Einige wichtige Beweismethoden

(modifiziert nach wikibooks.org: Mathe für Nicht-Freaks: Grundlagen der Mathematik)

Was ist ein Beweis?

Beweise sind fehlerfreie Herleitungen mathematischer Sätze aus Axiomen und bereits bewiesenen Aussagen. Sie bestehen aus endlich vielen Teilschritten, wobei bei jedem Teilschritt streng logisch eine neue Aussage aus den vorhergehenden Aussagen geschlossen wird. Beweise spielen damit eine sehr wichtige Rolle in der Mathematik, denn jeder neuer Satz einer Theorie muss durch einen Beweis begründet werden. Sätze zu beweisen ist damit eine der Hauptaufgaben (wenn nicht die Hauptaufgabe) eines Mathematikers.

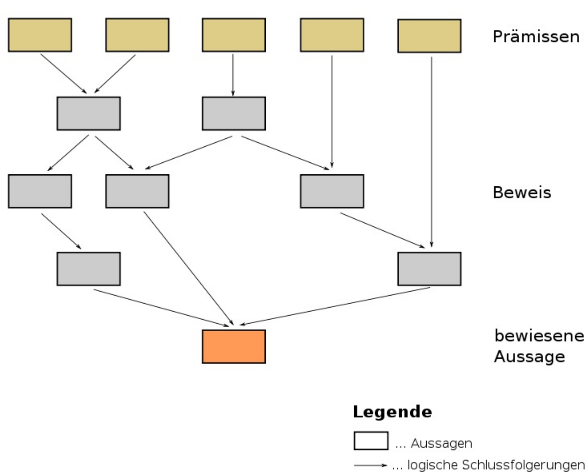
Wie ist ein Beweis aufgebaut? Am Anfang eines Beweises stehen seine Prämissen. Dies sind Aussagen, die entweder Axiome der Theorie, bereits bewiesene Sätze oder Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes sind. Dabei kommt es auf die Art des Satzes an, wie die einzelnen Voraussetzungen des Satzes konkret aussehen. Aus diesen Prämissen werden nun durch logische Schlussfolgerungen weitere Aussagen hergeleitet, aus denen wiederum durch logische Schlussfolgerungen neue Aussagen hergeleitet werden, usw. Am Ende dieser Herleitungen steht die zu beweisende Aussage. Durch einen solchen Beweis (der in der rechten Abbildung skizziert ist) hat man nun folgende Aussage bewiesen:

<Prämissen> $\Rightarrow$ <zu beweisende Aussage>

Wie können logische Schlussfolgerungen aussehen? Stell dir vor, du hast bereits die Implikation „Wenn A, dann B“ als Satz in deiner Theorie bewiesen oder es ist ein Axiom deiner Theorie oder eine Tautologie. Stell dir außerdem vor, du hast die Aussage A bereits hergeleitet oder sie ist eine Prämisse deines Beweises. Da nun sowohl die Aussage A als auch die Aussage „Wenn A, dann B“ gilt, kannst du dir aus beiden Aussagen die Aussage B logisch erschließen und deinem Beweis hinzufügen.

Neben Implikationen können auch Äquivalenzen zur logischen Schlussfolgerung herangezogen werden. Denn wenn eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ gilt, so gilt sowohl die Implikation $A \Rightarrow B$ als auch die Implikation $B \Rightarrow A$, die für logische Schlussfolgerungen nach dem obigen Prinzip verwendet werden können.

Das Ende eines Beweises wird oft durch „q.e.d.“ gekrönt. Dies steht für „quod erat demonstrandum“ und bedeutet soviel wie „was zu beweisen war“. Auch das Symbol $\square$ ist als Markierung für ein Beweisende verbreitet.



Direkter Beweis:

Beim direktem Beweis wird der zu beweisende Satz S direkt bewiesen. Dies bedeutet, dass man mit den Voraussetzungen von S beginnt und aus diesen die zu beweisende Aussage direkt durch logische Schlussfolgerungen herleitet. Ein direkter Beweis nimmt also folgende Form an:

$$\text{Prämissen und Voraussetzungen von S} \quad \Rightarrow \quad \text{Konklusion von S}$$

Betrachten wir ein Beispiel. Wir wollen den Satz „Die Summe 3er aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.“ beweisen. Dieser Satz lässt sich folgendermaßen als Implikation formulieren: “Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist $n + (n + 1) + (n + 2)$ durch 3 teilbar.“. In dieser Implikation ist „n ist eine natürliche Zahl“ die Prämisse und „$n + (n + 1) + (n + 2)$ ist durch 3 teilbar“ die Konklusion. Ein direkter Beweis hätte also folgende Form:

$$\text{n ist eine natürliche Zahl.} \quad \Rightarrow \quad n + (n + 1) + (n + 2) \text{ ist durch 3 teilbar.}$$

Ein solcher Beweis könnte in Fließtext so aussehen (Implikationen der logischen Schlussfolgerungen sind orange):

„Sei n eine natürliche Zahl. Es ist $n + (n + 1) + (n + 2) = 3 \cdot n + 3 = 3(n + 1)$. Da mit n auch $n + 1$ eine natürliche Zahl ist, ist $3 \cdot (n + 1)$ durch 3 teilbar.“ $\square$

Wie sehen hier die benutzten Prämissen und Implikationen aus? Schreiben Sie den Beweis ausführlich auf!

Beweis durch Kontraposition

Die Kontraposition ist eine Beweismethode, die für Beweise von Implikationen der Form $A \Rightarrow B$ verwendet werden kann. Diese Beweismethode basiert auf der Tautologie $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Dies bedeutet, dass $A \Rightarrow B$ dann und nur dann wahr ist, wenn $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr ist. Wenn wir also einen Satz der Form $A \Rightarrow B$ beweisen wollen, können wir alternativ auch die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ beweisen. Beim Beweis durch Kontraposition macht man genau dies.

Um also Kontraposition erfolgreich anwenden zu können, muss man die zu beweisenden Aussagen richtig negieren. Das erfordert ein wenig Übung.

Beispiel: Als Beispiel wollen wir folgenden Satz mit Hilfe der Kontraposition beweisen: „Für alle natürlichen Zahlen gilt: Ist n^2 gerade, dann ist n gerade.“

Dieser Satz hat die Form einer Implikation $A \Rightarrow B$ mit:

$$\underbrace{n^2 \text{ ist gerade}}_{=\,A} \Rightarrow \underbrace{n \text{ ist gerade}}_{=\,B}$$

Um diesen Satz durch Kontraposition beweisen zu können, müssen wir erst einmal die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$, also die Negation der Aussagen A und B formulieren:

$$\neg A \quad = \neg \left(n^2 \text{ ist gerade}\right) = n^2 \text{ ist ungerade} \qquad \neg B = \neg\,(n \text{ ist gerade}) \quad = n \text{ ist ungerade}$$

Damit erhalten wir für $\neg B \Rightarrow \neg A$:

$$(n \text{ ist ungerade}) \Rightarrow \left(n^2 \text{ ist ungerade}\right)$$

als die gesuchte Kontraposition, die wir an Stelle von $A \Rightarrow B$ beweisen können.

Beweis: Sei n eine natürliche Zahl und ungerade. Wir müssen nun zeigen, dass n^2 ungerade ist. Da n ungerade ist, gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 0$ mit $n = 2 \cdot k + 1$. Damit ist

$$n^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot \underbrace{\left(2k^2 + 2k\right)}_{=:\,m} +1 = 2 \cdot m + 1.$$

Also ist n eine ungerade Zahl. □

Machen Sie sich das Beweisprinzip klar. Warum kann man statt $A \Rightarrow B$ auch $\neg B \Rightarrow \neg A$ beweisen?

Widerspruchsbeweis oder indirekter Beweis:

Anstatt einen mathematischen Satz S direkt zu beweisen, kann man seine Negation $\neg S$ durch logische Schlussfolgerungen zu einem Widerspruch führen. $\neg S$ nennt man Widerspruchsannahme. Ein Widerspruchsbeweis hat also folgende Form:

$$\text{Widerspruchsannahme } \neg S \quad \stackrel{\text{log. Schlüsse}}{\Rightarrow} \quad \text{Widerspruch}$$

Um einen Widerspruchsbeweis erfolgreich durchzuführen, muss man zunächst den zu beweisenden Satz S richtig negieren. Doch wieso haben wir den Satz S bewiesen, wenn wir die Widerspruchsannahme $\neg S$ zu einem Widerspruch geführt haben? Wenn man die Widerspruchsannahme $\neg S$ zu einem Widerspruch geführt hat, so weißt man, dass $\neg S$ immer falsch sein muss. Damit ist die doppelte Verneinung $\neg\neg S$ von S wahr. Da $\neg\neg S \Leftrightarrow S$ eine Tautologie ist, ist $\neg\neg S$ dann und nur dann wahr, wenn S wahr ist (siehe Definition der Äquivalenz). Damit muss aber S wahr sein. Genau dies ist zu zeigen, wenn wir den Satz S beweisen wollen.

Betrachten wir ein Beispiel, einen der berühmtesten und ältesten bekannten Widerspruchsbeweise, der auf Euklid zurückgeht: Der Beweis der Irrationalität von Wurzel aus 2. Die Aussage lässt sich beispielsweise so formalisieren:

$$\text{Für alle } x \in \mathbb{Q} \text{ gilt:} \quad x^2 \neq 2$$

Zur Durchführung des Beweises per Widerspruch formulieren wir zunächst die Widerspruchsannahme $\neg S$:

$$\text{Es gibt ein } x \in \mathbb{Q} \text{ mit} \quad x^2 = 2$$

Diese Aussage führen wir nun zu einem Widerspruch: Angenommen, $\neg S$ gilt, d.h., es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Dann können wir x als *vollständig gekürzten* Bruch schreiben; es gibt also teilerfremde natürliche Zahlen p, q mit

$$(\frac{p}{q})^2 = 2$$

. Es gilt also $p^2 = 2q^2$. p^2 ist also gerade; damit ist (s. das Beispiel für die Kontraposition) auch p gerade. Insbesondere lässt sich p schreiben als $p = 2r$, wobei r eine natürliche Zahl ist. Wegen $p^2 = 2q^2$ folgt daraus

$$4r^2 = 2q^2, \quad \text{also} \quad 2r^2 = q^2.$$

Also ist auch q^2 eine gerade Zahl, also (mit derselben Argumentation wie für p) auch q gerade. p und q haben also den gemeinsamen Teiler 2. Der Bruch $\frac{p}{q}$ ist also *nicht vollständig gekürzt*, war aber als vollständig gekürzt gewählt – ein Widerspruch. Die Aussage $\neg S$ führt also auf einen Widerspruch; sie kann also nicht wahr sein, und damit muss die Aussage S gelten.

Machen Sie sich wieder klar: Wie sehen hier die benutzten Prämissen und Implikationen aus? Schreiben Sie den Beweis ausführlich auf!

<u>Beweis per (vollständiger) Fallunterscheidung:</u>

Bei vollständiger Fallunterscheidung wird der Beweis in eine endliche Anzahl von Fällen $\mathrm{F}_1,\ \mathrm{F}_2,\ \ldots \mathrm{F}_n$ aufgeteilt. Für jeden der Fälle wird die zu beweisende Aussage unter zusätzlicher Annahme der Fallbedingung F_k bewiesen; das macht den Beweis manchmal leichter. Ein Beweis durch vollständige Fallunterscheidung hat damit folgende Form:

Prämissen, $\mathrm{F}_1 \overset{\text{log. Schlüsse}}{\Rightarrow}$ zu beweisende Aussage, Prämissen, $\mathrm{F}_2 \overset{\text{log. Schlüsse}}{\Rightarrow}$ zu beweisende Aussage,

$\ldots$, Prämissen, $\mathrm{F}_{n-1} \overset{\text{log. Schlüsse}}{\Rightarrow}$ zu beweisende Aussage, Prämissen, $\mathrm{F}_n \overset{\text{log. Schlüsse}}{\Rightarrow}$ zu beweisende Aussage.

Dabei muss sichergestellt sein, dass unter den Prämissen des Satzes mindestens einer der Fälle $\mathrm{F}_1,\ \mathrm{F}_2,\ \ldots \mathrm{F}_n$ eintritt (Deswegen das Wort „vollständig“ im Namen).

Beispiel: Als Beispiel beweisen wir folgenden Satz mit Hilfe vollständiger Fallunterscheidung:

„Ist p eine Primzahl ungleich 2, dann gibt eine natürliche Zahl k mit $p = 4 \cdot k + 1$ oder $p = 4 \cdot k + 3$.“

Wir werden folgende vier Fälle unterscheiden: Es gibt eine natürliche Zahl k mit...

$$\mathrm{F}_1 : \quad p = 4k, \qquad \mathrm{F}_2 : \quad p = 4k + 1$$

$$\mathrm{F}_3 : \quad p = 4k + 2 \qquad \mathrm{F}_4 : \quad p = 4k + 3$$

Da p eine natürliche Zahl ist (nur natürliche Zahlen können per Definition Primzahlen sein), muss einer der obigen vier Fälle auftreten. Unsere Fallunterscheidung ist damit vollständig. Betrachten wir nun die vier Fälle:

Fall 1: $p = 4k$. p ist durch 4 teilbar und damit keine Primzahl. Somit ist die Prämisse der zu beweisenden Implikation falsch und damit die gesamte Implikation wahr.

Fall 2: $p = 4k + 1$. Die Konklusion der zu beweisenden Implikation und damit die gesamte Implikation ist wahr.

Fall 3: $p = 4k + 2$. Es ist $p = 4k + 2 = 2(2k + 1)$. Damit ist p durch 2 teilbar. Da nach Voraussetzung der zu beweisenden Implikation $p \neq 2$ ist, kann p keine Primzahl sein. Somit ist die Prämisse der zu beweisenden Implikation falsch und damit die gesamte Implikation wahr.

Fall 4: $p = 4k + 3$. Die Konklusion der zu beweisenden Implikation und damit die gesamte Implikation ist wahr.

In jeden der Fälle konnten wir beweisen, dass unter der Bedingung der jeweiligen Fallunterscheidung die zu beweisende Implikation wahr ist. Da unsere Fallunterscheidung vollständig ist, ist die zu beweisende Implikation unabhängig von jeweiligen Fall wahr.

Machen Sie sich die benutzten Prämissen und Implikationen in den einzelnen Fällen klar. Warum ist die zu beweisende Aussage in Fall 1 und 3 wahr, obwohl die Prämisse nicht erfüllt ist?