René Goertz (Autor)

# Zur Konvergenz diskreter Least-Squares Methoden auf äquidistanten Stützstellen


https://cuvillier.de/de/shop/publications/7750

# 1 Einleitung

Vor über 200 Jahren haben unter anderem Legendre und Gauß begonnen mit der Methode der kleinsten Quadrate zu arbeiten (vgl., z.B., [57]). Seitdem wird diese Methode in vielen Gebieten der Mathematik verwendet und ist heutzutage ein Standardwerkzeug der Angewandten Mathematik (vgl., z.B., [1], [6], [14], [35], [71]). In dieser Arbeit untersuchen wir Approximationseigenschaften dieser Methode.

Die Methode der kleinsten Quadrate ist folgendermaßen definiert (vgl., z.B., [35, S. 59], [34, S. 217], [58, S. 291]):
Seien $x_\mu \in [a,b]$ paarweise verschiedene Stützstellen für $\mu = 0, \ldots, N$. Weiter sei $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf $\{x_\mu\}_{\mu=0}^N$ positive Funktion, die sogenannte Gewichtsfunktion. Für ein $n \leq N$ sei $U$ ein Unterraum von $\mathcal{C}[a,b]$ mit $\dim U = n+1$ auf $\{x_\mu\}_{\mu=0}^N$. Der Operator der Methode der kleinsten Quadrate $LS_n^N : \mathcal{C}[a,b] \to U$ ist eindeutig definiert durch die Eigenschaft

$$\sum_{\mu=0}^{N} \left( LS_n^N[f](x_\mu) - f(x_\mu) \right)^2 \omega(x_\mu) = \min_{\varphi \in U} \sum_{\mu=0}^{N} \left( \varphi(x_\mu) - f(x_\mu) \right)^2 \omega(x_\mu). \tag{1.1}$$

In dieser Arbeit untersuchen wir den folgenden Fall:

- $U = \mathcal{P}_n$ ist der Raum der Polynome vom Höchstgrad $n$,
- $\{x_0, \ldots, x_N\}$ ist ein äquidistantes Gitter mit $N+1$ Stützstellen auf dem Intervall $[-1,1]$, d. h. $x_\mu = -1 + 2\mu/N$ für $\mu = 0, \ldots, N$.

Diese Situation tritt in der Praxis häufig auf: Polynome sind seit Jahrhunderten eine bewährte und intensiv untersuchte Funktionenklasse zur Approximation. Zudem lassen sie sich sehr effektiv auf Computern einsetzen, da für jede Berechnung nur die elementaren Operationen Addition und Multiplikation verwendet werden. Äquidistant erhobene Informationen liegen häufig vor, insbesondere bedingt durch Datenerhebung auf großen (oftmals mehrdimensionalen) äquidistanten Gittern.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei in dieser Arbeit das Intervall $[a,b]$ auf das Standardintervall $[-1,1]$ normiert.

Wir untersuchen folgendes **Problem**:

Für welche Funktionen $f \in K \subset \mathcal{C}[-1,1]$ und welches Verhältnis $N/n$ konvergiert die Folge $\left(LS_n^N[f]\right)$? Dabei betrachten wir sowohl punktweise als auch gleichmäßige Konvergenz.

Um dieses Problem zu untersuchen, drücken wir den Operator $LS_n^N$ in Abschnitt 4.3 durch eine abgebrochene Reihenentwicklung einer Funktion durch Hahn-Polynome

$Q_k(\cdot;\alpha,\beta,N)$ aus. Die Hahn-Polynome $Q_k \equiv Q_k(\cdot;\alpha,\beta,N)$ sind klassische diskrete orthogonale Polynome auf dem Intervall $I = [0, N]$ vom Grad $k$. Sie sind orthogonal auf $I$ bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle_\omega := \sum_{i=0}^{N} f(i)g(i)\omega(i), \tag{1.2}$$

wobei die Gewichtsfunktion $\omega$ gegeben ist durch

$$\omega(x) := \binom{\alpha + x}{x}\binom{\beta + N - x}{N - x}. \tag{1.3}$$

Sie sind durch

$$\langle Q_k(\cdot;\alpha,\beta,N), Q_k(\cdot;\alpha,\beta,N)\rangle_\omega = \frac{(-1)^k(k+\alpha+\beta+1)_{N+1}(\beta+1)_k k!}{(2k+\alpha+\beta+1)(\alpha+1)_k(-N)_k N!} \tag{1.4}$$

normiert (vgl., z.B., [47, S. 204]). Weitere Eigenschaften der Hahn-Polynome diskutieren wir in Abschnitt 3.2 über diskrete orthogonale Polynome.

Es ist bekannt, dass der Operator der Methode der kleinsten Quadrate $LS_n^N$ durch die Verwendung von Hahn-Polynomen folgendermaßen repräsentiert werden kann (vgl., z.B., [35, S. 62-63], [58, S. 270], [77, S. 218-232]):

$$LS_n^N[f] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left\langle f\left(\frac{2}{N}(\cdot) - 1\right), Q_k\right\rangle_\omega}{\langle Q_k, Q_k\rangle_\omega} Q_k\left(\frac{N}{2}(1+\cdot)\right), \tag{1.5}$$

mit $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$.

Wir merken zunächst in Kapitel 5 an, dass wir ohne eine zusätzliche Voraussetzung an die Funktionen $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$ keine gleichmäßige Konvergenz der Folge $\left(LS_n^N[f]\right)$ garantieren können.

Bezogen auf unser oben genanntes Problem ist es also vollkommen egal welches Verhältnis $N/n$ wir zwischen der Anzahl der Stützstellen $N+1$ und dem Polynomgrad $n$ wählen: Es gibt zu jedem Verhältnis $N/n$ eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$, sodass die Methode der kleinsten Quadrate $LS_n^N[f]$ nicht gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Um die gleichmäßige Konvergenz garantieren zu können, müssen wir also die Funktionenklasse verkleinern. Dies untersuchen wir in Kapitel 7.

Wir beschäftigen uns zuvor in Kapitel 6 mit der punktweisen Konvergenz und stellen dazu einen Vergleich zum kontinuierlichen Fall an. Hierbei untersuchen wir die Beziehung zwischen den Jacobi-Polynomen $P_k^{\alpha,\beta}$ und den Hahn-Polynomen $Q_k(\cdot;\alpha,\beta,N)$. Die Jacobi-Polynome behandeln wir genauer in Abschnitt 3.1 über stetige orthogonale Polynome. Die folgende Beziehung zwischen den Hahn-Polynomen $Q_k$ und den Jacobi-Polynomen $P_k \equiv P_k^{\alpha,\beta}$ ist bereits bekannt. Es gilt

$$\lim_{N\to\infty} (-1)^k \binom{k+\alpha}{k} Q_k\left(\frac{N}{2}(1+x);\alpha,\beta,N\right) = P_k^{\beta,\alpha}(x), \tag{1.6}$$

für jedes $x \in [-1,1]$ (vgl., z.B., [60, S. 45]). Hier, wie auch in der gesamten Arbeit, sind bei asymptotischen Aussagen die Parameter $\alpha$ und $\beta$ fest gewählt. Die Jacobi-Polynome $P_k^{\alpha,\beta}$ sind orthogonal auf dem Intervall $I = [-1,1]$ bezüglich des Skalarprodukts

$$(f,g)_\varrho := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\varrho(x)\mathrm{d}x, \tag{1.7}$$

wobei

$$\varrho(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \tag{1.8}$$

die Gewichtsfunktion ist. Sie sind normiert durch

$$\left(P_k^{\alpha,\beta}, P_k^{\alpha,\beta}\right)_\varrho = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)k!\Gamma(k+\alpha+\beta+1)} \tag{1.9}$$

(vgl., z.B., [47, S. 217]). Aufgrund von Gleichung (1.6) können die Hahn-Polynome als das diskrete Analogon der Jacobi-Polynome gesehen werden. Die Entwicklung einer Funktion $f$ in Jacobi-Polynomen ist gut untersucht und wird zur Approximation der Funktion $f$ häufig verwendet (vgl., z.B., [3], [8], [10], [17], [42], [50], [64]). Analog zur Darstellung der abgebrochenen Reihenentwicklung durch Hahn-Polynome in Gleichung (1.5) hat die Entwicklung in Jacobi-Polynomen die Form:

$$LS_n[f] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f,P_k)_\varrho}{(P_k,P_k)_\varrho} P_k. \tag{1.10}$$

Bezogen auf diese beiden Reihenentwicklungen beweisen wir in Kapitel 6 folgende, neue Abschätzung:

Sei $\alpha \geq 0$ und sei für $N \in \mathbb{N}$

$$n(\alpha,N) := \frac{1}{2} - \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{(2\alpha+1)(2\alpha+2N+1)}. \tag{1.11}$$

Für jedes $f \in \mathcal{C}\,[-1,1] \cap \mathcal{BV}\,[-1,1]$ gilt

$$\begin{aligned} &\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f,Q_k\rangle_\omega}{\langle Q_k,Q_k\rangle_\omega} Q_k\left(\frac{N}{2}(1+x)\right)\right| \\ \leq &\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(f,P_k)_\varrho}{(P_k,P_k)_\varrho} P_k(x)\right| + \mathcal{O}\left(\frac{n^{3+\alpha+\max\{1,\alpha\}}}{N}\right), \end{aligned} \tag{1.12}$$

mit $n \leq n(\alpha,N)$, für jedes $x \in [-1,1]$.

Hier, wie auch bei allen anderen in dieser Arbeit von uns erzielten Approximationsresultaten, betrachten wir den wichtigen symmetrischen (sogenannten ultrasphärischen) Fall $\alpha = \beta$. Aus (1.12) erhalten wir bezüglich der punktweisen Konvergenz folgendes Ergebnis:

Die Reihenentwicklung $\sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k Q_k$ einer Funktion $f$ durch Hahn-Polynome $Q_k$ konvergiert punktweise, wenn die Reihenentwicklung $\sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k P_k$ der Funktion $f$ durch Jacobi-Polynome $P_k$ punktweise konvergiert und wenn $n^{3+\alpha+\max\{1,\alpha\}}/N \to 0$ für $n, N \to \infty$ gilt. Als Beispiel für die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten sei hier das folgende Ergebnis für den wichtigen Spezialfall $\alpha = 0$ genannt:

Sei $f \in K := \{g \in \mathcal{C}^1[-1,1] : \; g' \in \mathcal{BV}[-1,1]\}$ und sei $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{N_n} = 0. \tag{1.13}$$

Dann konvergiert die Methode der kleinsten Quadrate $LS_n^{N_n}[f]$ mit $\alpha = 0$ für jedes $x \in [-1,1]$.

Es gibt viele weitere Anwendungen der obigen Abschätzung bei denen wir die punktweise Konvergenz erhalten. Denn für etliche Klassen von Funktionen wurde in den letzten Jahrzehnten die Konvergenz der zugehörigen Reihenentwicklungen in Jacobi-Polynomen gezeigt. Dies ist in Kapitel 6 ausführlich dargestellt.

In diesem engen Zusammenhang zwischen der Entwicklung einer Funktion nach Jacobi-Polynomen, vgl. (1.10), und der Entwicklung nach Hahn-Polynomen, vgl. (1.5), liegt die für mich grundlegende Motivation zu meinen hier vorgestellten, von Thomas Sonar und Tom Koornwinder angeregten, Untersuchungen: Die Entwicklung nach Jacobi-Polynomen ist seit Jahrzehnten eine bewährte Methode zur Modellierung insbesondere techno-mathematischer Fragestellungen, da hier viele physikalisch-technische Eigenschaften bei der Modellierung mit erfasst werden können. Allerdings müssen zur Ermittlung der Koeffizienten in (1.10) Integrale ausgewertet werden. Dies geschieht üblicherweise durch Diskretisierung mit Hilfe quadraturtheoretischer Methoden. Da hier also bei der Integralapproximation sowieso diskretisiert werden muss, ist die Frage naheliegend, ob man auf dem direkten Weg (also ohne Berechnung von Integralen) mit Hilfe diskreter Orthogonalpolynome gleichwertige Ergebnisse erzielen kann. In dieser Hinsicht untersuchen wir in Kapitel 7 die Methode der kleinsten Quadrate auf gleichmäßige Konvergenz. Das Hauptergebnis lautet:

Sei $\alpha > -\frac{1}{2}$ und sei für $N \in \mathbb{N}$

$$n(\alpha, N) := \frac{1}{2} - \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{(2\alpha+1)(2\alpha+2N+1)}. \tag{1.14}$$

Weiter sei

$$D_{n,N} := \frac{2^{n+1}\Gamma(n+2\alpha+2)\,\Gamma(n+\alpha+2)}{(n+1)!\,\Gamma(2n+2\alpha+3)\,\Gamma(\alpha+1)} \frac{N!}{N^{n+1}(N-n-1)!}. \tag{1.15}$$

Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{C}^{n+1}[-1,1]$ mit $n+1 \le n(\alpha, N)$

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, Q_k\rangle_\omega}{\langle Q_k, Q_k\rangle_\omega} Q_k\left(\frac{N}{2}(1+x)\right)\right| \le D_{n,N} \sup_{x\in[-1,1]} \left| f^{(n+1)}(x)\right|. \tag{1.16}$$

Diese Abschätzung ist unverbesserbar in dem Sinn, dass unter obigen Voraussetzungen die Konstante $D_{n,N}$ in Ungleichung (1.16) durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann.

Hiermit eröffnet sich nun eine direkte Vergleichsmöglichkeit zwischen dem diskreten Ansatz und der klassischen (stetigen) Vorgehensweise durch Betrachtung des Maximalfehlers („worst case“) in den Funktionenklassen

$$\mathcal{K}_{n+1} := \left\{ f \in \mathcal{C}^{n+1}[-1,1] : \sup_{x\in[-1,1]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq 1 \right\}. \tag{1.17}$$

Dieser Maximalfehler ist gemäß (1.16) der Wert $D_{n,N}$ und dieser ist überraschenderweise (zumindest für mich) für $n+1 \leq \frac{1}{2} - \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{(2\alpha+1)(2\alpha+2N+1)}$ für jedes so gewählte Verhältnis $N/n$ kleiner als im entsprechenden klassischen Fall, man vergleiche hierzu Abschnitt 7.3.

Als Beispiel für die vielfältigen weiteren Anwendungsmöglichkeiten des obigen Hauptergebnisses aus Kapitel 7 sei hier das folgende Ergebnis genannt:

Sei $\alpha \geq 0$, sei

$$f \in K := \left\{ g \in \mathcal{C}^{\infty}[-1,1] : \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} \left| g^{(n)}(x) \right| \frac{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{2^n n!} = 0 \right\} \tag{1.18}$$

und sei $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $N_n \geq 2n(n+1)$. Dann konvergiert die Methode der kleinsten Quadrate $LS_n^{N_n}[f]$ gleichmäßig auf dem Intervall $[-1,1]$.

Wir erhalten aus dem obigen Resultat weitere Abschätzungen, welche wir in Kapitel 7 darstellen und diskutieren. Anschließend vergleichen wir unsere Approximationsresultate mit entsprechenden Resultaten bekannter Approximationsmethoden, welche wir in Kapitel 4 ausführlich darstellen.

In Kapitel 8 präsentieren wir beispielhaft numerische Resultate zur Methode der kleinsten Quadrate. Zunächst vergleichen wir numerisch den diskreten mit dem kontinuierlichen Fall der Methode der kleinsten Quadrate. Außerdem vergleichen wir die Methode im diskreten Fall mit anderen in Kapitel 4 vorgestellten Approximationsmethoden. Weiterhin untersuchen wir, basierend auf unseren Ergebnissen in den vorherigen Kapiteln, numerisch für ausgewählte Testfunktionen bei welchem Verhältnis $N/n$ der Maximalfehler bei wachsenden $n$ und $N$ ansteigt.

Im letzten Kapitel 9 geben wir einen Ausblick auf eine mögliche Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate im diskreten Fall bei Spektralen-Differenzen-Verfahren zur Lösung hyperbolischer Erhaltungsgleichungen, die seit vielen Jahren in der Braunschweiger Forschungsgruppe von Thomas Sonar, Martina Wirz, Philipp Öffner und weiteren Mitgliedern höchst erfolgreich untersucht werden.

# 2 Vorbereitende Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir vorbereitende Grundlagen zusammen, welche wir für die weiteren Kapitel dieser Arbeit benötigen.
Wir beginnen mit der Einführung einiger wichtiger Funktionenklassen, wie beispielsweise die Klasse der Funktionen von beschränkter Variation.
Insbesondere beschäftigen wir uns mit den sogenannten „Speziellen Funktionen", deren Studium ein eigenes mathematisches Teilgebiet ist. Wir stellen insbesondere Eigenschaften der Gammafunktion und der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion bereit.
Im Anschluss behandeln wir in Hinsicht auf die Kapitel 4 und 5 die Theorie der linearen Operatoren.
Abschließend stellen wir ausgewählte Grundlagen der Quadraturtheorie zusammen, die in Kapitel 6 benötigt werden.

## 2.1 Funktionenklassen

### 2.1.1 Analytische Funktionen

Im Folgenden definieren wir die Klasse der analytischen Funktionen, die aus der Funktionentheorie wohlbekannt sind. Wir kommen später in dieser Arbeit auf diese Funktionenklasse zurück.

**Definition 2.1** (vgl., z.B., [33, S. 45]). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Weiter sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ gegeben. Dann heißt $f$ **analytisch**, falls $f$ in jedem Punkt $a \in D$ komplex differenzierbar ist. Weiterhin heißt $f$ im Punkt $a$ **analytisch**, falls es eine Umgebung $U \subset D$ von $a \in U$ gibt, sodass $f$ auf $U$ analytisch ist.*

**Satz 2.2** (vgl., z.B., [33, S. 106]). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Weiter sei eine analytische Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ gegeben. Dann ist $f$ auf jeder in $D$ enthaltenden Kreisscheibe $\mathcal{B}_R(a) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| < R\} \subset D$ in eine Potenzreihe entwickelbar und es gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \ \textit{für alle } z \in \mathcal{B}_R(a). \tag{2.1}$$

### 2.1.2 Funktionen von beschränkter Variation

In diesem Unterabschnitt beschäftigen wir uns mit der Klasse der Funktionen von beschränkter Variation. Diese Klasse spielt besonders in Kapitel 6, in welchem wir uns mit der punktweisen Konvergenz der Methode der kleinsten Quadrate auseinandersetzen, eine wichtige Rolle. Um diese Klasse zu definieren, benötigen wir zunächst die folgende Definition der totalen Variation:

**Definition 2.3** (vgl., z.B., [41, S. 493])**.** *Die **totale Variation** einer reellwertigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist definiert durch*

$$\mathcal{V}_a^b [f] = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|, \tag{2.2}$$

*wobei das Supremum auf der Menge*

$$\mathcal{P} = \{P = \{x_0, \dots, x_n\} : \ a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \ n \in \mathbb{N}\} \tag{2.3}$$

*über alle Partitionen des Intervalls $[a, b]$ gebildet wird. Der Kürze halber schreiben wir $\mathcal{V}[f] \equiv \mathcal{V}_{-1}^1 [f]$.*

Wir können nun die Klasse von Funktionen von beschränkter Variation definieren.

**Definition 2.4** (vgl., z.B., [41, S. 493])**.** *Eine reellwertige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist von **beschränkter Variation**, wenn ihre totale Variation endlich ist. Wir definieren die Klasse von Funktionen von beschränkter Variation auf dem Intervall $[a, b]$ durch*

$$\mathcal{BV}[a, b] = \left\{f : [a, b] \to \mathbb{R} : \ \exists C > 0 : \mathcal{V}_a^b [f] < C\right\}. \tag{2.4}$$

Es stellt sich die Frage, wie man Funktionen von beschränkter Variation charakterisieren kann. Zudem ist es interessant, welche gängigen Funktionenklassen Teil der Klasse von Funktionen von beschränkter Variation sind und welche nicht. Wir fassen einige wichtige Eigenschaften zusammen (vgl., z.B., [41, S. 496-499]):

- Die Menge $\mathcal{BV}[a, b]$ enthält alle Treppenfunktionen sowie alle monotonen oder Lipschitz-stetigen Funktionen. Insbesondere enthält $\mathcal{BV}[a, b]$ also auch alle stetig differenzierbaren Funktionen $f \in \mathcal{C}^1 [a, b]$ mit beschränkter Ableitung $f'$ auf $[a, b]$.
- Es existieren stetige Funktionen $f \in \mathcal{C}[a, b]$, die nicht von beschränkter Variation sind. Ein Beispiel dafür ist die bekannte Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := \begin{cases} x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

  definiert ist.
- Seien $f \in \mathcal{BV}[a, b]$ und $c \in (a, b)$ gegeben. Dann gilt

$$\mathcal{V}_a^b [f] = \mathcal{V}_a^c [f] + \mathcal{V}_c^b [f]. \tag{2.6}$$

Funktionen von beschränkter Variation können folgendermaßen charakterisiert werden:

**Satz 2.5** (vgl., z.B., [41, S. 498]). *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie als Differenz zweier monoton steigender Funktionen dargestellt werden kann:*

$$f \in \mathcal{BV}[a,b] \iff \exists f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ monoton steigend}: \; f = f_1 - f_2. \tag{2.7}$$

*Insbesondere gilt für stetige Funktionen, dass sie genau dann von beschränkter Variation sind, wenn sie sich als Differenz zweier stetiger und monoton steigender Funktionen darstellen lassen.*

Daraus lässt sich unmittelbar für eine Funktion von beschränkter Variation $f \in \mathcal{BV}[a,b]$ folgern (vgl., z.B., [41, S. 498]):

- Für alle $x_0 \in [a,b]$ existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ und } \lim_{x \to x_0^-} f(x). \tag{2.8}$$
- Es existieren höchstens abzählbar viele Stellen $\{x_i\}_{i \in I} \subset [a,b]$ an denen $f$ unstetig ist.
- $f$ ist Riemann-integrierbar.

Unser Hauptergebnis Theorem 6.25 aus Kapitel 6 beweist eine Fehlerabschätzung für Funktionen der Klasse $\mathcal{C}[-1,1] \cap \mathcal{BV}[-1,1]$. Mit Hilfe der soeben zusammengestellten Eigenschaften lassen sich leicht Funktionen dieser Klasse angeben, auf die wir Theorem 6.25 anwenden können.

### 2.1.3 Stetigkeitsmodul

In diesem Unterabschnitt betrachten wir das Stetigkeitsmodul einer stetigen Funktion. Das Stetigkeitsmodul wurde erstmals von H. Lebesgue im Jahr 1910 eingeführt (vgl. [52]). Wir benötigen es in Abschnitt 6.2, in welchem wir das Hauptergebnis zur punktweisen Konvergenz der Methode der kleinsten Quadrate genauer diskutieren. Mit Hilfe des Stetigkeitsmoduls lässt sich die Klasse der stetigen Funktionen differenzierter betrachten.

**Definition 2.6** (vgl., z.B., [63, S. 116]). *Für $f \in \mathcal{C}[a,b]$ heißt die durch*

$$\omega(f,[a,b],\delta) = \sup\{|f(x) - f(t)| : \; x,t \in [a,b] \text{ und } |x-t| \le \delta\}, \tag{2.9}$$

*definierte Funktion $\omega(f,[a,b],\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$* ***Stetigkeitsmodul*** *von $f$ auf $[a,b]$.*

Mit Hilfe des Stetigkeitsmoduls lassen sich gleichmäßig stetige Funktionen wie folgt charakterisieren:

**Satz 2.7** (vgl., z.B., [63, S. 117]). *Eine Funktion $f$ ist im Intervall $[a, b]$ genau dann gleichmäßig stetig, wenn*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega\left(f, [a, b], \delta\right) = 0. \tag{2.10}$$

Wir fassen im Folgenden einige Eigenschaften des Stetigkeitsmoduls einer Funktion $f \in \mathcal{C}[a, b]$ zusammen (vgl., z.B., [70, S. 179]):

- Die Funktion $\omega\left(f, [a, b], \cdot\right)$ ist monoton steigend, d. h. für alle $\delta_1 \leq \delta_2$ gilt
$$\omega\left(f, [a, b], \delta_1\right) \leq \omega\left(f, [a, b], \delta_2\right). \tag{2.11}$$
- Die Funktion $\omega\left(f, [a, b], \cdot\right)$ ist subadditiv, d. h. für alle $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ gilt
$$\omega\left(f, [a, b], \delta_1 + \delta_2\right) \leq \omega\left(f, [a, b], \delta_1\right) + \omega\left(f, [a, b], \delta_2\right). \tag{2.12}$$
- Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\omega\left(f, [a, b], m\delta\right) \leq m\omega\left(f, [a, b], \delta\right). \tag{2.13}$$
- Für alle $\lambda \geq 0$ gilt
$$\omega\left(f, [a, b], \lambda\delta\right) \leq (\lambda + 1)\omega\left(f, [a, b], \delta\right). \tag{2.14}$$
- Die Funktion $\omega\left(f, [a, b], \cdot\right)$ ist stetig.

## 2.2 Spezielle Funktionen

In den folgenden Unterabschnitten stellen wir für die Beweise unserer Theoreme wichtige Eigenschaften der Gammafunktion und der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion bereit. Diese gehören zu den sogenannten „Speziellen Funktionen“, die nicht nur in der Analysis, sondern auch in vielen Anwendungsbereichen eine wichtige Rolle spielen.

### 2.2.1 Gammafunktion

Die Gammafunktion, im Folgenden mit $\Gamma$-Funktion abgekürzt, ist eine „Spezielle Funktion“, von der wir im Folgenden wesentliche Eigenschaften zusammenfassen.
Die $\Gamma$-Funktion ist auf der rechten Halbebene der komplexen Zahlen definiert und wurde erstmals von L. Euler 1729/30 eingeführt:

**Definition 2.8** (vgl., z.B., [33, S. 194]). *Die Funktion*

$$\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}, \tag{2.15}$$

*definiert durch*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \tag{2.16}$$

*heißt* $\Gamma$***-Funktion***. *Dabei ist* $t^{z-1} := \mathrm{e}^{(z-1)\log(t)}$, *mit* $\log(t) \in \mathbb{R}$.