denkweisen und die Wechsel zwischen ihnen im Unterricht thematisiert und in einem bekannten Lernfeld diskutiert werden. Damit kann ein Algebraisieren von Sachkontexten vorentlastet werden.

(B) Die Wechsel zwischen den beiden Sichtweisen im Umgang mit algebraischen Symbolen ist für die Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung. Ihr Variablen- und Termverständnis ist noch nicht so weit ausgebaut, dass die beiden Perspektiven sicher zur Verfügung stehen. Sowohl die Wechsel vom relationalen zum operationalen, als auch die Wechsel vom operationalen zum relationalen können als Herausforderungen beobachtet werden.

Dies wird an zwei Beispielen aus der Untersuchung illustriert:

In einigen Fällen können die Schülerinnen und Schüler den Schritt von der relationalen zur operationalen Sichtweise nicht vollziehen. Das zeigt sich etwa bei Termen, welche sie als Rechenwege deuten. Die Terme akzeptieren sie nicht als Platzhalter für Zahlen. Dadurch ist auch kein regelgeleitetes Addieren möglich. Als Strategien setzen die Schülerinnen und Schüler verschiedene Darstellungsformen ein wie etwa das Legen von

Zahlenbeispielen mit Plättchen oder sie werten die Terme aus. Diese Strategien erweisen sich als hilfreich, um sich der andern Sichtweise (hier der operationalen) anzunähern.
Es kann auch beobachtet werden, dass einige Schülerinnen und Schüler in der operationalen Sichtweise stecken bleiben und demzufolge sie die Terme nicht als Beschreibung von Relationen erkennen können. Das erste Zahlenbeispiel erstellen sie richtig, nachher geht jedoch der relationale Blick verloren. Die weiteren Zahlenbeispiele erstellen sie durch Verdoppeln des ersten. Das Überprüfen und Abgleichen des Textes mit dem Zahlenbeispiel hilft ihnen dann wieder, um diese Fehlstrategie aufzudecken.

(C) Die Schülerinnen und Schüler sind sich nicht gewohnt, Gleichungen zum Lösen eines Sachkontextes einzusetzen. Eigentlich kennen Schülerinnen und Schüler des 9. und 10. Schuljahres aus dem Unterricht diese Strategie Lösungen mithilfe von Gleichungen zu bestimmen. Die Untersuchung zeigt jedoch, dass dieses Wissen zu wenig präsent ist und ein Transfer nicht ohne Hinweise der Interviewenden umgesetzt werden kann.
Den Schülerinnen und Schülern des 6. und 7. Schuljahres ist das formale Umformen nicht bekannt. Sie nutzen jedoch die Struktur der Terme, um die Lösungen zu finden. Dadurch werden relationale und operationale Sichtweise eng miteinander vernetzt.

Teil IV Ergebnisse, Hinweise für die Praxis und Fazit

1 Ergebnisse der Studie

1.1 Drei typische Unsicherheiten

In der vorliegenden Arbeit lösen Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1 Aufgaben im Bereich ‚Sachkontexte algebraisieren'. Dabei wird untersucht, welche Sicht- oder Denkweise die Schülerinnen und Schüler in den verschiedenen Lösungsschritten einnehmen. Die Ergebnisse geben einen Einblick, an welchen Stellen die Wechsel der beiden Sichtweisen zu Herausforderungen beim Algebraisieren von Sachkontexten werden können.

Anhand von drei Beispielen aus der Erhebung, werden typische Herausforderungen illustriert.

Hürde 1: Gleichung wird nicht als Hilfsmittel erkannt

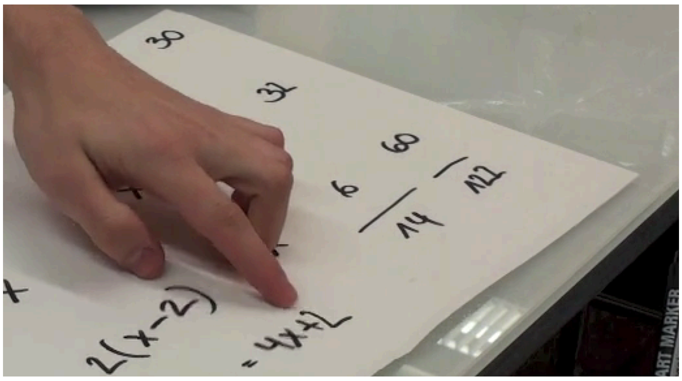


Abbildung 54 Gleichung zur Bestimmung von Lösungen nutzen P,_Koe_oH_19_12_D_Kl 10

Die Gruppe aus dem 10. Schuljahr erstellt die geforderten Terme und bildet den entsprechenden Summenterm (Interviewerin zeigt darauf.) Nun gibt die Interviewerin die Gesamtanzahl vor, zuerst 14. Diese Lösung erkennen die Schüler schnell, sie schreiben sie rechts tabellarisch auf. Bei der

Gesamtsumme 130 probieren sie durch geschicktes Rückwärtsrechnen. Es gelingt ihnen jedoch nicht, die Aufgabe zu lösen. Obwohl der Summenterm vorliegt, stellen die Schüler keine Gleichung zum Bestimmen der Lösungen auf. Sie setzen an dieser Stelle keine Äquivalenzumformungen ein, obwohl sich in einem späteren Beispiel zeigt, dass die Schüler Äquivalenzumformungen sicher durchführen können.
Sie erkennen jedoch nicht, dass die Gleichung zum Bestimmen der Lösungen genutzt werden könnte.

Hürde 2: Der Blick auf die relationale Sichtweise geht verloren

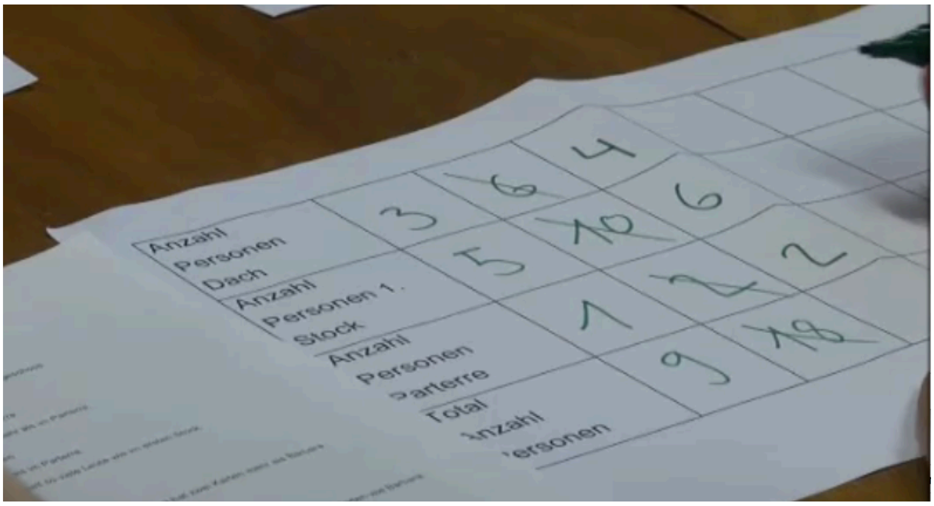


Abbildung 55 Zahlenbeispiele operational P_Munz_mH_A_E_tr_ts_G1_Kl9

Die Schülerinnen generieren das erste Zahlenbeispiel richtig. Um das zweite zu erstellen, wählen sie die Strategie des Verdoppelns. Dies entspricht jedoch nicht mehr der Struktur der gegebenen Relationen. Die Schülerinnen wirken sicher. Sie wenden ein Rezept an, womit Zahlenbeispiele einfach

erstellt werden können (relationale Sichtweise). Dabei blenden sie die beschriebenen Relationen aus.
Diese Schülergruppe kann sicher Zahlenbeispiele nennen. Es ist ihr aber nicht bewusst, dass das Verdoppeln der Zahlen nicht mit den beschriebenen Relationen übereinstimmt.

Hürde 3: Welche Terme sollen addiert werden?

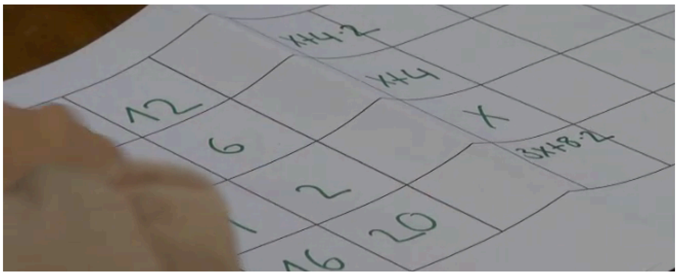


Abbildung 56 Terme addieren: Welche Terme?), P_Munz C_mH_tr_ts_Kl 9

Im ersten Stock wohnen vier Personen mehr als im Parterre. Im Dachgeschoss wohnen doppelt so viele wie im ersten Stock.

Entsprechend den beschriebenen Relationen werden Zahlenbeispiele generiert und Summen berechnet. In einem nächsten Schritt werden die Terme aufgeschrieben. Anschließend müsste nun, wie bei den Zahlenbeispielen, der Summenterm erstellt werden. Dabei werden Fehlvorstellungen sichtbar. Um den Summenterm zu erstellen, addieren sie nur den Term in der obersten Zeile (Term Dachgeschoss) und den Term der dritten Zeile. (Klammer nicht gesetzt, aber richtig gerechnet.
$(x + 4) \cdot 2 + x = 3x + 8$)

Abbildung 57 Kommunikation Terme addieren: Welche Terme? (2)_ P_Munz_mH_C_tr_ts_Kl9

Eine Schülerin deckt den zweiten Term mit der Hand ab und erklärt, dass dieser nicht addiert werden müsse. Er sei ja schon im ersten Term enthalten.
Wenngleich diese Schülerinnen Terme gewinnen können, bleiben sie im Lösungsprozess stecken. Sie verstehen nicht, wie sich Terme addieren lassen.
Hier zeigt sich wiederum, dass die Sicht – oder Denkweise, die zum Deuten der Terme eingenommen wird, entscheidend ist. Mit einer relationalen Sicht wird eher das Konzeptuelle und die Struktur des Terms ins Zentrum gerückt. Dies steht im Kontrast zur operationalen Denk- oder Sichtweise. Diese fokussiert auf rezeptives Handeln oder Abarbeiten, meist ist dies ein schrittweises Vorgehen.
In dieser Arbeit kann die Bedeutsamkeit dieser Denk- und Sichtweisen und der Wechsel zwischen ihnen nachgewiesen werden. Verschiedene Fachdidaktiker und Fachdidaktikerinnen weisen auf die Bedeutung der beiden Denk- oder Sichtweisen beim Erlernen der Algebra, wie beispielsweise Siebel (2005), Hefendehl und Rezat (2015), Malle und Wittmann (1993), Jacobs et al. (2007) hin.

1.2 Beantwortung der Forschungsfragen

Inwiefern können die beiden Sicht-, respektive Denkweisen in den beobachteten Lösungsprozessen erfasst werden?

An verschiedenen Stellen der Lösungsprozesse ist deutlich erkennbar welche Denk- und Sichtweisen die Schülerinnen und Schüler einnehmen. Oft sind es Redewendungen, Handlungen oder Vorgehen, die eine Zuordnung möglich machen. Dies wird mithilfe des Modells konkreter ausgeführt (siehe Abbildung 53).
Beim Lösen der Aufgaben ist ein Hin und Her zwischen den beiden Denkweisen zu beobachten. Die oben dargelegten Schülerbeispiele sind in dieser Form für die Erhebung typisch. Anhand von Redewendungen, Schreibweisen oder Vorgehen wird die eine oder andere Sicht auf das mathematische Objekt betont.

Beispiel Redewendungen

Der Term wird als Rechenweg oder als Beschreibung von Denkschritten gedeutet. Redewendungen dieser Art weisen auf eine relationale Sichtweise hin. Die Terme drücken wahrgenommene Zusammenhänge aus. Die Schülerin in Beispiel 3 (Seite 222) sagt beispielsweise, dass ein Term nicht addiert werden müsse, weil er ja schon im ersten Term enthalten sei. Mit dieser Redewendung legt sie offen, dass sie die Terme als Beschreibung einer Beziehung deutet. Diese eingeschränkte Sicht auf die Terme verunmöglicht eine korrekte Addition der Terme.

Beispiel Schreibweisen

Die Hälfte von x → x : 2 = ½ x = 0.5 x

Die verschiedenen Schreibweisen erkennen die Schülerinnen und Schüler zum Teil nicht als gleichwertig.

Die im Text beschriebene Relation die Hälfte von x... wird oft in eine Division übersetzt. Die Schülerinnen und Schüler schreiben x : 2. Dieser Term wird hauptsächlich relational betrachtet. Es ist eine Beschreibung eines Rechenweges. Die beiden Terme ½ x oder 0.5x werden eher als Platzhalter für Zahlen akzeptiert.

Das Doppelte von x → x mal 2 → x2 = 2x

Das Doppelte von x kann mit *x mal 2* übersetzt werden. In einer Gruppe wird der Term als *x2* aufgeschrieben.Diese Darstellung x2 wird als eine Art Beschreibung des Rechenweges gedeutet. Die Schülerinnen addieren den Term erst, nachdem sie ihn die Form 2x umformuliert haben.

Beispiele zum Vorgehen

Operationaler Blick

Der Text wird nach Schlüsselwörtern durchsucht (gescannt). Die Bedeutung des Textes wird nicht erfasst. Dabei steht eine operationale Sichtweise im Vordergrund. Die Schülerinnen und Schüler handeln nach einem bestimmten Verfahren.

Relationaler Blick

Terme, die sich auf einen Sachkontext stützen, sozusagen aus ihm hervorgegangen sind, sind mit einem relationalen Blick verbunden.

Welche Unsicherheiten und Schwierigkeiten können in den Lösungsprozessen beobachtet werden, die auf einen fehlenden Wechsel zwischen den beiden Denkweisen zurückzuführen sind?

- Unzureichende Interpretationen des Sachkontextes zeigen auf, dass mathematische Objekte nur unter einer der beiden Sichtweisen betrachtet werden. Beispielsweise tritt dies auf, wenn die Schülerinnen und Schüler im Text nur die Schlüsselwörter erfassen und diese schrittweise übersetzen (operationale Sichtweise) oder ausgehend von nur einem Zahlenbeispiel die Terme bilden. Ein Zahlenbeispiel alleine genügt nicht, um die im Text beschriebenen Relationen eindeutig zu erfassen. Somit werden, gestützt auf das eine Zahlenbeispiel, Terme erstellt, die nicht mit dem gegebenen Text übereinstimmen. In beiden Fällen gelingt es den Schülerinnen und Schüler nicht auf Anhieb, die vorliegenden Terme zu addieren.

- Das Sachwissen kann nicht angewendet werden. Die Schülergruppe des ersten Beispiels (Abbildung 54) kann Terme erstellen und mit ihnen operieren. Sie kennt die Äquivalenzumformungen und kann diese beim Lösen von Gleichungen anwenden. Es scheint, als ob die Schülerin und der Schüler das nötige Wissen und Können aufgebaut haben, um die vorliegenden Aufgaben zu lösen. Dennoch bleiben sie im Lösungsprozess stecken. Ihnen ist die Bedeutung der Gleichung nicht bewusst und sie erkennen keinen Sinnzusammenhang zwischen Term und Gleichung. Die Deutung des Summenterms, der für die Gesamtzahl der Personen steht, können sie nicht mit der Gesamtzahl der Personen, die gegeben ist, verbinden. Somit ist die Gleichung als Hilfsmittel zum Bestimmen von Lösungen nicht verfügbar. Dazu wäre die Einsicht gefordert, dass ein Term sowohl für eine Anzahl steht (operational) wie auch alle Hausbewohner repräsentiert (relational). In Gruppen des 9. und 10. Schuljahres genügt oft ein Hinweis der Interviewenden, dass die Gleichung ein mögliches Hilfsmittel zum Bestimmen der Lösungen wäre. Mit diesem Hinweis stellen die Schülerinnen und Schüler Gleichung auf (relational), lösen sie dann ohne Schwierigkeiten (operational) und nennen die entsprechenden Lösungen (relational). Damit zeigen sie, dass sie über ein entsprechendes Wissen (Äquivalenzumformungen) verfügen.

- Terme werden nur einseitig betrachtet. In Beispiel 3 (Abbildung 50) sind die Schülerinnen und Schüler nicht in der Lage die vorliegenden Terme zu addieren, weil sie diese als Beschreibungen von Relationen deuten. Ihnen ist in diesem Moment nicht bewusst, dass ein Term auch ein Platzhalter für eine Zahl ist und dass mit ihm operiert werden kann. Die eingenommene Denkweise ist im dritten Beispiel gut sichtbar. Die Schülerin deckt einen Term ab und sagt, dass dieser schon im anderen enthalten sei und darum nicht addiert werden müsse. Sie stützt sich dabei auf die Überlegungen, die sie zur Erstellung der Terme eingesetzt hat. Für sie stehen die Terme als Übersetzung der vorgegebenen Relationen (relationale Sichtweise).
  Um ein entsprechendes Verständnis aufzubauen, muss zuerst geklärt werden, dass Terme auch für Zahlen stehen und was unter einer Addition von Termen zu verstehen ist. In dieser Arbeit wird bei verschiedenen Gruppen beobachtet, dass vorliegende Terme nicht addiert werden können. Der Wechsel hin zur operationalen Sichtweise, nämlich den Term auch als Platzhalter für eine Zahl zu deuten, wird nicht vollzogen.
  Diese Irritation lässt sich auch erklären. Solange jemand Terme beispielsweise als Beschreibungen von Rechenwegen betrachtet, macht es keinen Sinn, diese zu addieren. Beschreibungen oder Beziehungen sind keine Objekte, mit denen sich operieren lässt. Ohne ein Wissen, dass der Term auch für eine Zahl (gekapselt) steht, kann der Summenterm nicht erstellt werden. Dazu ist eine operationale Sichtweise gefordert. Um die Gleichung anschließend als Hilfsmittel zu

nutzen, muss wiederum die Perspektive gewechselt werden. Der Term muss in Beziehung mit der gegebenen Zahl gebracht werden, die vorgegebene Zahl ist gleich groß wie die Anzahl der Personen im Haus. Ohne zu verstehen, dass der Summenterm in diesem Fall auch die Zahl aller Hausbewohner wiedergibt (relational), kann dieser nicht zum Bilden einer Gleichung genutzt werden.

Welche Strategien und tragenden Ideen können beobachtet werden, die diesen Wechsel zwischen den beiden Denkweisen unterstützen?

Ein Übertragen in eine andere Darstellungsform oder ein Zurückgehen auf die untere Abstraktionsstufe helfen, beide Sichtweisen miteinander zu vernetzen.

Die Schülerinnen und Schüler setzen verschiedene Strategien ein, mit welchen die beiden Perspektiven verbunden werden.

- Mit Material arbeiten, um die beschriebenen Relationen zu klären (relational <-> operational)
  Die Situation wird relational erfasst. Die Plättchen stehen für mögliche Anzahlen, mit ihnen kann operiert werden. Die relational betrachteten Beziehungen werden dadurch in eine operationale Denkweise überführt. Umgekehrt können erstellte Terme wiederum mit Plättchen nachgelegt und überprüft werden.

- Sachverhalt zuerst mit der Frage ‚*Wer hat mehr?’* klären (relational -> operational)
  Qualitative Einschätzungen können als Zwischenschritt interpretiert werden, um von einer relationalen Sichtweise zu einer operationalen zu wechseln.

Die Frage *Wer hat mehr?* hilft die Richtung der Relation zu klären, ohne bereits konkrete Zahlenbeispiele zu generieren. Das scheint hilfreich, um relational gedeutete Terme in Zahlen übersetzen zu können.

- Mit Pfeilen die Richtung der Relation visualisieren (relational -> operational)
  Diese Strategie ist auch eine Annäherung an eine operationale Sichtweise. Die Richtung der Relation wird mit Pfeilen dargestellt (relational). Liegen die Pfeile dann vor, wird die Übersetzung in die operationale Denkweise erleichtert. (Unterstützung zum rezeptiven erstellt von Termen). Diese Umdeutung, die Visualisierungen nun in Operationen zu übersetzen, ist jedoch in einigen Fällen nicht auf die Schnelle gemacht. Die Pfeile selbst sind immer noch einseitig in einer relationalen Sichtweise eingebunden. Der Sichtwechsel, dass der Term damit auch als Platzhalter für eine Zahl gedeutet wird, ist damit noch nicht vollzogen. Die Visualisierung der Richtung der Relation ist jedoch ein sinnvoller Zwischenschritt um zu verstehen, wie sich mathematische Strukturen aus einem Sachkontext herauslösen lassen.

- Texte umformulieren, um die beschriebenen Relationen besser zu verstehen (relational <-> relational)
  Texte werden durch lautes Lesen und Hervorheben der Schlüsselwörter strukturiert. Dadurch gelingt es einigen Gruppen, die im Text beschriebenen Beziehungen zu erfassen und diese in Zahlenbeispiele zu übersetzen.
  Es gibt aber auch Gruppen, die allzu stark einem Handlungsmuster folgend die Schlüsselwörter in einen Term übersetzen. Diese sind dann stark in einer operationalen Sichtweise verhaftet. Dadurch rückt der relationale Blick, der zur Weiterverarbeitung gefordert wäre, in den Hintergrund und das Vorgehen ist nicht erfolgreich.

- Zahlen zum Konkretisieren des Sachverhaltes einsetzen (relational -> operational)
  Einige Gruppen erstellen in einem ersten Lösungsschritt mögliche Zahlenbeispiele und stellen diese geordnet in einer Tabelle dar. Obschon die Schülerinnen und Schüler sicher wirken und das Vorgehen klar scheint, schleichen sich bei einigen Gruppen Fehler ein. Diese Irritationen lösen Diskussionen aus. Nun zeigt sich, dass die Tabelle ein wichtiges Instrument ist, um vorliegende Terme zu diskutieren. Die tabellarische Darstellung ermöglicht eine Gesamtschau auf die beiden Sichtweisen. Einerseits liegen die Zahlen vor, mit welchen operiert wird, andererseits wird in der Tabelle die Struktur des Terms sichtbar, der wiederum Rückschlüsse auf die entsprechenden Relationen zulässt.

- Bezugsgröße wählen (relational <-> operational)
  Treten ungewohnte Terme auf, wählen einige Schülerinnen und Schüler die Bezugsgröße neu. Diese Strategie setzen sie sicher und selbstverständlich ein. Damit zeigen sie, dass sie Wesentliches zum Algebraisieren von Sachkontexten verstanden haben. Sie wissen, dass

die Bezugsgröße frei gewählt werden kann und dementsprechend auch unterschiedliche Terme zu derselben Situation möglich sind.

- Terme auswerten, um vorliegende Terme zu überprüfen (relational <-> operational)
  Mehrheitlich sind die Schülerinnen und Schüler gewohnt, bei Unsicherheiten die Terme zu überprüfen, indem Zahlen für die Variablen eingesetzt werden. Mit Zahlen kann operiert, in diesem Fall addiert, werden.

Gibt es Hinweise, dass die Wechsel zwischen beiden Perspektiven für das Algebraisieren einfacher Sachkontexte bedeutsam sind?

Lösungsprozesse werden durch fehlende Perspektivenwechsel gehemmt oder unterbrochen. Dies wurde bereits bei den einführenden Beispielen zur Problematik aufgezeigt (Seiten 219ff). Der erste Schritt beim Algebraisieren ist das Erfassen der Struktur des Sachkontextes. Dadurch werden Vernetzungen möglich, beispielsweise die Verankerung im eigenen Vorwissen und Erfahrungen. (relationale Sichtweise). Dies kann durch einen handlungsorientierten Zugang gestützt werden. Beziehungen und Zusammenhänge können elaboriert werden, dies bedingt beide Denkweisen. Somit lässt sich die Bedeutung eines handlungsorientierten Zugangs im Hinblick auf die geforderten Perspektivenwechsel zwischen relational und operational begründen.

Mathematisierungsprozesse können unter dem Fokus dieser beiden Sichtweisen betrachtet werden. Algebraische Terme werden aus Realmodellen entwickelt.
Der Prozess vom Realmodell zum mathematischen Modell ist in vielen Fällen nicht bloß ein Lösungsschritt. Liegen die Terme vor, also ist der Wechsel

vom Realmodell zum mathematischen Modell vollzogen, setzt bei der Weiterverarbeitung dieser Terme eine Verifizierung ein, bei welcher mehrmals wieder auf das Realmodell zurückgegriffen wird. Dabei sind beide Denkweisen bedeutsam. Die Loslösung vom Real – zum mathematischen Modell selbst ist ein Prozess, der durch diese beiden Sichtweisen gestützt wird und immer auch mit dem Umkehrprozess, der Vergegenständlichung, verbunden ist.

Eine breite Palette an erfassten Unsicherheiten und Strategien bestätigen die Bedeutsamkeit der beiden Denk- oder Sichtweisen. Insbesondere die Schwierigkeit Terme zu addieren, macht hellhörig. Es scheint, dass einige Schülerinnen und Schüler das nötige Wissen aufgebaut haben, aber dennoch beim Algebraisieren von Sachkontexten erfolglos bleiben. Sie zeigen in ihren Lösungsprozessen, dass sie Terme auswerten und Relationen in Terme übersetzen können. Dies sind wichtige Grundlagen, um Sachkontexte zu algebraisieren. Dieses Können alleine genügt jedoch nicht. Zusätzlich braucht es ein Bewusstmachen, dass Terme unterschiedlich gedeutet werden müssen, einmal als Beschreibung einer Relation, einmal als Platzhalter für eine Zahl.

Lassen sich Umsetzungsideen und didaktische Hinweise für den Unterricht ableiten?

Die Vielfalt der beobachteten Unsicherheiten und Strategien bestätigt, dass sich das Aufgabenset eignet, um ein explorierendes Vorgehen zu beobachten. Grundsätzlich erarbeiten die Schülerinnen und Schüler, auch solche des unteren Leistungsniveaus, die Lösungen zu großen Teilen sehr selbstständig. Sie können sich den Kontext vorstellen (Sinnzusammenhang, S. 27ff). Sie setzen verschiedene Strategien ein und nutzen ihr Vorwissen, um den Sachverhalt zu durchdringen und zu überprüfen.

Lernfelder dieser Art heben sich von eingekleideten Textaufgaben (S. 51 ff) ab. Sie beziehen sich auf dasselbe Realmodell. Der geschaffene Sachkontext kann mit dem Vorwissen der Lernenden verbunden werden. Solche Aufgabenkonzepte sind zeitaufwändig. Ein längeres Verweilen in demselben Sachkontext lohnt sich jedoch, weil s die Schülerinnen und Schüler auf diese Weise sich gründlich mit der Sache beschäftigen können.

Erfahrungen aus den unmittelbar vorher gelösten Aufgaben können auf diese Weise ausgebaut und genutzt werden. Im Unterricht müssen entsprechende Lerngelegenheiten angeboten werden.

Hinweise für die Praxis werden im folgenden Abschnitt zusammengefasst.

2 Konsequenzen für die Praxis

Die Analyse der Lösungsschritte ermöglicht einen Transfer zu konkreten Vorschlägen für die Praxis, die helfen können, den Zugang zur Algebra zu erleichtern.

2.1 Konkrete Hinweise für den Unterricht

Hinweis 1: Lernumgebungen anstelle einer Vielzahl von Einzelaufgaben anbieten

Viele beobachtete Unsicherheiten können die Schülerinnen und Schüler selbstständig klären. Dazu brauchen sie jedoch Zeit. So ist es hilfreich, wenn sie bei einem Sachkontext verweilen, um sich damit vertieft auseinandersetzen zu können. Darum lohnt es sich, Lernumgebungen mit Aufgaben anzubieten, die gebündelt im gleichen Sachkontext eingebettet sind. Ein längeres Verweilen in einem Sachkontext unterstützt ein gründliches Durchdringen der mathematischen Strukturen und trägt bei, beide Sichtweisen in beweglichem Wechsel verfügbar zu haben.

Hinweis 2: Handlungsorientierte Erkundungen ermöglichen

Um den Lernenden selbständiges Lernen zu ermöglichen, sind handlungsorientierte Settings hilfreich. Schülerinnen und Schüler können in Aufgaben mit explorativem Zugang Strukturen selber erkunden. Die Arbeit mit Material bietet eine Selbstkontrolle und unterstützt somit selbstgesteuertes Lernen.

Hinweis 3: Hilfestellungen für Lernende dürfen nicht zu Rezepten verkommen

Werden Hilfestellungen angeboten, müssen sie so offen und beweglich eingesetzt werden, dass diese nicht den Anschein geben, dass das Algebraisieren von Sachkontexten nach einer bestimmten Anleitung erfolgen kann.

2.1.1 *Hinweise für Lehrpersonen ...*

Alleine schon ein Bewusstmachen, dass algebraische Objekte (Variable, Term und Gleichung) beide Sichtweisen in sich tragen und dass diese Tatsache zu einer Lernschwierigkeit beim Aufbau eines algebraischen Verständnisses führen kann, müsste im Unterricht bewusst gemacht werden. Es ist hilfreich zu wissen, dass bestimmte Terme oder Schreibweisen stark die eine Sichtweise oder andere Sichtweise betonen. Beispielsweise in Lehrerweiterbildungsangeboten könnte das Phänomen mithilfe von Videovignetten vorgestellt werden (J. Roth, 2015).

Stolpern Schülerinnen und Schüler beispielsweise immer wieder beim Addieren der Terme über Klammerausdrücke, gibt es durchaus Sinn, diese auch bis zu einer gewünschten Geläufigkeit zu trainieren. Diese Fähigkeit gehört zum Aufbau eines ausgebildeten algebraischen Verständnisses. Automatisierendes, vom Text losgelöstes Erstellen von Zahlenbeispielen oder Übungen zu Termumformungen sind von einer operationalen Denkweise geprägt. Neben diesem Training zur Geläufigkeit des Umformens greift Algebraisieren von Sachkontexten auf vernetzendes Denken zurück, insbesondere auch auf einen beweglichen Perspektivenwechsel zwischen den beiden Sicht- oder Denkweisen. Um den Wechsel von einer relationalen zur einer operationalen Sichtweise anzustoßen, müsste als Ausgangslage ein Term vorliegen, der relational betrachtet wird, das heißt, dass er mit einem Sachkontext verbunden ist. Nur so kann er relational gedeutet werden. Mit geeigneten Fragstellungen müsste anschließend ein Wechsel hin zur operationalen Sichtweise eingefordert werden.
Beispielsweise scheint ein Übersetzen der Relationen in Zahlenbeispiele hilfreich zu sein. Jedes Hantieren greift auf eine operationale Sichtweise zurück. Damit lässt sich die Forderung nach handlungsorientierten Zugängen, so wie sie in der Didaktik vielfach gestellt wird, bestätigen. Die Gelegenheit Zusammenhänge handelnd zu erkunden, hilft, die beiden Sichtweisen zu vernetzen.

Ein zu langes Verharren in der einen Denkweise kann, so lassen es Beobachtungen vermuten, einen Wechsel der Denkweise hemmen(siehe Luchins, Seite 44). Redewendungen oder Formate können zusätzlich eine der beiden Sichtweisen so stark betonen, dass dadurch ebenfalls ein Wechsel erschwert werden kann.

Zusammenfassend sind folgende Punkte zu beachten:

- Die Lehrperson muss sich beider Denkweisen bewusst sein.
- Sie muss wissen, dass es Redewendungen und Formate gibt, die eine der beiden Sichtweisen betonen. Bei der Verwendung dieser Redewendungen ist dafür zu sorgen, dass die andere Sichtweise nicht ‚verloren' geht.
- Aufgabenformate sollen gezielt, im Hinblick auf die Vernetzung der beiden Sichtweisen eingesetzt werden.

2.1.3 Hinweise für die Lehrmittelentwicklung

Das Algebraisieren von Sachkontexten kann nicht punktuell anhand einer Lernumgebung abgearbeitet werden. Der Umgang mit der algebraischen Sprache muss permanent in verschiedenen Sach- und innermathematischen Themen umgesetzt werden. Grundsätzlich müssen Lernumgebungen so ausgerichtet sein, dass beide Sicht- und Denkweisen und der Wechsel zwischen ihnen angeregt werden.
Werden Aufträge so konzipiert, dass nur eine relationale Sichtweise gefordert ist, beispielsweise indem Zusammenhänge nur abstrakt untersucht werden, kann dies für einige Lernende schwierig sein. Für sie kann ein handelnder oder operativer Zugang unterstützend wirken, um den Sachverhalt zu verstehen.

Das Algebraisieren von Sachkontexten ist ein anspruchsvoller Lerninhalt, der gezielt geübt werden kann.

Zusammenfassend gelten die Punkte:

- In Aufgabenstellungen sollen bewusst beide Sichtweisen eingefordert werden.
- Dem Algebraisieren von Sach- und innermathematischen Kontexten ist genügend Raum zu geben.
- Handlungsorientierung, Konkretisierungen mit Zahlenbeispielen, Wertetabellen müssen als Strukturierungshilfe in Aufgabenstellungen eingebunden werden.
- Die Strategie der Substitution als Zwischenschritt zur Einkapselung mathematischer Objekte könnte in Lernumgebungen aufgenommen werden.

2.2 Beispiel aus dem Lehrmittel mathbuch (Affolter et al., 2014)

Während der Arbeitsphase dieser Studie war die Autorin bei der Weiterentwicklung des Lehrmittels mathbuch beteiligt. Diese Überarbeitung fokussiert u.a. eine Stärkung der Vernetzung Alltag – Algebra. Die Lernumgebung zur Einführung der Äquivalenzumformungen wird in der Überarbeitung mit Aufgaben zum Algebraisieren von Sachkontexten ergänzt. Dieses Aufgabenset wird hier vorgestellt, um eine Umsetzung der Ergebnisse dieser Studie in die Praxis exemplarisch zu illustrieren.

Die folgenden Aufgaben stammen aus dem mathbuch 2, Lernumgebung 10 (Affolter et al., 2014). Sie wurden parallel zur Studie entwickelt und sind deshalb ähnlich den Aufgaben der Studie.

In Aufgabe 8 (Abbildung 58) wird ein Sachverhalt allgemein beschrieben. Diese allgemein beschriebenen Relationen sind ein Übungsfeld, um sich mit Termen auseinanderzusetzen. Einerseits können sie mit Zahlenbeispielen quantifiziert, andererseits können sie mit Termen beschrieben werden.

Die Lernumgebung beginnt mit einer einleitenden Darstellung, die verschiedene Strategien aufzeigt, wie der Sachverhalt erfasst werden kann. Als Ausgangslage liegt ein Text vor, in welchem Beziehungen beschrieben werden. Daneben wird mit einer Hausdarstellung angedeutet, dass Zahlenbeispiele gelegt oder gezeichnet werden können. Damit wird ein handlungsorientierter Zugang angeboten. Mit Pfeilen wird die Richtung der Relation visualisiert. Die Zahlenbeispiele in der Wertetabelle sind Quantifizierungen (operational) und ermöglichen gleichzeitig den Blick auf Strukturen (relational). In der letzten Spalte der Darstellung steht der algebraische Term, der entweder aus der Struktur der Wertetabelle oder direkt aus einer Übersetzung des Textes hervorgehen kann. Hier wird bereits eine Möglichkeit geboten, um im Klassenverband die beiden Sichtweisen zu thematisieren[4].

Die Teilaufgaben A - F (Abbildung 58) bieten ein Übungsfeld diese Übersetzungen durchzuführen und Zahlenbeispiele und entsprechende Terme zu entwickeln.

[4] Zur Nutzung des mathbuchs: Die Aufgaben der Lernumgebungen im Schulbuch dienen als Diskussionsgrundlagen, um Sachverhalte zu erkunden. Diese Aufgaben sind für den Klassenverband oder für Lerngruppen bestimmt, ein reger Austausch beim Bearbeiten dieser Aufgaben wird vorausgesetzt. Als Ergänzung zum Schulbuch gibt es ein Arbeitsheft, in welchem sich Aufgaben zum eigenständigen Erarbeiten finden.

Situationen in Terme und Gleichungen übertragen

Anzahl Personen in verschiedenen Häusern vergleichen

8 Beispiel:

Wort

In Haus 2 wohnen halb so viele Personen wie in Haus 1.
In Haus 3 wohnen zehn Personen mehr als in Haus 2.

Bild

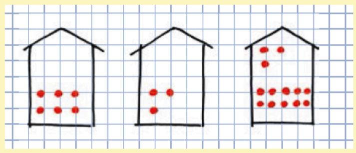


Tabelle / **Terme**

						Terme
Haus 1	6	10	20	32		2x
					· 2	
Haus 2	3	5	10	16		x
					+ 10	
Haus 3	13	15	20	26		x + 10
Summe	22	30	50	74		4x + 10

Gehe wie im Beispiel vor. Gib an, wie viele Personen jeweils in den verschiedenen Häusern der Situationen A bis E wohnen könnten.

A In Haus 2 wohnen zwei Personen weniger als in Haus 1.
B In Haus 2 wohnen doppelt so viele Personen wie in Haus 1.
C In Haus 2 wohnen halb so viele Personen wie in Haus 3.
In Haus 1 wohnen zwei Personen weniger als in Haus 3.
D In Haus 3 wohnen doppelt so viele Personen wie in Haus 1.
In Haus 1 wohnen zwei Personen weniger als in Haus 2.
E In Haus 1 wohnen zwei Personen mehr als in Haus 2.
In Haus 3 wohnen zwei Personen mehr als in Haus 1.
F Vergleicht eure Ergebnisse.

Abbildung 58 mathbuch 2, Lernumgebung 10, 'verpackte Zahlen', Aufgabe 8

Schülerinnen und Schüler können bei Bedarf die Aufgabe nachspielen und sich mit verbundenen und unverbundenen Aufgabentypen (Seite 87) auseinandersetzen. Diese Teilaufgaben sind wichtig, um die im Klassenverband diskutierten Strategien eigenständig auszuprobieren und den eigenen Bedürfnissen entsprechend anzupassen. Auf diese Weise wird eine Anschlussmöglichkeit an das Vorwissen und an einen Sinnzusammenhang gewährt.
In Aufgabe 9 (Abbildung 59), die im gleichen Sachkontext eingebettet ist, wird nun die Sichtweise geändert. Die formal vorgegebenen Terme, die eher operational betrachtet werden, müssen nun relational gedeutet und den Texten aus Aufgabe 8 zugeordnet werden. Somit wird wiederum ein Wechsel zwischen den beiden Sichtweisen angeregt.

Terme einer Situation zuordnen

9 A Die Termgruppen 1 bis 5 passen jeweils zu einer der Situationen A bis E aus Aufgabe 8. Ordne sie zu.

B Vergleiche die Ergebnisse mit Aufgabe 8.

Termgruppe 1	Termgruppe 2	Termgruppe 3	Termgruppe 4	Termgruppe 5
Haus 1 x	Haus 1 x	Haus 1 x	Haus 1 $x+2$	Haus 1 $x-2$
Haus 2 $2x$	Haus 2 $x+2$	Haus 2 $x-2$	Haus 2 x	Haus 2 $\frac{1}{2}x$
	Haus 3 $2x$		Haus 3 $x+4$	Haus 3 x

Abbildung 59 mathbuch 2, Lernumgebung 'Verpackte Zahlen', Aufgabe 8

Die Schwierigkeit, dass Übersetzungen von Relationen zu unterschiedlichen Termen führen können, wird bereits in dieser Einstiegsphase aufgenommen (Aufgabe 10, Abbildung 60). Entsprechend der Wahl der Bezugsgröße entstehen unterschiedliche Terme. Diese verschiedenen Termgruppen, die dieselbe Situation beschreiben, müssen geklärt werden. Dabei steht die relationale Sichtweise im Vordergrund.

Implizit wird dabei auch das Addieren der Terme aufgenommen, bei welchen nun wieder ein Wechsel von der relationalen zur operationalen Perspektive gefordert ist. Die gesetzten Summen der Termgruppen sollen ein Anlass sein, eine Diskussion zum Additionsverfahren von Termen anzuregen. Im Gespräch müsste die Einsicht wachsen, dass Terme zwei Funktionen haben, einerseits als Objekt zum Operieren, andererseits als ein Hilfsmittel, um Relationen zu beschreiben.

Unterschiedliche Lösungsansätze

10 Die gleiche Situation lässt sich mit unterschiedlichen Termen beschreiben.
x kann für die Anzahl Personen in Haus 1, Haus 2 oder Haus 3 stehen.

Termgruppe 1		Termgruppe 2		Termgruppe 3	
Haus 1	**x**	Haus 1	$x+6$	Haus 1	$\frac{1}{2}x$
Haus 2	$x-6$	**Haus 2**	**x**	Haus 2	$\frac{1}{2}x-6$
Haus 3	$2\cdot x$	Haus 3	$2(x+6)$	**Haus 3**	**x**
Summe	**$4x-6$**	**Summe**	**$4x+18$**	**Summe**	**$2x-6$**

A Schreibe einen Text zu einer Situation, die zu allen Termgruppen 1 bis 3 passt.
B Zeige anhand der Zahlbeispiele, dass die Termgruppen 1 bis 3 zur gleichen Lösung führen.
C Wie viele Personen wohnen bei insgesamt 30 Personen jeweils in einem Haus?
D Nimm an, dass in Haus 2 keine Personen wohnen. Wie viele sind es demzufolge in Haus 1 und wie viele in Haus 3?

Abbildung 60 mathbuch 2, Lernumgebung 'Verpackte Zahlen', Aufgabe 10

In einem weiteren Schritt (Aufgaben C und D, Abbildung 60) wird die Strategie der Gleichung thematisiert. Eine Gesamtanzahl der Bewohner wird vorgegeben. Die Schülerinnen und Schüler sollen untersuchen, mit welchen Strategien die entsprechenden Lösungen leicht zu finden sind. Damit wird die Verbindung zu den ersten beiden Seiten dieser Lernumgebung hergestellt. Dort werden die Äquivalenzumformungen eingeführt.

Diese Ausführungen zur Lernumgebung sollen exemplarisch aufzeigen, wie Lernanlässe zum Algebraisieren von Sachkontexten aussehen könnten. Die drei zusammenhängenden Aufgaben bieten dazu einen reichhaltigen, ganzheitlichen Rahmen.
Die Aufgabe liegt im Bereich des Mathematisierens. Die verschiedenen Auseinandersetzungen fordern immer wieder die Wechsel zwischen den beiden Denkweisen ein, mal von der relationalen zur operationalen, mal umgekehrt.

Die verschiedenen Sichtweisen und der Wechsel zwischen ihnen lassen sich im *Modell der beiden Sichtweisen in einem Algebraisierungsprozess* darstellen.

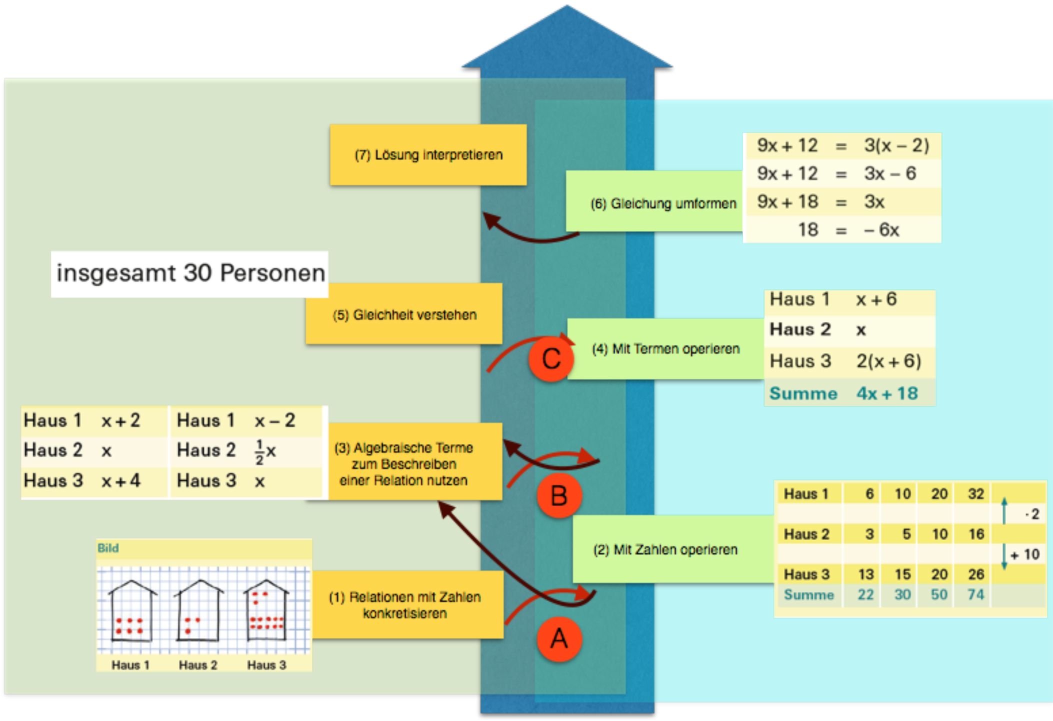


Abbildung 61 Verknüpfung Modell Praxisbeispiel

3 Fazit und Ausblick

Wer auf ein ausgebautes algebraisches Verständnis zurückgreifen kann, ist sich beim Lösen algebraischer Problemstellungen kaum bewusst, dass dabei ein reger Wechsel zwischen den relationaler und operationaler Sichtweise stattfindet.

Die beiden Denk- oder Sichtweisen wiederspiegeln die duale Charakteristik der Mathematik. Namhafte Mathematikdidaktiker und Didaktikerinnen (Kaput, 1999; Malle & Wittmann, 1993; Prediger, 2009; Rojano, 1996; Sfard, 1991; Tall et al., 1999) betonen die Bedeutsamkeit der beiden Denkweisen.

In dieser Arbeit wird diese Bedeutsamkeit in der Konkretisierung einzelner Lösungsschritte aufgezeigt werden. Das Aufgabenset ist so konzipiert, dass wesentliche Bereiche des Algebraisierens von Sachkontexten entflochten erfasst werden. Die detaillierte Erfassung dieser beiden Sichtweisen in Lösungsprozessen und die Verortung der entsprechenden Denkweisen und Wechsel hebt diese Arbeit von andern Studien zu diesem Thema ab. Die Lösungsprozesse werden nicht in ihrer Gesamtheit erfasst, sondern einzelne Lösungsschritte werden gezielt auf diese beiden Sichtweisen gerichtet interpretiert.

Dazu liegt ein Modell vor, mit welchem Unsicherheiten und Strategien zu den Bereichen Terme gewinnen arithmetisch, Terme gewinnen algebraisch und den Umgang mit Gleichungen strukturiert im Hinblick auf die beiden Denk – oder Sichtweisen und dem Wechsel zwischen ihnen
erfasst werden. Diese Strukturierung macht es möglich, die Bedeutsamkeit dieser Sichtweisen beim Algebraisieren von Sachkontexten aufzuzeigen und im Detail besser zu verstehen.

Hier wird das Wesentliche nochmals zusammengefasst.

Beide Sichtweisen und ein beweglicher Wechsel zwischen ihnen sind eine wichtige Grundlage, um Sachkontexte sicher und verstehensorientiert zu algebraisieren.

Oder anders gesagt: Einseitige Betrachtungen von Termen entpuppen sich als Hürden beim Algebraisieren von Sachkontexten. Wird beispielsweise der Aufgabentext nicht in seiner Bedeutung, sondern nur mithilfe einzelner Schlüsselwörter erfasst, so ist dieses Vorgehen von einer operationalen, abarbeitenden Sichtweise geprägt. Dieses Vorgehen kann zu falschen Übersetzungen der Relationen in Terme führen.
Umgekehrt steht bei der Deutung der Terme stark die relationale Sichtweise im Vordergrund, also stehen die Terme als Beschreibungen von Beziehungen oder Zusammenhängen, so treten Schwierigkeiten beim Addieren der Terme auf. Viele Schülergruppen zögern oder bleiben in ihrem Lösungsprozess stecken, wenn es darum geht, mit diesen Termen zu operieren. Nun muss zuerst ein Wechsel der Sichtweise erfolgen, um diese Terme als Platzhalter für Zahlen wahrnehmen und nutzen zu können. In gewisser Weise muss sich der Blick von dieser relationalen Sicht lösen, um den Blick auf das Operieren zu öffnen. Sfard (1991) spricht in diesem Zusammenhang vom Einkapseln der Terme.

Durch die getrennte Erfassung der beiden Bereiche aithmetisch und algebraisch werden Vergleiche zwischen dem Umgang mit Zahlen und dem Umgang mit algebraischen Objekten möglich. Im arithmetischen Bereich treten wenige Unsicherheiten beim Übersetzen der allgemein beschriebenen Relationen in Zahlenbeispielen auf. Deutlich mehr Unsicherheiten treten im Umgang mit algebraischen Objekten auf, obschon auf dieselben Denkhandlungen zurückgegriffen wird.
Die erfassten Unsicherheiten lassen die Deutung zu, dass der Umgang mit algebraischen Objekten ungewohnt ist und zunächst den Wechsel zwischen den beiden Sichtweisen verhindert.
Die Übersetzungen im arithmetischen Bereich sind eine Art Zwischenschritt. Im Umgang mit arithmetischen Termen kann bereits die Auseinandersetzung mit den beiden Denkweisen diskutiert werden. Das Erfassen der Struktur des Textes ist identisch mit dem Erstellen der algebraischen Terme, zuerst muss

eine Bezugsgrösse gewählt werden um anschließend eine Annahme zu treffen, sei das eine Zahl oder eine Variable.
Somit lohnt es sich, das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler im Bereich der Arithmetik zu nutzen und die Herausforderung allgemein beschriebene Relationen mathematisch zu beschreiben, zuerst im Umfeld der Zahlen zu vollziehen. Diese Auseinandersetzungen im arithmetischen Bereich könnten sogar vor dem 7. Schuljahr erfolgen und damit den Einstieg im 7. Schuljahr in die Algebra erleichtern. Dies geht einher mit Forderungen im Bereich Early Algebra (Jacobs et al., 2007).

Der Umgang mit dem Perspektivenwechsel zwischen relational und operational ist darum so bedeutsam, weil das Algebraisieren von Sachkontexten eine Schlüsselstelle ist, um Algebra als Werkzeug in außermathematischen Problemstellungen nutzen zu können (siehe Heymann1996). Algebra muss als Ausdruckmittel verfügbar sein, damit sie in Anwendungsbereichen wie etwa in der Technik oder im Rechnungswesen als hilfreiches Instrument eingesetzt werden kann (Vollrath & Weigand, 1994, p. 14).

Zur Zeit ist diese Forderung noch nicht in gewünschtem Maß erfüllt. Oft herrscht in der Praxis eine Fokussierung auf abarbeitendes Hantieren mit algebraischen Objekten vor In einigen Schulen wenden die Lernenden im Algebraunterricht vorwiegend gegebene Regeln an. Dabei steht die operationale Sichtweise im Vordergrund.
Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktiker postulieren, das relationale Denken zu fördern und meinen damit Auseinandersetzungen, die vorwiegend vernetzendes und interpretierendes Denken einfordern, um damit die relationale Sichtweise zu stärken. Insbesondere stellen Jacobs et al. (Jacobs et al., 2007, p. 260) das relationale Denken als Schlüsselpunkt in der Unterstützung der Schülerinnen und Schüler beim Aufbau der Algebra dar.

Dies kann durch die vorliegenden Ergebnisse bestätigt und vor allem an konkreten Denkschritten verifiziert werden. Verschiedene Aufgaben zum selben Sachkontext, dies ist im Setting so angelegt, unterstützen eine gründliche Auseinandersetzung mit der Sachsituation, da die Schülerinnen und Schüler während des Lösungsprozesses immer wieder auf die Erfahrungen der vorangehenden Aufgaben zurückgreifen können. Dadurch müssen sie sich nicht bei jeder Aufgabe neu in die Sachsituationen hineindenken, sondern können den Fokus auf die Übersetzung in die algebraische Sprache richten, bei welchen der Perspektivenwechsel zwischen den beiden Denk – oder Sichtweisen geübt wird.
Algebra ist nur dann ein hilfreiches Werkzeug, wenn es auch zur Bearbeitung von Alltagsproblemen eingesetzt werden kann. Dazu braucht es Lerngelegenheiten, in welchen die Lernenden Algebra und Sachkontexte verbinden können. Möglichkeiten, den Sachverhalt explorativ zu untersuchen, sind dabei unterstützend. Auf diese Weise wird der Umgang mit den beiden Denk- oder Sichtweisen gestützt.

Bisherige Lehrkonzepte sind zu überdenken. Alle Schülerinnen und Schüler müssten in der Lage sein, Grundlagen algebraischer Konzepte zu verstehen und diese in einfachen Sachkontexten anzuwenden. Eine sorgfältige Hinführung zu algebraischen Objekten, mit dem Blick auf beide Sichtweisen, unterstützt den Sinnzusammenhang und kann somit beim Aufbau eines algebraischen Verständnisses, insbesondere auch für lernschwächere Schülerinnen und Schüler, eine Hilfe sein.
‚Algebra for all'.

Teil V Anhang elektronisch verfügbar

Ist unter der Adresse https://drive.switch.ch/index.php/s/P9WyDx2QQSkm3SJ verfügbar und enthält folgende Kapitel.

Literaturverzeichnis

Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., . . . Wieland, G. (2002). *mathbu. ch 7. Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I.* Bern, CH: Schulverlag blmv AG.

Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., . . . Wieland, G. (2014). *mathbuch 1 - 3: Mathematik, Lehrmittel Sekundarstufe 1*. Bern, CH: Berner Lehrmittel-und Medienverlag.

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden, DE: Vieweg.

Baalmann, W., Frerichs, V., Weitzel, H., Gropengießer, H., & Kattmann, U. (2004). Schülervorstellungen zu Prozessen der Anpassung–Ergebnisse einer Interviewstudie im Rahmen der Didaktischen Rekonstruktion. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 10*(1), 7-28.

Barzel, B. (2006). *Mathematikunterricht zwischen Konstruktion und Instruktion.* (Dissertation). Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik, Deutschland.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 115-136). Dordrecht, NL: Kluwer.

Berlin, T. (2010). *Algebra erwerben und besitzen. Eine binationale empirische Studie in der Jahrgangsstufe 5* (Dissertation). Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik, Deutschland.

Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (pp. 3-12). Hildesheim, DE: Franzbecker.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra*, K-12 (1988 yearbook) (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2011). Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar-und Sekundarstufe. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (pp. 127-130). Hildesheim, DE: Franzbecker.

Böttinger, C. (2006). Arithmetische Darstellungen - Punktmusterdarstellungen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (pp. 1-4). Hildesheim, DE: Franzbecker.

Bruder, R., Hefendehl-Hebecker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2013). *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin, DE: Springer.

Büchter, A., & Henn, H.-W. (2015). Schulmathematik und Realität–Verstehen durch Anwenden. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebecker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 19-49). Berlin, DE: Springer.

Cohors-Fresenborg, E. (2001). Mechanismen des Wirksamwerdens von Metakognition im Mathematikunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2001* (pp.145-148). Hildesheim, DE: Franzbecker.

Devlin, K. (1998). *Muster der Mathematik.* Heidelberg, DE: Spektrum.

Dewey, J. (1976). Das Kind und die Fachinhalte [The child and the curriculum] Übersetzung von C. Wittmann. *Zahlen, Muster und Strukturen*, 12 - 21.

Deutschschweizer Erziehungsdirektionen-Konferenz (D-EDK) (2015). Der Schweizer Lehrplan 21. Retrieved from http://www.lehrplan21.ch/ [24.11.2016].
Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 52*(33), 1-7.
Gallin, P., & Ruf, U. (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule*. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Seelze, DE: Kallmeyer.
Gerstenmaier, J., & Mandl, H. (2000). Konstruktivistische Ansätze in der Psychologie. *Forschungsbericht Nr. 213.* München, DE: Ludwig-Maximilians-Universität, Lehrstuhl für Empirische Pädagogik und Pädagogische Psychologie.
Gerster, H. S. R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht*. *Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. Pädagogische Hochschule Freiburg. Retrieved from https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/index/index/docId/16 [24.11.2016].
Gropengiesser, H. (2003). Lernen und Lehren: Thesen und Empfehlungen zu einem professionellen Verständnis. *Report, 3*, 29-39.
Hahn, S., & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung—Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*(3-4), 163-198.
Hefendehl-Hebeker, L. (2003). Didaktik der Mathematik als Wissenschaft - Aufgaben, Chancen, Profile. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 105*(1), 3-29.
Hefendehl-Hebeker, L. (2007). Algebraisches Denken was ist das? *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (pp. 148–151). Hildesheim, DE: Franzbecker.
Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern–Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis der Mathematik in der Schule, 48*(11), 1-7.
Hefendehl-Hebeker, L., & Rezat, S. (2015). Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 117-148). Heidelberg, DE: Springer.
Hefendehl-Hebeker, L., & Schwank, I. (2015). Arithmetik: Leitidee Zahl. I In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 77-115), Heidelberg, DE: Springer.
Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim, DE: Beltz.
Hollenstein, A. (2012). *Qualitative Datenanalyse: Skript und Anleitungen, Forschungsmethoden der Erziehungswissenschaft 2.* Vorlesung und Übung-FS und HS 2012. Universität Bern, Institut für Erziehungswissenschaft.
Hollenstein, A., & Eggenberg, F. (1998). *Mosima-Grundlagen: Materialien für offene Situationen im Mathematikunterricht.* Wien, AT: Haupt.
Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258-288.
Kaput, J. J. (1999). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 265-281.
Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of*

research on psychology of mathematics education: Past, present and future (pp. 11-49). Rotterdam, NL: Sense Publishers.
Krämer, S. (1988). *Symbolische Maschinen: die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriss.* Darmstadt, DE: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
Leiss, D., Blum, W., Messner, R., Müller, M., Schukajlow, S., & Pekrun, R. (2008). Modellieren lehren und lernen in der Realschule. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 370-373). Münster, DE: WTM.
Nührenbörger, M. & Steinbring, H. (2008). Manipulatives as tools in teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (The international handbook of mathematics teacher education, Vol 2., pp. 157-182). Rotterdam, NL: Sense Publishers.
Leuders, T., & Büchter, A. (2009). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln-Lernen fördern-Leistung überprüfen.* Berlin, DE: Cornelsen Scriptor.
Linchevski, A. S.-L. (1994). Between Arithmetik and Algebra: In the search of a missino link the case of equations and inequalities. *Seminario Mathematico, 52*(3), 279-307.
Linnemath. (2010). 008 Knack die Box 03 Deu (Video Youtube). Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=Gvw3AMyB-To [24.11.2016].
Malle, G., & Wittmann, E. C. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden, DE: Vieweg.
Mayring, P. (2000). „Qualitative Inhaltsanalyse “Forum Qualitative Sozialforschung 1 (2)/20. Retrieved from http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/1089/2383 [24.11.2016].
Molina, M., Castro, E., & Ambrose, R. (2005). Enriching arithmetic learning by promoting relational thinking. *The international Journal of Learning, 12*(5), 265-270.
Moses, R. P., & Cobb Jr, C. (2001). Organizing algebra: The need to voice a demand. *Social Policy, 31*(4), 4-12.
Müller, G. N., Steinbring, H., & Wittmann, E. C. (1997). *10 Jahre “mathe 2000”. Bilanz und Perspektiven.* Leipzig, DE: Klett.
Müller, G. N., & Wittmann, E. C. (2005). *Mathematiklernen in jahrgangsbezogenen und jahrgangsgemischten Klassen mit dem Zahlenbuch*. Leipzig, DE: Klett.
Nydegger, A. (2011). Wer wohnt wo?. *Mathematik lehren 169*, 13 - 15.
Nydegger, A. (2012). *Vom Text zum Term: erfassen von Unsicherheiten und Klärungsversuchen beim Übersetzen vom Text zum Term.* Masterarbeit, Institut für Erziehungswissenschaft, Universität Bern.
Oldenburg, R. (2009). *Structure of algebraic competencies.* Paper presented at the Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Lyon, France.
Oldenburg, R. (2013). *Untersuchungen zur Kompetenzstruktur in der Algebra*. Vortrag vom 24.09.2013, Universität Koblenz. Retrieved from https://www.uni-koblenz-landau.de/de/landau/fb7/mathematik/media/dokumente/kolloquium/ss-2013-vortraege/oldenburg_algebra_landau.pdf [24.11.2016].
Oldenburg, R., & Henz, D. (2015). Neues zum Umkehrfehler in der elementaren Algebra. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (pp. 680-683). Hildesheim, DE: Franzbecker.
Prediger, S. (2003). Was bedeutet das eigentlich, wenn ich zwei Gleichungen addiere, um eine Variable weg zu kriegen? *PM–Praxis der Mathematik in der Schule, 45*(3), 132-135

Prediger, S. (2005). „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen."Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *Mathematica Didactica, 28*(2), 23-47.

Prediger, S. (2008). … nee, so darf man das Gleich doch nicht denken! *Lehramtsstudierende auf dem Weg zur fachdidaktisch fundierten diagnostischen Kompetenz*. In B. Barzel, T. Berlin, D. Bertalan & A. Fischer (Hrsg.), *Algebraisches Denken: Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker.* Berlin, DE: Franzbecker.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (pp. 213-234). Weinheim, DE: Beltz.

Prediger, S. (2011). Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen. *Der Mathematikunterricht, 57*(3), 5-14.

Prediger, S., & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung–Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In Vorstand der Gesellschaft für Fachdidaktik (GFD) (Hrsg), *Formate Fachdidaktischer Forschung. Empirische Projekte–historische Analysen–theoretische Grundlegungen.* Münster, DE: Waxmann.

Reusser, K. (1995). *Vom Text zur Situation zur Gleichung: Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben.* Habilitationsschrift, Universität Bern.

Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 55-62). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers.

Ross, J. (2015). Fachdidaktische Rückmeldung zu ZP10 im Fach Mathematik from Landesinstitut für Schulen NRW. Retrieved from http://www.schulentwicklung.nrw.de/cms/upload/Faecher_Seiten/mathematik/M15_Fachdidaktische_Rueckmeldung.pdf [24.11.2016].

Roth, G. (2004). Warum sind Lehren und Lernen so schwierig? *Zeitschrift für Pädagogik, 50*(4), 496-506.

Roth, J. (2015). Lehr-Lern-Labor Mathematik–Lernumgebungen (weiter-) entwickeln, Schülerverständnis diagnostizieren. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (pp. 748-751). Hildesheim, DE: Franzbecker.

Schill, A. (2014). Wege zu einem tragfähigen Variablenverständnis. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (pp. 1063-1066). Hildesheim, DE: Franzbecker.

Schneider, M. (2006). *Konzeptuelles und prozedurales Wissen als latente Variablen: ihre Interaktion beim Lernen mit Dezimalbrüchen*. Dissertation, Technische Universität Berlin.

Schörfling. (2009). Merkstoff Mathematik. Retrieved from http://www.youblisher.com/p/1277622-Merkstoff-M1-01-08/ [24.11.2016].

Schütte, S. (1994). *Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen*. Stuttgart, DE: Klett.

Schwank, I. (1996). *Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung*. Referat. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück. Retrieved from http://www.ikm.uni-osnabrueck.de/mitglieder/schwank/literatur/zdm96_a.pdf [24.11.2016].

Schwank, I., & Nowinska, E. (2007). Zur Vorbereitung algebraischen Denkens. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (pp. 1-4). Hildesheim, DE: Franzbecker.
Selter, C. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe: grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr. DUV Mathematik.* Wiesebaden, DE: Deutscher Universitäts-Verlag.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.
Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 191-228.
Siebel, F. (2005). *Elementare Algebra und ihre Fachsprache: eine allgemein-mathematische Untersuchung*. Mühltal, DE: Verlag Allgemeine Wissenschaft.
Specht, B. J. (2007). 36 kleine lila z. Zum Variablenverständnis von Schülerinnen und Schülern der vierten und achten Klasse. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (pp. 1-4). Hildesheim, DE: Franzbecker
Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process? *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 223-241.
Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). *Does the understanding of variable evolve through schooling?* Paper presented at the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) Conference, Haifa, Israel.
van Amerom, B. A. (2002). Reinvention of early algebra: developmental research on the transition from arithmetic to algebra. Utrecht, NL: CD Bèta Press.
Vollrath, H.-J., & Weigand, H.-G. (1994). *Algebra in der Sekundarstufe*. Mannheim, DE: BI-Verlag.
Wagenschein, M. (1965). *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken.* Stuttgart, DE: Klett.
Wagenschein, M. (1966). Zum Problem des genetischen Lehrens. *Zeitschrift für Pädagogik, 12*(4), 305-330.
Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *Mathematica Didactica, 5*(4), 185-211.
Wittmann, E. C. (1990). Wider die Flut der 'bunten Hunde'und der 'grauen Päckchen'. In E. Ch. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen, 1* (pp. 152-166). Stuttgart, DE: Klett.
Wittmann, E. C. (2013). Strukturgenetische didaktische Analysen. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (pp. 1094– 1097). Münster, DE: Waxmann.
Wittmann, E. C. (2014). Von allen guten Geistern verlassen. Gastbeitrag. *Gesellschaft für Bildung und Wissen e.V.* Retrieved from https://bildung-wissen.eu/fachbeitraege/von-allen-guten-geistern-verlassen.html [24.11.2016].
Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2008). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In: G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (pp. 42-65). Berlin, DE: Cornelsen Scriptor.
Zeller, M., & Barzel, B. (2011). Der Einsatz von CAS im Mathematikunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (pp. 1-5). Hildesheim, DE: Franzbecker.

Abbildungsverzeichnis