Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2012

Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung

Didaktik der Algebra und Zahlentheorie

Inhaltsverzeichnis

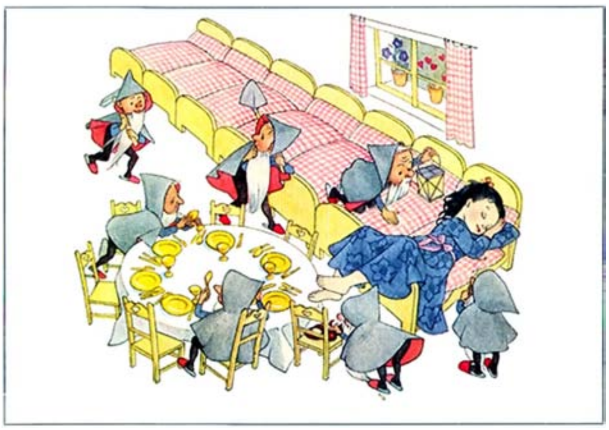
1 Behandlung der natürlichen Zahlen; Zahlaspekte

Literatur: Das Standardwerk zur Didaktik der Arithmetik ist:

PADBERG, F.; BENZ, CHR.: *Didaktik der Arithmetik*. Heidelberg: Spektrum, 2011 (4. Aufl.).

1.1 Kardinaler Zahlaspekt

Die Zahl „7“ erhält in dem Märchen „Schneewittchen und die sieben Zwerge“ ihre Bedeutung durch bijektive Zuordnungen.

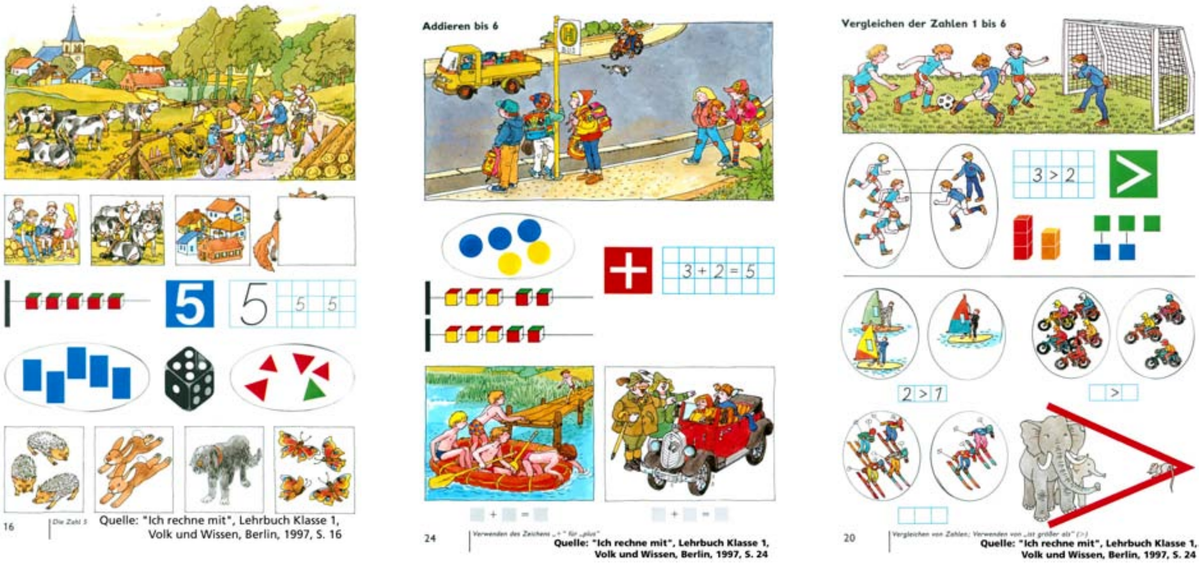


Genetisch-mengentheoretische Einführung der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen

- *Bijektion*: Injektive und surjektive Abbildung, d. h. *eineindeutige* Abbildung *von* einer Menge M_1 *auf* eine Menge M_2.
- *Gleichmächtigkeit*: Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen gleichmächtig ($M_1 \sim M_2$), falls eine bijektive Abbildung ϕ existiert, die M_1 auf M_2 abbildet.

  Die Gleichmächtigkeit ist eine *Äquivalenzrelation*, sie zerlegt eine Menge (von Mengen) daher in Äquivalenzklassen.
- *Kardinalzahl:* Äquivalenzklasse $\mathrm{card}(M)$ bzgl. der Gleichmächtigkeit einer Menge M:
  $$\mathrm{card}(M) := \left\{X : X \in E^{(1)} \wedge X \sim M\right\}$$
  ($E^{(1)}$ ist die Menge aller Teilmengen des Grundbereiches.)

Die Menge aller Kardinalzahlen endlicher Mengen heißt *Menge der natürlichen Zahlen*.



Natürliche Zahlen als Kardinalzahlen in einem Schulbuch der Klasse 1

1.2 Ordinaler Zahlaspekt

Genetisch-mengentheoretische Einführung der natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen

- *Wohlordnung*: Relation R in einer Menge M mit folgenden Eigenschaften:
  - R ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch (analog „$\leq$“).
  - In allen nichtleeren Teilmengen N von M existiert ein kleinstes Element bzgl. R (ein Element p mit pRx für alle Elemente x der Menge N).
- *Ähnlichkeit zweier Mengen*: Zwei wohlgeordnete Mengen (M_1, R) und (M_2, S) heißen ähnlich ($M_1 \approx M_2$), falls eine eineindeutige Abbildung $\phi : M_1 \to M_2$ existiert mit:
  $$\text{f. a. } x, y \in M_1 \text{ gilt: } x\,R\,y \Leftrightarrow \phi(x)\ S\ \phi(y).$$
  Auch die Ähnlichkeit von Mengen ist eine Äquivalenzrelation.
- *Ordinalzahl*: Äquivalenzklasse $\mathrm{ord}(M)$ bzgl. der Ähnlichkeit einer Menge M:
  $$\mathrm{ord}(M) := \left\{X : X \in E^{(1)} \wedge X \approx M\right\}$$

Peano-Axiome

Auch die Einführung der natürlichen Zahlen mittels der ***Peano-Axiome*** korrespondiert mit dem ordinalen Zahlaspekt.

(1) Die Zahl Eins (Null) ist eine natürliche Zahl.

(2) Jede natürliche Zahl besitzt eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl als unmittelbaren Nachfolger.

(3) Jede natürliche Zahl ist unmittelbarer Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.

(4) Die Zahl Eins (Null) ist kein unmittelbarer Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(5) Die Menge aller natürlichen Zahlen ist die bezüglich Inklusion kleinste Menge, welche die Zahl Eins (Null) und mit jeder Zahl auch deren unmittelbaren Nachfolger enthält.

1.3 Zusammenhang von Ordinal- und Kardinalzahlen (nach PIAGET)

> *„Eine Kardinalzahl ist eine Klasse, deren Elemente aufgefasst werden als untereinander äquivalente und dennoch unterschiedliche 'Einheiten', deren Differenzen also nur darin bestehen, dass man sie aufreihen, also anordnen kann.*
>
> *Umgekehrt sind die Ordinalzahlen eine Reihe, deren Glieder, obgleich sie aufeinanderfolgen nach den Ordnungsrelationen, die ihnen ihre jeweiligen Rangstufen zuweisen, ebenfalls Einheiten sind, die einander äquivalent sind und infolgedessen kardinal zusammengefügt werden können.*
>
> *Die finiten Zahlen sind also zwangsläufig zugleich Kardinal- wie Ordinalzahlen; das ergibt sich aus der Natur der Zahl selbst, die ein in ein einziges operatorisches Ganzes verschmolzenes System von Klassen und asymmetrischen Relationen ist."*

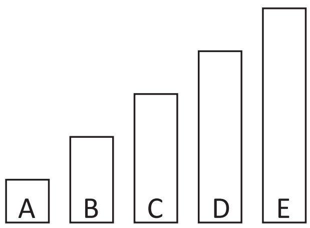
Versuch: Kindern werden 10 Pappstreifen gleicher Breite (1 Einheit) vorgelegt, die Länge von B beträgt 2, die von C 3 Einheiten usw.

1. Aufgabe: Ordnen und Zählen der Streifen.

2. Aufgabe: Wie viele A könnte man aus B und C herstellen?

3. Aufgabe: Es wird auf einen beliebigen Streifen gezeigt und gefragt, wieviele A daraus hergestellt werden könnten.

(Schluss von Ordination auf Kardination.)



... insg. 10 Streifen

1.4 Weitere Zahlaspekte

(nach MAIER, RADDATZ/SCHIPPER, LAUTER, PADBERG)

- Kardinaler Zahlaspekt (Mächtigkeit von Mengen)
- Ordinaler Zahlaspekt (Zählzahlen, Ordnungszahlen)
- Operatoraspekt („Wieviel mal...?"), Maßzahlaspekt
- Rechenaspekt, algebraischer Zahlaspekt
- Codierungsaspekt (Zahlen zur Bezeichnung von Objekten)

Bemerkungen:

- Operatoraspekt und Maßzahlaspekt werden z. T. als getrennte Aspekte gefasst.
- Für die mathematische Begründung der natürlichen Zahlen sind der kardinale und der ordinale Zahlaspekt von größter Bedeutung.

2 Elemente der Didaktik der Bruchrechnung

Literatur: Das Standardwerk zur Didaktik der Bruchrechnung ist:

PADBERG, F.: *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum, 1995 (4. Aufl. 2009).

2.1 Einstieg: Probleme und typische Schülerfehler

Liste häufiger **Fehler** (nach PADBERG):

1. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$
   b) $\frac{3}{5} + 6 = \frac{3+6}{5}$
2. a) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7}$
   b) $4 \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{28}$
3. a) $\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{9:3}{10} = \frac{3}{10}$
   b) $2 : \frac{2}{3} = \frac{2:2}{3} = \frac{1}{3}$
4. a) $0,45 < 0,238$
   b) $0,23 = \frac{23}{10}$
5. a) $3,48 + 4,2 = 7,50$
   b) $0,45 + 7 = 0,52$
6. $0,4 \cdot 0,2 = 0,8$
7. a) $5 : 0,1 = 0,5$
   b) $0,36 : 0,9 = 4$

- Rechenregeln werden oft schematisch und dabei in vielen Fällen falsch angewendet.
- Inhaltliches (auch anschauliches) Verständnis wird nicht in ausreichendem Maße herausgebildet.

Konsequenz: Betonung der Verständnisgrundlagen: konkret-handelnde (enaktive) und zeichnerische (ikonische) Darstellung von Brüchen und Operationen mit Brüchen.

2.2 Anwendungsaspekte gebrochener Zahlen

(1) Bruchzahlen (gebrochene Zahlen[1]) werden zur Bezeichnung von Größen (z. B. von Längen, Flächeninhalten, Zeitspannen, Gewichten usw.) eingesetzt (*Maßzahlaspekt*).

Beispiele: $\frac{1}{2}$ m, $\frac{3}{4}$ cm^2, $\frac{1}{2}$ Stunde, $\frac{3}{4}$ kg.

(2) Durch Bruchzahlen werden Beziehungen zwischen zwei Größen derselben Art (z. B. zwischen Gewichten) beschrieben (*Relationsaspekt*).

Beispiel: Fleisch besteht zu $\frac{2}{3}$ aus Wasser.

(3) Mit Hilfe von Bruchzahlen werden auf Größen anzuwendende multiplikative Rechenanweisungen angegeben (*Operatoraspekt*).

Beispiel: Nimm $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{8}$ l Sahne (bei einem Backrezept)

(4) Bruchzahlen dienen zur Bezeichnung von Stellen auf einer Skala (*Skalenwertaspekt*).

Beispiel: Wasserstand $1\frac{1}{2}$ m

(5) Bruchzahlen dienen zur Angabe von Quotienten (Verhältnissen) aus natürlichen Zahlen bzw. aus Größen (*Quotientenaspekt*).

Beispiele: Maßstab, Mischungsverhältnis.

(nach PADBERG)

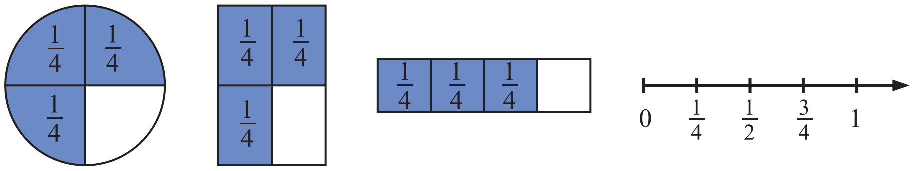
[1] Die Begriffe *Bruchzahl* und *gebrochene Zahl* werden synonym verwendet, sind jedoch klar von dem Begriff *Bruch* zu unterscheiden (siehe dazu auch die Ausführungen zum Äquivalenzklassenkonzept).

2.3 Zwei Grundvorstellungen von Brüchen

1. Bruch als Teil eines Ganzen

Das „Ganze“ kann auf verschiedene Arten veranschaulicht werden, z. B.

- Kreis (konkrete Interpretationen: Pizza, Torte, Uhr),
- Rechteck (konkrete Interpretation: u. a. Schokoladentafel),
- Streifen (Vermittlung zwischen Rechteck und Strecke); Strecken (Bezug zum Zahlenstrahl).

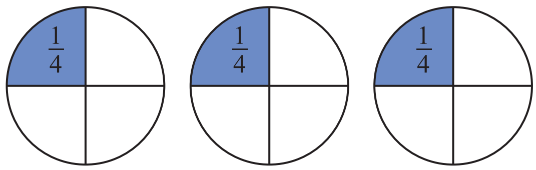


Vielfältige Vorstellungen von Brüchen hervorrufen (auf enaktiver und ikonischer Ebene); diese dann sorgfältig zu sprachlichen und symbolischen Beschreibungen entwickeln, z. B.:

$\frac{3}{4}$ *bedeutet: Ich teile das Ganze in 4 gleich große Teile und nehme 3 davon. Die Zahl unter dem Bruchstrich heißt* ***Nenner****; er „benennt“ die Art des Bruchs. Er gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze aufgeteilt wird. Die Zahl über dem Bruchstrich zählt, wie viele Teile genommen werden:* ***Zähler****.*

2. Bruch als Teil mehrerer Ganzer

Mehrere Ganze werden in gleiche Teile geteilt.



Der Zusammenhang zwischen beiden Auffassungen lässt sich anhand konkreter Überlegungen herausarbeiten (beliebtes Beispiel: Teilen von Pizzen).

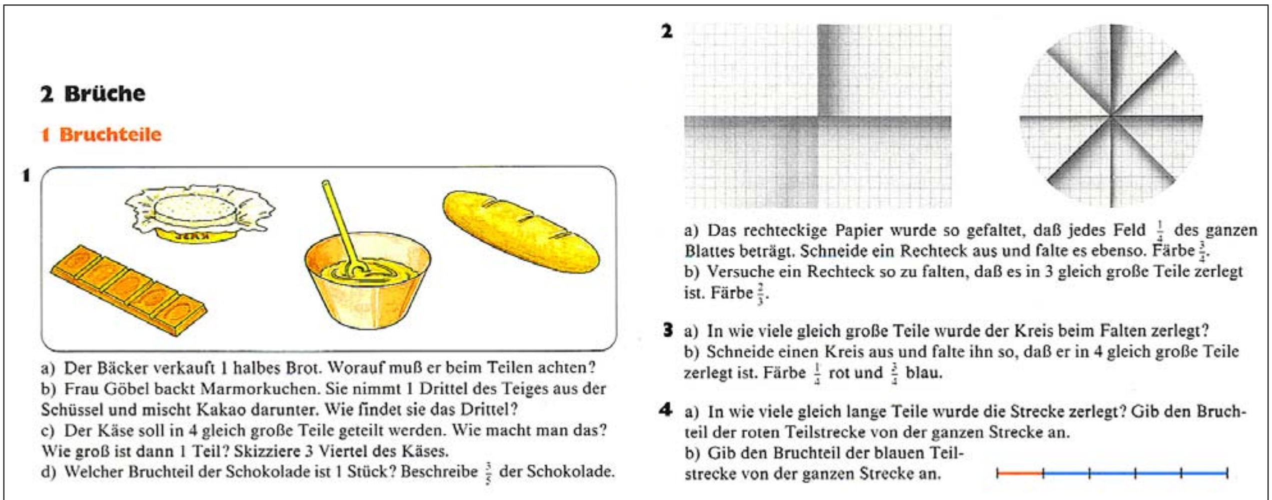
Beispiel für die beiden Grundvorstellungen:

$\frac{3}{4}$ dm bedeutet:
1. Teile 1 dm in vier Teile und nimm drei davon.
2. Teile 3 dm in vier Teile und nimm einen davon.

2.4 Konzepte für die Bruchrechnung

2.4.1 Größenkonzept

Von konkreten Größen zu Brüchen; dann durch Abstraktion zu Bruchz. (gebrochenen Zahlen).



2 Brüche

1 Bruchteile

1

a) Der Bäcker verkauft 1 halbes Brot. Worauf muß er beim Teilen achten?
b) Frau Göbel backt Marmorkuchen. Sie nimmt 1 Drittel des Teiges aus der Schüssel und mischt Kakao darunter. Wie findet sie das Drittel?
c) Der Käse soll in 4 gleich große Teile geteilt werden. Wie macht man das? Wie groß ist dann 1 Teil? Skizziere 3 Viertel des Käses.
d) Welcher Bruchteil der Schokolade ist 1 Stück? Beschreibe $\frac{3}{5}$ der Schokolade.

2

a) Das rechteckige Papier wurde so gefaltet, daß jedes Feld $\frac{1}{4}$ des ganzen Blattes beträgt. Schneide ein Rechteck aus und falte es ebenso. Färbe $\frac{3}{4}$.
b) Versuche ein Rechteck so zu falten, daß es in 3 gleich große Teile zerlegt ist. Färbe $\frac{2}{3}$.

3 a) In wie viele gleich große Teile wurde der Kreis beim Falten zerlegt?
b) Schneide einen Kreis aus und falte ihn so, daß er in 4 gleich große Teile zerlegt ist. Färbe $\frac{1}{4}$ rot und $\frac{2}{4}$ blau.

4 a) In wie viele gleich lange Teile wurde die Strecke zerlegt? Gib den Bruchteil der roten Teilstrecke von der ganzen Strecke an.
b) Gib den Bruchteil der blauen Teilstrecke von der ganzen Strecke an.

Einführung von Brüchen nach dem Größenkonzept in einem (älteren) Schulbuch (Gamma 6, Hauptschule)

Vorteile:

- Nähe zu den Anwendungen
- Addition und Subtraktion lassen sich sehr gut veranschaulichen

Hauptnachteil:

- Probleme bei der Multiplikation und Division – hierzu sind andere Ansätze erforderlich („von-Ansatz“, steht im Zusammenhang mit dem Operatorkonzept, s. u.).

2.4.2 Äquivalenzklassenkonzept

Klassenbildung mithilfe einer Äquivalenzrelation $\sim$ (reflexive, symmetrische, transitive Relation): *Quotientengleichheit*: $(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

Das Äquivalenzklassenkonzept ist bedeutsam als fachwissenschaftlicher Hintergrund und für die Einordnung des Verhältnisses Bruch – gebrochene Zahl (Bruchzahl). Die „1:1-Umsetzung“ in der Schule kann aber als gescheitert betrachtet werden.

Die Abstraktion durch Klassenbildung ist von fragwürdigem Wert.

FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, 1973, Band 1, S. 207

- Sowohl die Definition der Bruchzahlen wie auch die der Rechenoperationen erfolgen für die Sch. unmotiviert und formal. Die Genese der Begriffe und Definitionen wird unterschlagen.
- Es gelingt kaum, Schülern eine anschauliche Vorstellung von den Bruchzahlen und besonders von den Verknüpfungen zu vermitteln.
- An das Vorwissen der Schüler wird nicht angeknüpft.

(vgl. PADBERG, F.: Didaktik der Bruchrechnung)

Trotz dieser Gründe gegen eine explizite Behandlung im Unterricht, ist das Äquivalenzklassenkonzept bedeutsam als „Hintergrund“ der Zusammenfassung von Brüchen zu gebrochenen Zahlen, für die Zuordnung zu Punkten des Zahlenstrahls sowie für das Erweitern und Kürzen.

2.4.3 Operatorkonzept

Das Operatorkonzept hatte große Bedeutung in den siebziger Jahren – bis hinein in die achtziger Jahre – nachdem das Äquivalenzklassenkonzept als gescheitert betrachtet wurde.

Operatoren bzw. Funktionen auf etwas angewendet weisen der Zahl bzw. Größe, auf die sie angewendet werden, eine neue Zahl bzw. Größe zu.

Beispiel: $\frac{2}{3}$ von 6 kg sind 4 kg. *Deutung:* „$\frac{2}{3}$ von“ ordnet der Größe 6 kg die Größe 4 kg zu.

Konkretisierung des Operators durch Maschine: x Eingabe $\boxed{\cdot\frac{2}{3}}$ $\frac{2}{3}x$ Ausgabe

Multiplikations- und Divisionsoperatorenen

Der *Multiplikationsoperator* $(\cdot n)$ ordnet einer Größe a die Größe $n \cdot a$ zu.

Der *Divisionsoperator* $(:n)$ ordnet einer Größe a die Größe $a : n$ zu.

Konkretisierung: Stäbe mit einer bestimmten Länge

- Der Multiplikationsoperator ist eine Maschine, die den Stab auf die n-fache Länge streckt.
- Der Divisionsoperator ist eine Maschine, die den Stab in n gleich lange Teile zerlegt und einen Teilstab ausgibt.

Verkettung von Operatoren durch Hintereinanderschalten der Maschinen

- Für Verkettung gilt: $(\cdot m) \circ (: n) = (: n) \circ (\cdot m)$.

- Der Bruchoperator $(\cdot\frac{m}{n})$ wird als Verkettung definiert: $(\cdot\frac{m}{n}) := (\cdot m) \circ (: n)$.

Gegenoperatoren, die die Wirkung eines Multiplikations- bzw. Divisionsoperators aufheben: $(\cdot n)$ wird durch $(: n)$ und $(\cdot\frac{m}{n})$ durch $(\cdot\frac{n}{m})$ neutralisiert.

Erweitern und Kürzen

Kürzen ist das *Herausnehmen* insgesamt wirkungsloser Operatorpaare und *Erweitern* das *Einfügen* insgesamt wirkungsloser Operatorpaare.

Beispiel: $(\cdot\frac{6}{8}) = (\cdot 6) \circ (: 8) = (\cdot 3) \circ (\cdot 2) \circ (: 2) \circ (: 4) = (\cdot 3) \circ (: 4) = (\cdot\frac{3}{4})$

Multiplikation

Die Multiplikation wird über die Verkettung von Bruchoperatoren eingeführt:

$$(\cdot\frac{m}{n}) \circ (\cdot\frac{p}{q}) = (\cdot m) \circ (: n) \circ (\cdot p) \circ (: q) = (\cdot m) \circ (\cdot p) \circ (: n) \circ (: q) = (\cdot(m \cdot p)) \circ (: (n \cdot q)) = (\cdot\frac{m \cdot p}{n \cdot q})$$

Addition und Subtraktion

Addition und Subtraktion werden i. Allg. nach der Multiplikation und dem Erzeugen gleichnamiger Brüche durch Erweitern (s. o.) eingeführt. Additions- und Subtraktionsoperatoren wären sehr realitätsfremd und kompliziert.

Probleme bei der Umsetzung des Operatorkonzepts

- Reihenfolge Multiplikation vor Addition,
- an die Vorerfahrungen der Schüler über Bruchzahlen wird v. a. am Anfang nicht angeknüpft,
- Erweitern und Kürzen vermitteln wenig anschauliche Vorstellung,
- die Definition der Kleiner-Relation ist sehr aufwendig,
- für die Multiplikation ergibt sich keine anschauliche Vorstellung. Warum heißt das Ergebnis der Hintereinanderausführung von Operatoren Produkt?

2.4.4 Gleichungskonzept

- Ein Bruch wie $\frac{7}{3}$ entspricht dem Wunsch nach Lösbarkeit der Gleichung $3 \cdot x = 7$.
- Man rechne also mit x, als ob $3 \cdot x = 7$ sei.
- FREUDENTHAL nannte diese Gebrauchsregel „das algebraischePrinzip“. Multiplikation rechts und links mit 5 ergibt
$$15 \cdot x = 35,$$
woraus folgt, dass $\frac{7}{3}$ und $\frac{35}{15}$ dieselbe Zahl darstellen.
- Sollen $\frac{7}{3}$ und $\frac{3}{5}$ addiert werden, so leitet man aus
$$3 \cdot x = 7 \quad \text{und} \quad 5 \cdot y = 3$$
eine Gleichung für $x + y$ ab, nämlich
$$15 \cdot (x + y) = 44.$$

FREUDENTHAL, H.; *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Stuttgart: Klett, 1979, Band 1, S. 249.

Gleichungskonzept zusammengefasst:

Die Bruchzahl $\frac{n}{m}$ ist die Lösung der Gleichung $m \cdot x = n$.

Nachteile:

- Die Einführung erfolgt recht formal.

- Es sind Kenntnisse aus der Gleichungslehre erforderlich, die oft erst später (Klasse 7) zur Verfügung stehen.
- Belastung für die spätere Behandlung der Gleichungslehre:
  Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Gleichungen werden einfach vorausgesetzt.
  $\Rightarrow$ Gefahr der Generalisierung durch die Schüler.

2.4.5 Konzepte für die Bruchrechnung – Fazit

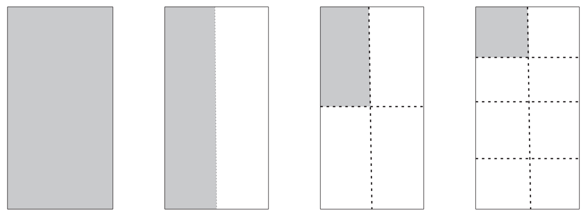
- Alle vier Konzepte haben sinnvolle Aspekte, aber auch ihre Probleme.
- Anzustreben ist einsichtiges und verständnisvolles Umgehen mit gebrochenen Zahlen.
- Herauslösen der Begriffe und Verfahren aus Umweltbezügen

2.5 Schülertätigkeiten zum Einstieg in die Arbeit mit Brüchen

Tätigkeiten auf enaktiver Ebene

- Herstellen und Einstellen von Bruchteilen (Kreisscheibe, Uhren).
- Falten: Halbe, Viertel, Achtel:
  - $\frac{1}{2}$ Blatt = $\frac{}{4}$ Blatt = $\frac{}{8}$ Blatt
  - Wie viele Achtel enthält ein dreiviertel Blatt?
  - Wie viele Halbe, Viertel, Achtel sind in $2\frac{1}{2}$ Faltblättern enthalten?

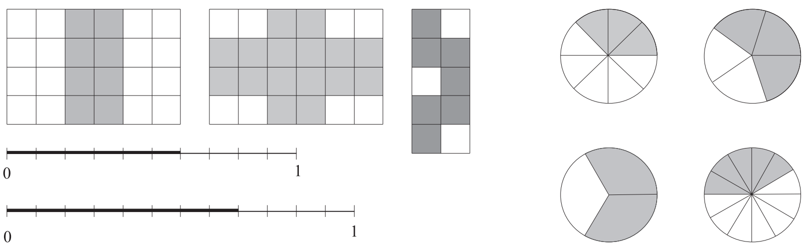
  $2\frac{1}{2}$ steht für $2 + \frac{1}{2}$



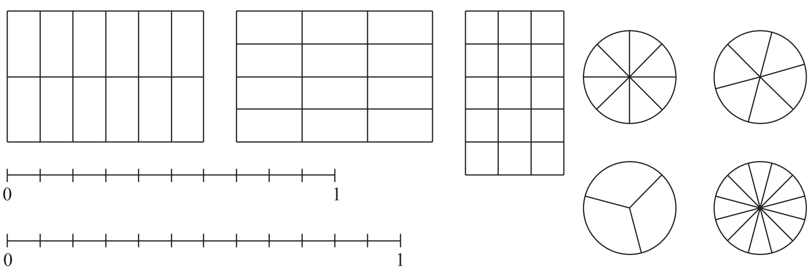
Ein Ganzes Ein Halbes Ein Viertel Ein Achtel

Tätigkeiten auf ikonischer Ebene (an Kreisen, Rechtecken, am Zahlenstrahl usw.)

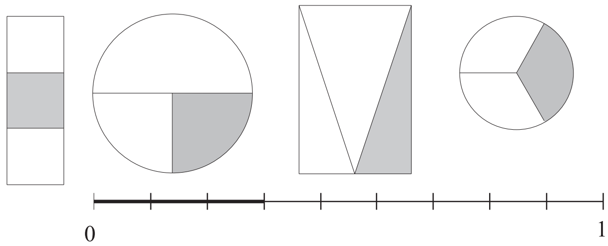
- Welche Brüche sind dargestellt?



- Kennzeichne folgende Brüche an geeigneten Kreisen, Rechtecken und Zahlenstrahlen:
  $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{5}{12}, \frac{11}{12}, \frac{7}{15}, \frac{5}{8}$



- Wo wird $\frac{1}{3}$ *nicht* richtig dargestellt?



Einfache rechnerische Tätigkeiten: Bruchteile von Größen (Längen, Gewichte, Zeit ...) bestimmen

- Wie viele cm sind das? Schreibe ausführlich wie in den Beispielen:

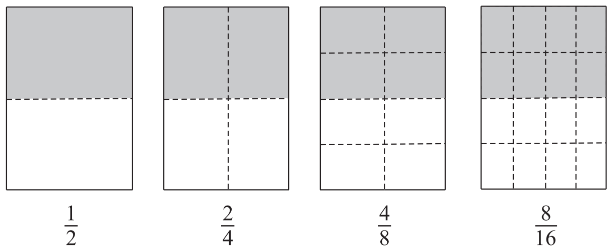
  Beispiele: $\frac{1}{4}$ m $= 25$ cm, denn $\frac{1}{4}$ m $= 100$ cm $: 4 = 25$ cm

  $\frac{3}{4}$ m $= 75$ cm, denn $\frac{3}{4}$ m $= 3 \cdot \frac{1}{4}$ m $= 3 \cdot (100$ cm $: 4) = 3 \cdot 25$ cm $= 75$ cm

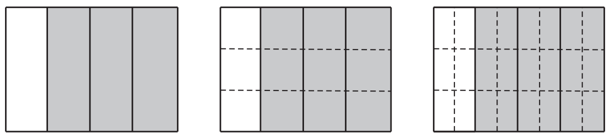
  $\dfrac{1}{2}$ m = ____ cm, denn $\qquad \dfrac{1}{5}$m = ____ cm, denn $\qquad \dfrac{3}{10}$ m = ____ cm, denn

2.6 Erweitern und Kürzen

Ausgehend von der ikonischen Darstellung können die Schüler erkennen, dass verschiedene Brüche denselben „Wert“ haben können.



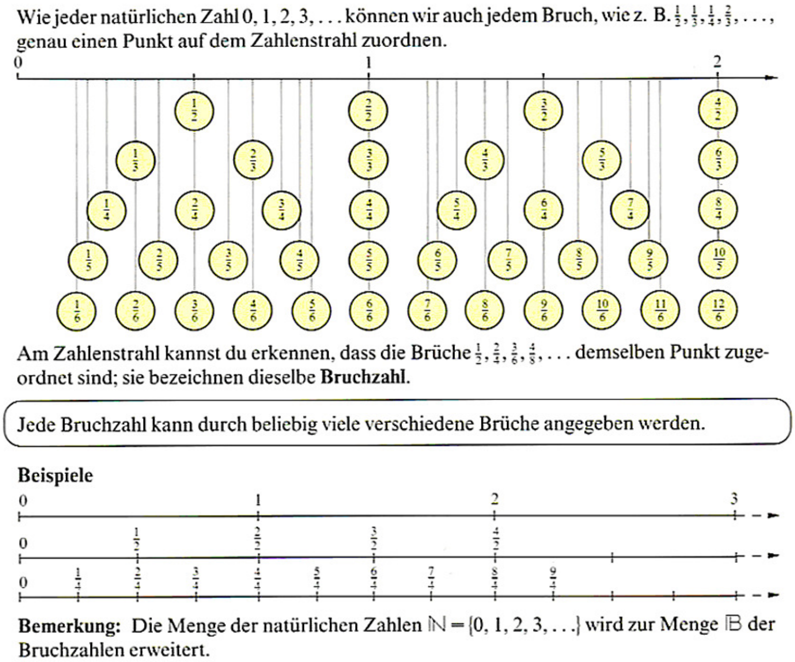
Welche Brüche haben denselben Wert wie $\dfrac{3}{4}$?



An derartigen Beispielen herausarbeiten:

- *Man **erweitert** einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert.*
- *Man **kürzt** einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl teilt.*

Im Anschluss daran lässt sich herausarbeiten, dass Brüchen, die durch Erweitern und Kürzen auseinander hervorgehen, jeweils dieselben Punkte auf dem Zahlenstrahl zugeordnet sind und somit derartige Brüche jeweils dieselbe Zahl (Bruchzahl, gebrochene Zahl) beschreiben; siehe die Bemerkungen zum Äquivalenzklassenkonzept.


Wie jeder natürlichen Zahl 0, 1, 2, 3, ... können wir auch jedem Bruch, wie z. B. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \ldots$, genau einen Punkt auf dem Zahlenstrahl zuordnen.

Am Zahlenstrahl kannst du erkennen, dass die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots$ demselben Punkt zugeordnet sind; sie bezeichnen dieselbe **Bruchzahl**.

Jede Bruchzahl kann durch beliebig viele verschiedene Brüche angegeben werden.

Beispiele

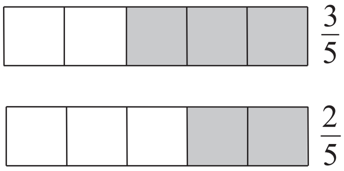
Bemerkung: Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ wird zur Menge $\mathbb{B}$ der Bruchzahlen erweitert.

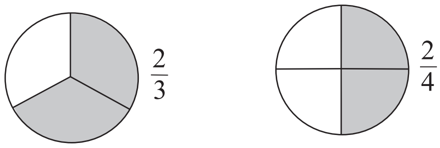
Abbildung: Einführung des Begriffs Bruchzahl (gebrochene Zahl) in einem Schulbuch für die Realschule.

2.7 Vergleichen von Brüchen

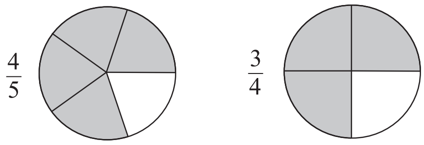
Zunächst sollten einfache Vergleiche angestellt und dabei auf anschauliche Vorstellungen zurückgegriffen werden.

- Spezialfälle: gleiche Nenner, gleiche Zähler



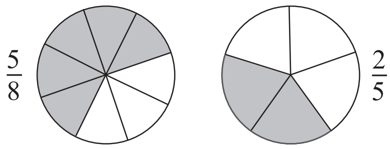


- Flächenvergleiche auch bei anderen einfachen Brüchen:



- Differenzen zu ganzen Zahlen betrachten:
  $\frac{4}{5} < \frac{6}{7}$, denn bei $\frac{4}{5}$ fehlt $\frac{1}{5}$ zur 1, bei $\frac{6}{7}$ fehlt nur $\frac{1}{7}$ zur Eins.

- Vergleichen mit besonders markanten Brüchen:
  $\frac{5}{8} > \frac{2}{5}$, denn $\frac{5}{8}$ ist größer als $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{5}$ ist kleiner als $\frac{1}{2}$.



Verallgemeinerung: Brüche vergleichen durch Erweitern auf gemeinsame Nenner

Beispiel: Vergleiche $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{8}$.*

1. Schritt: Suchen eines gemeinsamen Nenners:
   8 so lange vervielfachen, bis ein Vielfaches von 3 gefunden ist
   $\Rightarrow$ 24 ist ein gemeinsamer Nenner (kleinster gemeinsamer Nenner: Hauptnenner).
2. Schritt: Erweitern auf den gemeinsamen Nenner: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}$, $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$.
3. Schritt: Vergleichen: $\frac{16}{24} > \frac{15}{24}$, also $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$.

* Es sind auch noch andere Argumentationen möglich, z. B.: $\frac{5}{8}$ ist um $\frac{1}{8}$ größer als $\frac{1}{2}$; hingegen ist $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, also um $\frac{1}{6}$ größer als $\frac{1}{2}$. Da $\frac{1}{6}$ größer ist als $\frac{1}{8}$, ist also $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$.

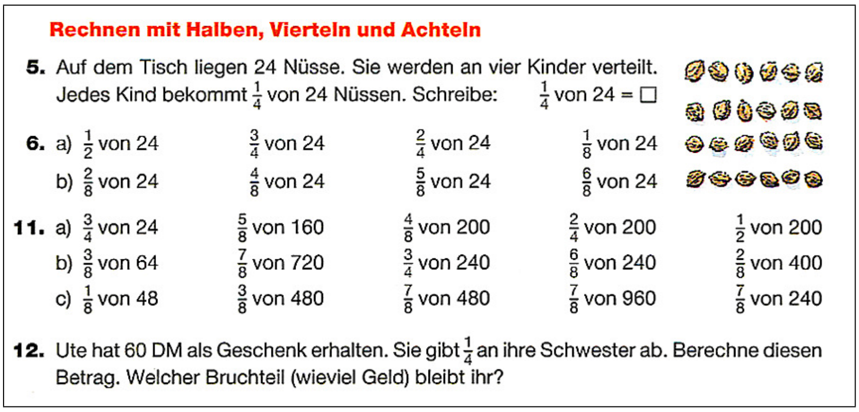
Schrittfolge üben:

Welcher Bruch ist größer?	(kleinster) gemeinsamer Nenner	Brüche erweitern	Vergleich durchführen
$\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$	15	$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$; $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$	$\frac{10}{15} > \frac{9}{15}$, also $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$
$\frac{4}{5}$; $\frac{5}{8}$			
$\frac{13}{20}$; $\frac{17}{25}$			

Das Erweitern von Brüchen ist nicht nur für das Vergleichen von Bedeutung, sondern auch für die Addition und die Subtraktion.

2.8 Rechnen mit einfachen Brüchen vor der Einführung von Rechenregeln

- Vor der Einführung von Rechenregeln sollten die Schüler mit einfachen Brüchen rechnen und dabei inhaltlich und anschaulich vorgehen. Ein wichtiges Ziel ist, dass sie erkennen, dass sich viele Aufgaben ohne (oft nur auswendig gelernte und nicht wirklich verstandene) Kalküle lösen lassen.



Rechnen mit Halben, Vierteln und Achteln

5. Auf dem Tisch liegen 24 Nüsse. Sie werden an vier Kinder verteilt. Jedes Kind bekommt $\frac{1}{4}$ von 24 Nüssen. Schreibe: $\frac{1}{4}$ von 24 = $\square$

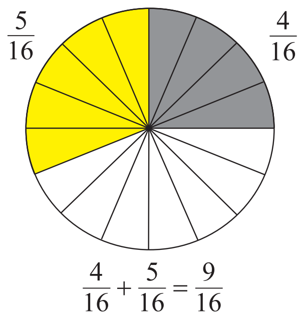
6. a) $\frac{1}{2}$ von 24	$\frac{3}{4}$ von 24	$\frac{2}{4}$ von 24	$\frac{1}{8}$ von 24	
b) $\frac{2}{8}$ von 24	$\frac{4}{8}$ von 24	$\frac{5}{8}$ von 24	$\frac{6}{8}$ von 24	
11. a) $\frac{3}{4}$ von 24	$\frac{5}{8}$ von 160	$\frac{4}{8}$ von 200	$\frac{2}{4}$ von 200	$\frac{1}{2}$ von 200
b) $\frac{3}{8}$ von 64	$\frac{7}{8}$ von 720	$\frac{3}{4}$ von 240	$\frac{6}{8}$ von 240	$\frac{2}{8}$ von 400
c) $\frac{1}{8}$ von 48	$\frac{3}{8}$ von 480	$\frac{7}{8}$ von 480	$\frac{7}{8}$ von 960	$\frac{7}{8}$ von 240

12. Ute hat 60 DM als Geschenk erhalten. Sie gibt $\frac{1}{4}$ an ihre Schwester ab. Berechne diesen Betrag. Welcher Bruchteil (wieviel Geld) bleibt ihr?

Auszug aus einem älteren Schulbuch („Die Welt der Zahl“, Hauptschule, Kl. 7)

- Lösungskalküle sollten erst nach dem inhaltlichen und anschaulichen Bearbeiten einfacher Beispiele erarbeitet und angewendet werden.
- Auch danach sollten die Schüler sich stets fragen, ob es notwendig ist, Kalküle zu verwenden oder Nachdenken nicht schneller und sicherer zum Ziel führt.
- Vorgehen: Vom Speziellen zum Allgemeinen.

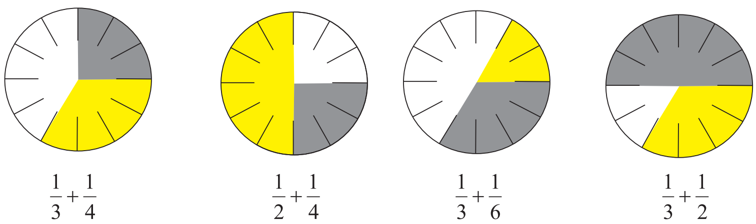
Addition und Subtraktion von Brüchen mit gleichem Nenner



- Das Rechnen mit natürlichen Zahlen lässt sich in diesem Spezialfall auf Brüche übertragen.
- *Quasikardinales Vorgehen*:
  Der durch den Nenner gegebene Teil des Ganzen wird als Einheit (z. B. Tortenstück), die Zähler werden als Anzahlen aufgefasst.
- Der ansonsten häufig gemachte Fehler $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ erscheint in diesem Spezialfall absurd.
- Gemischte Zahlen können einbezogen werden: $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$.

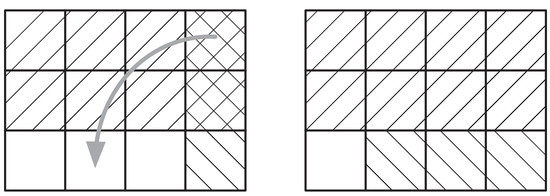
Gemischte Nenner: einfache Fälle

- Handelt es sich bei den Nennern um Teiler von 12, so kann mit der Uhr gearbeitet werden.



- Eine andere – besser verallgemeinerbare – Möglichkeit ist die Nutzung von Rechtecken.

  Für die Addition $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ unterteilt man ein Rechteck waagerecht dreimal (entsprechend dem 1. Nenner) und senkrecht viermal (entsprechend dem 2. Nenner). Dann lassen sich beide Größen in dem Rechteck veranschaulichen und das Ergebnis $\frac{11}{12}$ kann entnommen werden.



2.9 Addition und Subtraktion

- Der Hauptnenner wird anhand im Vorangegangenen beschriebener einfacher Beispiele anschaulich.
- Für das Problem der *Hauptnennerbestimmung* Hilfen geben:
  Beispiel: $\frac{7}{12} - \frac{9}{20}$; wie finde ich den Hauptnenner?
  $\Rightarrow$ Suche in der 20-er Reihe das erste Vielfache von 12: 20, 40, 60.
- Es ist nicht sehr schlimm, wenn Schüler nicht den kleinsten gemeinsamen Nenner (Hauptnenner) finden, sondern einen größeren gemeinsamen Nenner verwenden. (Mit dem gemeinsamen Nenner 120 lässt sich obige Aufgabe ebenfalls leicht lösen.) Sie sollten aber erkennen, dass unnötig große Nenner die Fehlergefahr erhöhen.

Ausgehend von den dargestellten Überlegungen (die für die Subtraktion analog durchzuführen sind) lassen sich die Regeln für die Addition und Subtraktion von Brüchen einführen.

Schrittfolge üben:

Aufgabe	(kleinster) gemeinsamer Nenner	Brüche erweitern	Addieren bzw. Subtrahieren	Kürzen (falls möglich)
$\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$	15	$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$; $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$	$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15}$	–
$\frac{4}{5} - \frac{5}{8}$	40	$\frac{4}{5} = \frac{32}{40}$; $\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$	$\frac{4}{5} - \frac{5}{8} = \frac{32}{40} - \frac{25}{40} = \frac{7}{40}$	–
$\frac{13}{20} + \frac{17}{25}$	100	$\frac{13}{20} = \frac{65}{100}$; $\frac{17}{25} = \frac{68}{100}$	$\frac{13}{20} + \frac{17}{25} = \frac{65}{100} + \frac{68}{100} = \frac{133}{100}$	–

- Mitunter sollten Ergebnisse, die größer als 1 sind, in *gemischte Zahlen* umgewandelt werden (z. B. $\frac{19}{15} = 1\frac{4}{15}$ und $\frac{133}{100} = 1\frac{33}{100}$, wobei sich in letzterem Falle natürlich eher die *Darstellung als Dezimalbruch* anbietet).

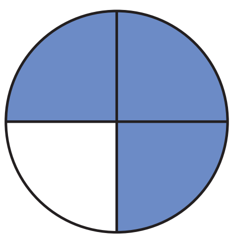
2.10 Multiplikation und Division

Die Anwendung der Regel für die Multiplikation von Brüchen fällt Schülern leichter als die der Addition, trotzdem werden – gerade in späteren Schuljahren – Fehler gemacht, wenn sie sich nicht mehr daran erinnern, *welche* Regel anzuwenden ist. Einem inhaltlichen Verständnis der Regel kommt also hohe Bedeutung zu.

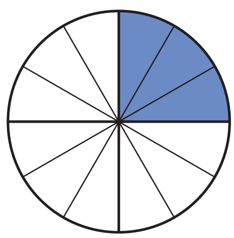
Vervielfachen von Brüchen (natürliche Zahl mal Bruch)

- Dieser Spezialfall lässt sich leicht als wiederholte Addition deuten: $3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{12}{7}$.
- Veranschaulichungen sind wie bei der Addition möglich.
- Wichtig ist es, zu verhindern, dass Schüler das *Vervielfachen* von Brüchen (Multiplikation mit natürlichen Zahlen) mit dem *Erweitern verwechseln*.

Vervielfachen:
$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



Erweitern:
$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$



Vervielfachen von Brüchen (Bruch mal natürliche Zahl)

- Die Kommutativität der Multiplikation natürlicher Zahlen ist den Schülern seit langem bekannt („Vertauschungsgesetz“). Nimmt man sie als gegeben, so lassen sich Aufgaben der Art „Bruch mal natürliche Zahl“ auf o. g. Aufgaben „natürliche Zahl mal Bruch“ zurückführen.
- Die Reihenfolge „Bruch mal natürliche Zahl“ lässt sich auch eigenständig plausibel machen, wobei der „von-Ansatz“ zum Tragen kommt, der auch für die allgemeine Multiplikation von Brüchen Bedeutung besitzt.
- $\frac{1}{4} \cdot 3$ kann interpretiert werden als „ein Viertel von drei“ (oder auch: drei geteilt durch vier); z. B.: ein Kind erhält ein Viertel von drei Pizzen, vier Kinder teilen sich drei Pizzen.
- Es ergibt sich dasselbe Ergebnis wie bei der Interpretation „natürliche Zahl mal Bruch“, also ist $\frac{1}{4} \cdot 3 = 3 \cdot \frac{1}{4}$; das Kommutativgesetz kann somit plausibel gemacht werden.

Zusammenfassung:

Ein Bruch wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem man den Zähler des Bruchs mit dieser Zahl multipliziert und den Nenner beibehält.

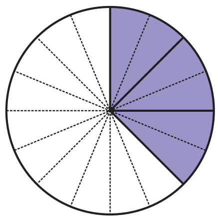
Division von Brüchen durch natürliche Zahlen

Beispiel 1: $\frac{6}{16}$ einer Torte werden an 3 Kinder verteilt. Wie viel erhält jedes Kind?

Beispiel 2: $\frac{3}{4}$ einer Torte werden an 4 Kinder verteilt. Wie viel erhält jedes Kind?

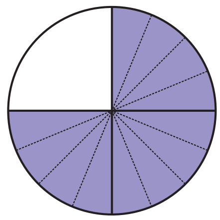
Beispiel 1:

$$\frac{6}{16} : 3 = \frac{6:3}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$



Beispiel 2:

$$\frac{3}{4} : 4 = \frac{3}{4 \cdot 4} = \frac{3}{16}$$



Die Division von Brüchen durch natürliche Zahlen ist durch *Teilen des Zählers durch die natürliche Zahl* oder durch *Multiplizieren des Nenners mit der natürlichen Zahl* möglich. (Die erste Variante ist ein spezieller Fall, der nur anwendbar ist, wenn der Zähler durch die natürliche Zahl teilbar ist.)

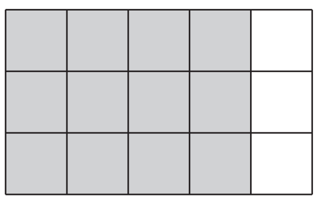
Die Multiplikation von Brüchen (allgemein)

- Ziel ist es, die bekannte Regel $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ für Schüler wirklich plausibel werden zu lassen.
- Aus den bereits diskutierten Spezialfällen ergibt sich $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b}$ und $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a}{b \cdot d}$.

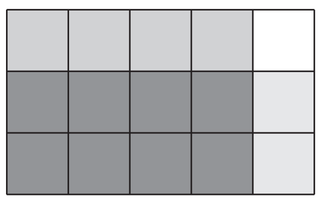
  Aus beiden Regeln lässt sich die allgemeine Regel der Multiplikation zusammensetzen. Allerdings ist dies für viele Schüler der betreffenden Altersstufe nicht hinreichend anschaulich.
- Als sehr sinnvoll für die Veranschaulichung der Multiplikation von Brüchen hat sich der *von-Ansatz* erwiesen.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \text{ von } \frac{4}{5}$$

- Durch Flächenteile lässt sich verdeutlichen, was $\frac{2}{3}$ *von* $\frac{4}{5}$ bedeutet.
- Der Zeichnung lässt sich entnehmen: $\frac{2}{3}$ *von* $\frac{4}{5}$ der Gesamtfläche sind $\frac{8}{15}$ der Gesamtfläche, also $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

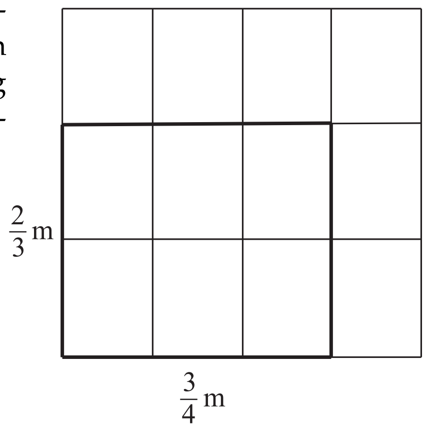


$\frac{4}{5}$ der Fläche



$\frac{2}{3}$ *von* $\frac{4}{5}$ der Fläche

- Auf analoge Weise sollten die Schüler eine Reihe von Aufgaben mithilfe von Karopapier lösen und auch später, wenn sie schon die Formel verwenden, mitunter einen Bezug zu dieser „geometrischen“ Multiplikation anhand des von-Ansatzes herstellen.



Flächeninhaltsberechnung:

- Ein Rechteck ist $a = \frac{3}{4}$ m lang und $b = \frac{2}{3}$ m breit.

  Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck?

  $F = a \cdot b = \frac{3}{4}\,\mathrm{m} \cdot \frac{2}{3}\,\mathrm{m} = \frac{6}{12}\,\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}^2$

Die Division von Brüchen

Die Division $a : b$ lässt sich interpretieren durch die Frage: *Wie oft passt b in a?*

- Beispiel in den natürlichen Zahlen: Wie oft passt 3 in 12?

  Als Sachaufgabe: Verpacke 12 Äpfel in Netze zu je 3 Äpfeln. Wie viele Netze erhältst du?

Diese Interpretation der Division lässt sich als *Messen* auffassen (man misst 12 mit 3, etwa eine Entfernung von 12 m mit einer 3 m langen Messlatte).

Beispiele für die Division von Brüchen:

- Wie viele $\frac{1}{4}$ l Becher kannst du mit einer $2\frac{1}{2}$ l-Flasche füllen?
- Wie oft passt eine $\frac{1}{2}$ m lange Messlatte in einen $3\frac{1}{2}$ m langen Balken?
- $2\frac{1}{2}$ l Saft sollen in $\frac{3}{4}$ l Flaschen abgefüllt werden. Wie viele Flaschen erhält man?

Diese Divisionsaufgaben lassen sich konkret inhaltlich lösen (ohne Regel). Ist das Ergebnis nicht ganzzahlig (wie im letzten Beispiel), so ist eine Abschätzung möglich.

Erarbeitung der Regel für die Division von Brüchen durch Permanenzreihen

Serien bekannter Aufgaben führen zu Folgen von Ergebnissen, die sich logisch fortsetzen lassen.

Was fällt an den Rechenreihen auf? Setze gesetzmäßig fort.

$16 : 8 = 2$
$16 : 4 = 4$
$16 : 2 = 8$
$16 : 1 = 16$
$16 : \frac{1}{2} = \mathbf{32}$

- Der Dividend bleibt in allen Aufgaben unverändert 16.
- Der *Divisor* wird jeweils *halbiert*.
- Bei jeder Halbierung des Divisors *verdoppelt* sich der *Quotient*.
- Diese Gesetzmäßigkeit gilt für natürliche Zahlen und auch für den Fall „Bruch durch natürliche Zahl“, wie anhand anderer Beispiele deutlich wird.
- Sollte diese Gesetzmäßigkeit auch – im Sinne des Permanenzprinzips – für den Fall gelten, dass der Divisor ein Bruch ist, so müsste gelten: $16 : \frac{1}{2} = \mathbf{32}$.

Weitere Beispiele für Permanenzreihen zur Division:

$16 : 8 = 2$	$\frac{1}{4} : 8 =$	$36 : 18 =$
$16 : 4 = 4$	$\frac{1}{4} : 4 =$	$36 : 6 =$
$16 : 2 = 8$	$\frac{1}{4} : 2 =$	$36 : 2 =$
$16 : 1 = 16$	$\frac{1}{4} : 1 =$	$36 : \frac{2}{3} =$
$16 : \frac{1}{2} =$	$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} =$	$36 : \frac{2}{9} =$

Ausführlicher siehe:
PADBERG, F.: *Didaktik der Bruchrechnung*, S. 165f (3. Aufl.).

3 Zur Behandlung der rationalen Zahlen

3.1 Historische Bemerkungen

Antike (Griechenland):

- Zunächst nur natürliche Zahlen (ohne die Zahl Null) und Verhältnisse natürlicher Zahlen (bis ins 6. Jahrhundert). Irrationale Zahlen (als Streckenverhältnisse) wurden bereits entdeckt (Hippasos, ca. 400 v. Chr.). Negative Zahlen wurden jedoch nicht betrachtet.

Indien:

- Einführung der Zahl Null und der negativen Zahlen in die Mathematik im 7. Jahrhundert.

Europa:

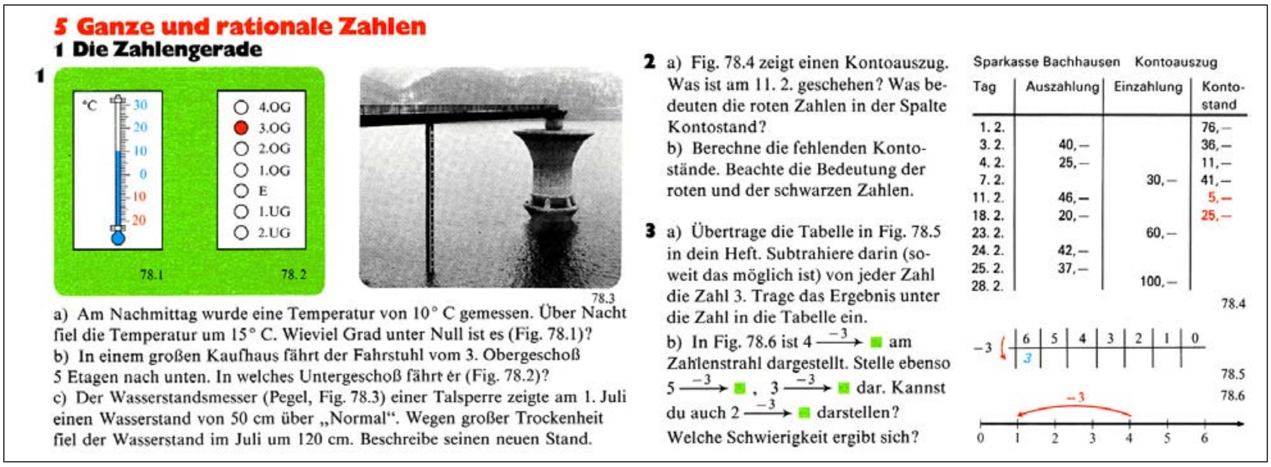
- FRANCOIS VIETA (1540–1603) vermied negative Zahlen.
- RENE DESCARTES (1596–1650) sprach von falschen Lösungen, wenn eine Gleichung negative Zahlen als Lösung hatte.
- CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855): „*Positive und negative Zahlen können nur da eine Verwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht, der Vernichtung gleichzustellen ist.*“

3.2 Herangehensweisen / Beispiele zur Einführung negativer Zahlen

Aus dem täglichen Leben sind negative Zahlen vor allem in zwei Zusammenhängen vertraut:

- *Temperaturen* (über/unter 0°C),
- *Kontostände* (Soll/Haben).

Ein drittes Beispiel sind Höhenangaben (über/unter NN).



5 Ganze und rationale Zahlen

1 Die Zahlengerade

1

a) Am Nachmittag wurde eine Temperatur von 10° C gemessen. Über Nacht fiel die Temperatur um 15° C. Wieviel Grad unter Null ist es (Fig. 78.1)?
b) In einem großen Kaufhaus fährt der Fahrstuhl vom 3. Obergeschoß 5 Etagen nach unten. In welches Untergeschoß fährt er (Fig. 78.2)?
c) Der Wasserstandsmesser (Pegel, Fig. 78.3) einer Talsperre zeigte am 1. Juli einen Wasserstand von 50 cm über „Normal“. Wegen großer Trockenheit fiel der Wasserstand im Juli um 120 cm. Beschreibe seinen neuen Stand.

2 a) Fig. 78.4 zeigt einen Kontoauszug. Was ist am 11. 2. geschehen? Was bedeuten die roten Zahlen in der Spalte Kontostand?
b) Berechne die fehlenden Kontostände. Beachte die Bedeutung der roten und der schwarzen Zahlen.

3 a) Übertrage die Tabelle in Fig. 78.5 in dein Heft. Subtrahiere darin (soweit das möglich ist) von jeder Zahl die Zahl 3. Trage das Ergebnis unter die Zahl in die Tabelle ein.
b) In Fig. 78.6 ist $4 \xrightarrow{-3} ■$ am Zahlenstrahl dargestellt. Stelle ebenso $5 \xrightarrow{-3} ■$, $3 \xrightarrow{-3} ■$ dar. Kannst du auch $2 \xrightarrow{-3} ■$ darstellen? Welche Schwierigkeit ergibt sich?

Sparkasse Bachhausen Kontoauszug

Tag	Auszahlung	Einzahlung	Kontostand
1. 2.			76,–
3. 2.	40,–		36,–
4. 2.	25,–		11,–
7. 2.		30,–	41,–
11. 2.	46,–		5,–
18. 2.	20,–		25,–
23. 2.		60,–	
24. 2.	42,–		
25. 2.	37,–		
28. 2.		100,–	

78.4

	6	5	4	3	2	1	0
−3	3						

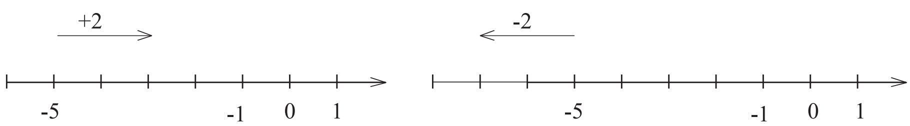
78.5

78.6

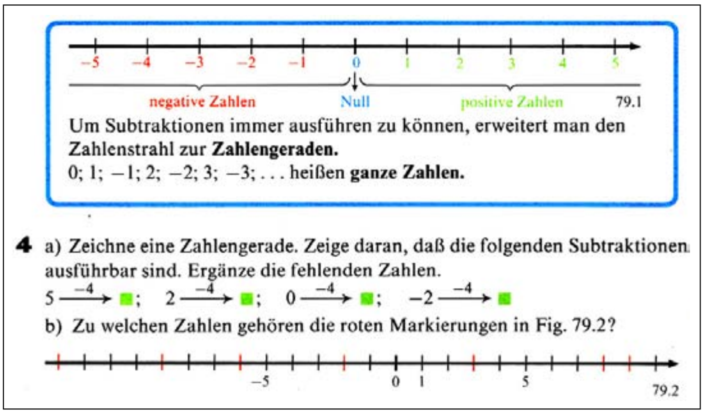
Einführung negativer Zahlen in einem älteren Schulbuch (Gamma 7, Hauptschule)

Von Anfang an sollten die Zahlengerade und die Ordnung auf ihr betrachtet werden.

- $-5+2=\ ?$ *Es ist* -5°*C kalt und wird um* 2°*C wärmer/kälter. Welche Temperatur herrscht jetzt?*
- $-5-2=\ ?$ (Entsprechend bei Höhenangaben, Kontoständen usw.)



Die Zahlengerade hat eine hohe Bedeutung für das Verständnis von und die Arbeit mit rationalen Zahlen. Die obigen Beispiele zeigen, dass sich durch inhaltliche Überlegungen anhand der Zahlengeraden auch einfache Aufgaben lösen lassen, ohne dafür Regeln zu kennen. Genutzt werden sollte dazu auch der sehr leicht herzustellende Bezug zwischen der Zahlengeraden und einer Thermometerskale.



Schulbuchkopie: Gamma 7 (Hauptschule)

Auch für die Einführung / Begriffsbestimmung der rationalen Zahlen ist die Zahlengerade bedeutsam:

Die negativen rationalen Zahlen werden durch *Symmetrisierung* aus den gebrochenen Zahlen gewonnen ⇒ Erweiterung des *Zahlenstrahls zur Zahlengeraden* durch Spiegelung am Nullpunkt.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist der der „Gegenzahlen“:

Der Bereich der rationalen Zahlen ergibt sich als Vereinigung der Menge der gebrochenen Zahlen und der Menge der zu ihnen entgegengesetzten Zahlen.

Anmerkung: Es handelt sich hierbei nicht um eine fachlich saubere Definition des Bereichs der rationalen Zahlen, sondern um eine Möglichkeit, diesen Bereich in der Sekundarstufe I anschaulich und plausibel einzuführen.

Weiterer Aspekt der Einführung rationaler Zahlen: Rationale Zahlen sind *Äquivalenzklassen von Paaren differenzengleicher gebrochener Zahlen* (Beispiel: Gutschein-/Schuldscheinmodell, siehe weiter hinten).

Einige weitere Beispiele:

Darunter (negativ)	**Vergleichswert**	**Darüber (positiv)**
Geringeres Einkommen	durchschnittliches Einkommen	Besseres Einkommen
Untergewicht	Normalgewicht	Übergewicht
Schulden	ausgeglichenes Konto	Guthaben
Unterdruck	Solldruck (bei Reifen)	Überdruck
Vor Christi Geburt	Christi Geburt	nach Christi Geburt
Unter Gefrierpunkt	Gefrierpunkt	über Gefrierpunkt
Unter Normalnull	Normalnull/ Meereshöhe	über Normalnull
Niedrigwasser	normaler Pegelstand	Hochwasser
Unterproduktion	Produktionssoll	Überproduktion
westliche Länge	Nullmeridian	östliche Länge
Verbilligung	Preis im Vergleichsjahr	Verteuerung

Probleme mit der Kleiner-Relation

„Kleiner als“ bedeutete in den natürlichen Zahlen auch:

- „weniger der Anzahl nach“,
- „kommt beim Zählen eher dran“,
- „hat höchstens so viele Stellen wie“.

Der Rückgriff auf die Zahlengerade ist wichtig, um Irrtümer zu vermeiden, gibt dafür jedoch noch keine Gewähr: Es besteht die Gefahr, dass die Schüler die Zahlen „in zwei Hälften aufteilen“, die positiven und die negativen und jede Hälfte für sich betrachten.

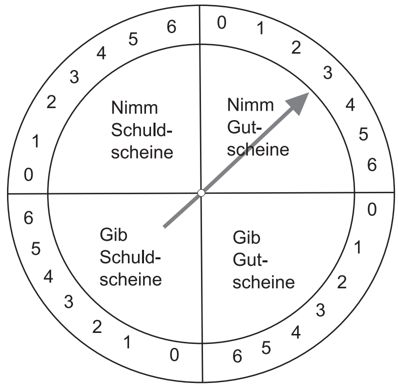
Möglicher Denkfehler: $-279 > -2$, denn $279 > 2$
(denn 279 € Schulden sind ja auch mehr als 2 € Schulden)

Abhilfe: Rückgriff ins Modell (kälter, weniger, tiefer), konsequentes Durchlaufen der Zahlengeraden von links nach rechts, „kleiner“ heißt „liegt links von“.

3.3 Einstiege in die Addition und Subtraktion rationaler Zahlen

Das Gutschein- / Schuldscheinspiel

- Es stehen Gutscheine und Schuldscheine zur Verfügung. Ein Gutschein und ein Schuldschein heben sich im Wert auf.
- Durch einen Zufallsmechanismus (Glücksrad mit entsprechender Beschriftung oder Stapel gemischter Karten mit Anweisungen) erhalten die Schüler Befehle der Art „Nimm … Gutscheine“, „Nimm … Schuldscheine“, „Gib … Gutscheine ab’, „Gib … Schuldscheine ab“.
- Gewonnen hat, wer am Ende des Spiels am reichsten ist. (Der Spielstand für jeden Schüler wird nur in Gutscheinen oder in Schuldscheinen notiert, also z. B. nicht 5 Gutscheine, 3 Schuldscheine, sondern 2 Gutscheine.)



Das Spiel steht der Auffassung von ganzen Zahlen als Klassen differenzengleicher Paare natürlicher Zahlen nahe (Äquivalenzklassenkonzept). So wird die Zahl -5 durch 0 Gutscheine und 5 Schuldscheine, oder 1 Gutschein und 6 Schuldscheine oder 7 Gutscheine und 12 Schuldscheine usw. repräsentiert.

Erklärung von Aufgaben zur Addition und Subtraktion anhand des Gutschein-Schuldschein-Modells:

$-5+2$	Du hast 5 Schuldscheine und bekommst 2 Gutscheine dazu. Wie „reich“ bist du nun? (2 Nullpaare ablegen)
$-5-2$	Du hast 5 Schuldscheine und sollst 2 Gutscheine abgeben. (Das ist möglich, wenn du 2 „Nullpaare“ aufnimmst.)
$-5+(-2)$	Du hast 5 Schuldscheine und bekommst 2 Schuldscheine dazu.
$-5-(-2)$	Du hast 5 Schuldscheine und gibst 2 Schuldscheine ab.

Statt allgemeiner Regeln zum Addieren/Subtrahieren ganzer (rationaler) Zahlen sind beispielgebundene Formulierungen für viele Schüler hilfreicher:

6 – (–2) rechne ich als 6 + 2

6 + (–2) rechne ich als 6 – 2

Eine Begründung kann über das Spiel gegeben werden:

- Statt Schuldscheine abzugeben, kann ich Gutscheine aufnehmen: 6 – (–2) = 6 + 2
- Statt Schuldscheine aufzunehmen, kann ich Gutscheine abgeben: 6 + (–2) = 6 – 2

Als Ergänzung zu dieser modellhaften Begründung lassen sich *Permanenzreihen* betrachten, bei denen die Schüler einfache Rechenreihen gesetzmäßig fortsetzen:

$3+2 = 5$	$3-2 = 1$	$5-2 = 3$
$3+1 = 4$	$3-1 = 2$	$4-1 = 3$
$3+0 = 3$	$3-0 = 3$	$3-0 = 3$
$3+(-1) =$	$3-(-1) =$	$2-(-1) =$
$3+(-2) =$	$3-(-2) =$	$1-(-2) =$
$3+(-3) =$	$3-(-3) =$	$0-(-3) =$

3.4 Multiplikation rationaler Zahlen

W. R. HAMILTON (irischer Mathematiker 1805–1865) fragte sich noch 1833, wie es erklärlich ist, *„dass zwei Zahlen, die weniger als nichts sind, ein Produkt haben können, das mehr als nichts sein soll."*

Weitere Äußerungen zu der Thematik:

„Fast kein Abiturient ... weiß (das heißt: versteht einem Anderen klarzumachen), warum zum Beispiel ‚Minus mal Minus Plus' gibt." WAGENSCHEIN, 1962

„... nur einige der leistungsstärksten Schüler erfassen, dass es sich bei der Einführung negativer Zahlen um eine Zahlbereichserweiterung im systematischen Sinne handelt, schwächere Schüler legen sich eine Art "Regel-Hilfs-Welt"für das Rechnen zu."
Speziell: *„Bei der Multiplikation bleibt der Fall ‚Minus mal Minus'am unsichersten"*. ANDELFINGER

Gleichungsansatz (FREUDENTHAL)

„-3 ist das Ding mit dem man so rechnet, als ob $(-3)+3=0$ sei."

„Man kann auf diesen Ansatz das Rechnen mit negativen Zahlen gründen, z. B. aus

$$(-3)+3=0 \qquad \text{und} \qquad (-4)+4=0$$

durch Addition ableiten, dass

$$((-3)+(-4))+(3+4)=0$$

ist, also dass

$$(-3)+(-4)=-(3+4)$$

ist, oder auch durch Multiplikation der ersten Gleichung mit 4 und der zweiten mit -3, dass

$$4\cdot(-3)+4\cdot 3=0 \qquad \text{und} \qquad (-4)\cdot(-3)+4\cdot(-3)=0$$

ist, woraus dann

$$(-4)\cdot(-3)=4\cdot 3$$

folgt."

FREUDENTHAL, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band 1, S. 209

Kontomodell (nach WINTER)

Ein wichtiger Ansatz der Einführung der Multiplikation rationaler Zahlen ist die Betrachtung von *Permanenzreihen*, die bereits in anderen Zusammenhängen erwähnt wurden. Dieser Ansatz liegt auch dem Kontomodell (nach WINTER) zugrunde:

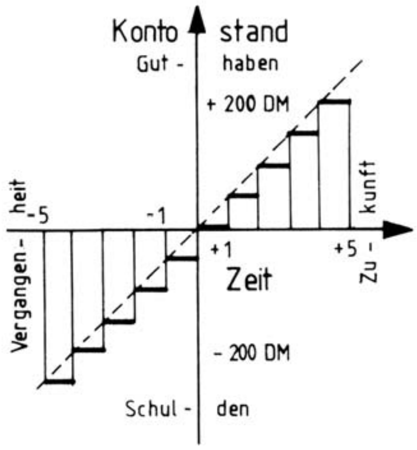
„Auf ein Konto wurde bis jetzt zu jedem Monatsersten ein Betrag von 50 €[2] eingezahlt, und das soll auch weiter so geschehen. Heute ist ein Monatserster, es ist ein Eingang von 50 € gewesen, und der Kontostand ist jetzt ausgeglichen."

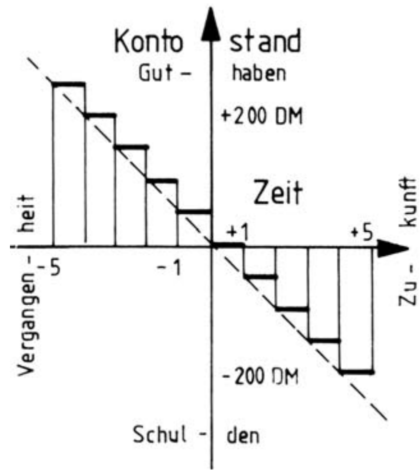
–2	für	„vor 2 Monaten"
+3	für	„in drei Monaten"
–100 €	für	„100 € Schulden"
+50 €	für	„50 € Guthaben".

Kontostand in drei Monaten:	+150 €	=	(+3) · (+50 €)
Analogie: Kontostand vor drei Monaten:	–150 €	=	(–3) · (+50 €)

[2] Die Beschreibung des Modells ist dem (sehr empfehlenswerten) Buch *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht* von HEINRICH WINTER (Braunschweig: Vieweg, 1991) entnommen. Die Angaben sind dort in DM gemacht (siehe die Abbildungen) und wurden hier einfach in € abgeändert.

$$
\begin{array}{rcl}
(+3) \cdot (+50\,€) & = & +150\,€ \\
(+2) \cdot (+50\,€) & = & +100\,€ \\
(+1) \cdot (+50\,€) & = & +50\,€ \\
0 \cdot (+50\,€) & = & 0\,€ \\
(-1) \cdot (+50\,€) & = & -50\,€ \\
(-2) \cdot (+50\,€) & = & -100\,€ \\
(-3) \cdot (+50\,€) & = & -150\,€
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcl}
(+3) \cdot (-50\,€) & = & -150\,€ \\
(+2) \cdot (-50\,€) & = & -100\,€ \\
(+1) \cdot (-50\,€) & = & -50\,€ \\
0 \cdot (-50\,€) & = & 0\,€ \\
(-1) \cdot (-50\,€) & = & +50\,€ \\
(-2) \cdot (-50\,€) & = & +100\,€ \\
(-3) \cdot (-50\,€) & = & +150\,€
\end{array}
$$



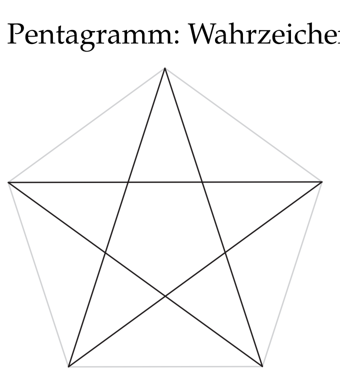


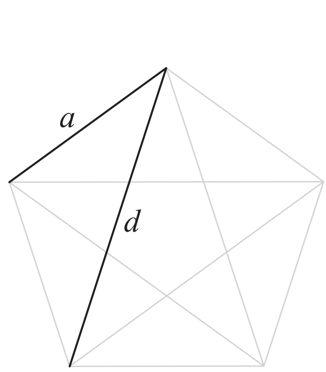
4 Reelle Zahlen im Mathematikunterricht der SI

4.1 Historische Bemerkungen zur Entdeckung irrationaler Zahlen

Irrationale Zahlen wurden zunächst als *inkommensurable Strecken* (Strecken ohne gemeinsames „Maß“, d. h. mit einem irrationalen Längenverhältnis) entdeckt.

- Pentagramm: Wahrzeichen der Pythagoreer





$$\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

- Hippasos von Metapont (6.-5. Jh. v. Chr.): Verhältnis von Diagonalen- und Seitenlänge im regelmäßigen Fünfeck ist irrational.
- „Grundlagenkrise“ des pythagoreischen Weltbildes oder Geheimnisverrat? („Strafe der Götter“: Hippasos ertrank im Meer.)

4.2 Reelle Zahlen in den Rahmenlehrplänen der Sekundarstufe I

Auszüge aus dem Berliner Rahmenlehrplan (Leitidee Zahl, Klasse 9/10)

Die folgenden Kompetenzen zum Argumentieren und Kommunizieren und zur Leitidee Zahl bilden den Schwerpunkt dieses Moduls:

- Erläutern der Eigenschaften irrationaler Zahlen
- Begründen der Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung
- Verwenden von reellen Zahlen zur Lösung von Problemen und zur Darstellung mathematischer Sachverhalte

Schülertätigkeiten:

*
- unterscheiden rationale und irrationale Zahlen,
- beschreiben die Menge der reellen Zahlen,
- bestimmen Quadratwurzeln näherungsweise mit dem Taschenrechner und runden situationsangemessen,
- ...

**
- begründen die Notwendigkeit, den Zahlbereich um die irrationalen Zahlen zu erweitern,
- stellen abbrechende und einfache periodische Dezimalzahlen als Brüche dar,
- konstruieren einige Quadratwurzeln geometrisch auch auf der Zahlengeraden,
- beschreiben Quadratwurzeln an Beispielen durch ein Näherungsverfahren (Intervallschachtelung),
- ...

***
- beweisen die Irrationalität einer Quadratwurzel (indirekter Beweis),
- beschreiben die Zahl π durch ein Näherungsverfahren.

4.3 Zugänge zu irrationalen Zahlen

Meist (fast immer) werden irrationale Zahlen im Zusammenhang mit Wurzeln eingeführt. Folgende Problemstellungen können in Klasse 9 auf $\sqrt{2}$ führen:

- Bestimme die Zahl(en), deren Quadrat 2 ist.
- Bestimme zu einem gegebenen Quadrat die Seitenlänge eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt.
- Wie lang ist eine Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1?

4.3.1 Intervallschachtelungen

Bestimmung eines Näherungswertes für $\sqrt{2}$ über Intervallschachtelung

- $\sqrt{2}$ ist größer als 1 und kleiner als 2, denn $1^2 < 2$ und $2^2 > 2$.
- Bildung der Intervallmitte – liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$ oder zwischen $1,5$ und 2 (oder ist $\sqrt{2} = 1,5$)?
- $1,5^2 > 2$, also liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$.
- Bildung der Intervallmitte: $1,25$ ... und weiter ...

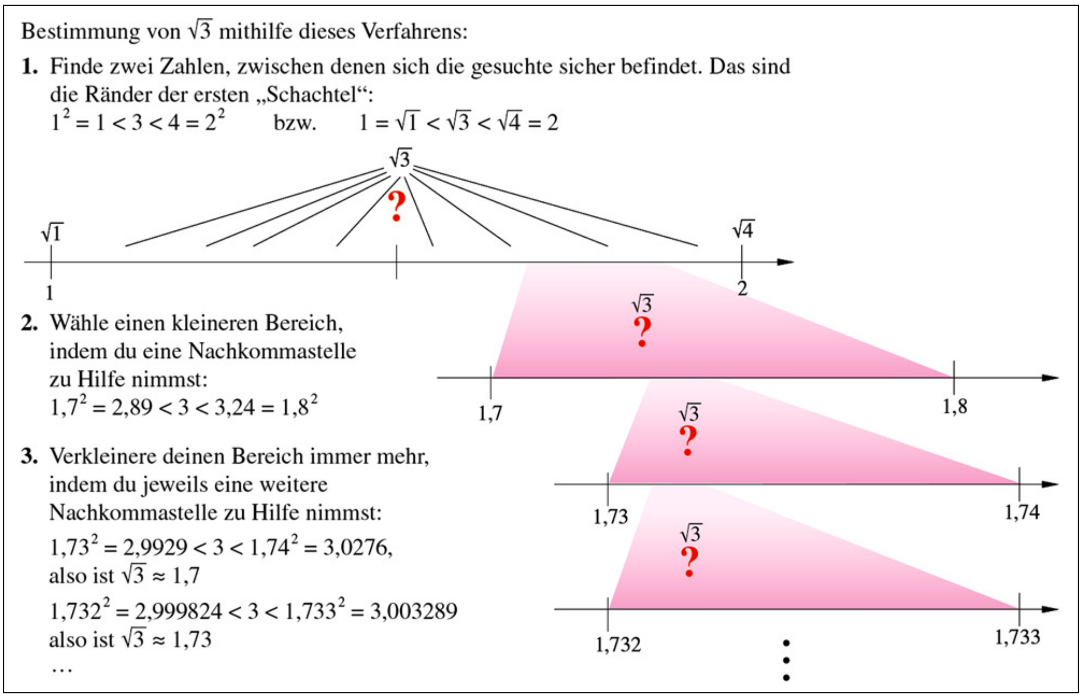
Anfangswert	Endwert	Mittelwert	Mittelwert^2	Mittelwert$^2 > 2$?
1	2	1,5	2,25	ja
1	1,5	1,25	1,5625	nein
1,25	1,5	1,375	1,890625	nein
1,375	1,5	1,4375	2,06640625	ja

- Sinnvoll: Computernutzung (Tabellenkalkulation)

Ist $\sqrt{2}$ wirklich irrational?

- Auch wenn das Verfahren der Intervallschachtelung über sehr viele Schritte geführt wird, ist noch nicht gesichert, dass es nicht doch irgendwann abbricht.
- Noch weniger ist gesichert, dass $\sqrt{2}$ kein endlicher oder periodischer Dezimalbruch ist.
- Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist nötig (d. h. $\sqrt{2}$ lässt sich nicht durch $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ darstellen).

Neben der Intervallhalbierung sind auch andere Methoden der „Einschachtelung" irrationaler Zahlen möglich. Der Bezug zu dem Stellenwertsystem tritt bei „Intervallzehntelung" besonders deutlich hervor.


Bestimmung von $\sqrt{3}$ mithilfe dieses Verfahrens:

1. Finde zwei Zahlen, zwischen denen sich die gesuchte sicher befindet. Das sind die Ränder der ersten „Schachtel":
$1^2 = 1 < 3 < 4 = 2^2$ bzw. $1 = \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$

2. Wähle einen kleineren Bereich, indem du eine Nachkommastelle zu Hilfe nimmst:
$1{,}7^2 = 2{,}89 < 3 < 3{,}24 = 1{,}8^2$

3. Verkleinere deinen Bereich immer mehr, indem du jeweils eine weitere Nachkommastelle zu Hilfe nimmst:
$1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3 < 1{,}74^2 = 3{,}0276$,
also ist $\sqrt{3} \approx 1{,}7$
$1{,}732^2 = 2{,}999824 < 3 < 1{,}733^2 = 3{,}003289$
also ist $\sqrt{3} \approx 1{,}73$
…

Näherungsweise Bestimmung von $\sqrt{3}$ mittels „Intervallzehntelung" in einem Schulbuch: Fokus 4 (Mathematik 8 B/W), Cornelsen, 2007.

Nach diesen Überlegungen führt dasselbe Schulbuch den Begriff „reelle Zahl" folgendermaßen ein:

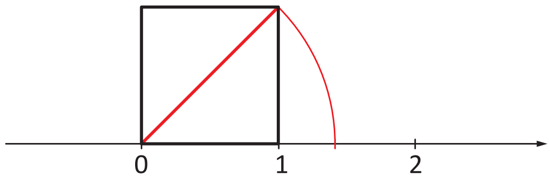
> Beispiele für irrationale Zahlen sind:
> $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$; $\sqrt{21}$, aber auch π oder 0,1002000300004000005… oder 1,22333444455555….
>
> Die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ setzt sich zusammen aus der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der Menge der **irrationalen Zahlen**, den nicht abbrechenden und nicht periodischen Dezimalzahlen.
> **Jedem Punkt** auf der Zahlengeraden ist nun **genau eine Zahl** zugeordnet: eine abbrechende bzw. periodische oder eine nicht abbrechende Dezimalzahl.

Aus: Fokus 4 (Mathematik 8 B/W), Cornelsen, 2007.

4.4 Geometrische Interpretation irrationaler Zahlen

Auch wenn der Zugang zu irrationalen Zahlen arithmetisch erfolgt, ist eine geometrische Interpretation von hoher Bedeutung.[3]

- Die rationalen Zahlen liegen auf der Zahlengerade zwar dicht.
- Dennoch bleiben „Löcher“.



4.4.1 Reelle Zahlen und Strahlensätze

Der Zusammenhang zwischen irrationalen Zahlen und inkommensurablen Strecken wird u. a. anhand der Strahlensätze deutlich, die oft in demselben Schuljahr behandelt werden wie die reellen Zahlen (meist in Klasse 9). Dieser Zusammenhang kann sogar für die Einführung der Multiplikation reeller Zahlen genutzt werden. Die folgenden Auszüge aus einem Schulbuch verdeutlichen dies.

> Wenn zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eine gemeinsame Einheitsstrecke e haben, so sagt man: $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ haben ein **gemeinsames Maß**.
> Es gilt dann $\overline{AB} = m \cdot e$ und $\overline{CD} = n \cdot e$, wobei $m, n \in \mathbb{N}$.
> Wir können nun die Strahlensätze für den Fall beweisen, daß entsprechende Strecken ein gemeinsames Maß haben.
> Vielleicht meinst du, daß die Forderung nach der Existenz eines gemeinsamen Maßes etwas versponnen ist. Die Beantwortung der damit zusammenhängenden Fragen ist aber gar nicht so einfach: Findest du selbst eine Antwort auf die Frage, ob $a = 1{,}\overline{3}$ und $b = 0{,}\overline{6}$ ein gemeinsames Maß haben?

Multiplikation in $\mathbb{R}$

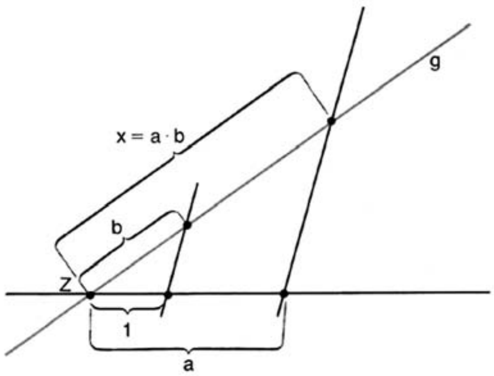
Wir haben die Strahlensätze für rationale Streckenlängen bewiesen.

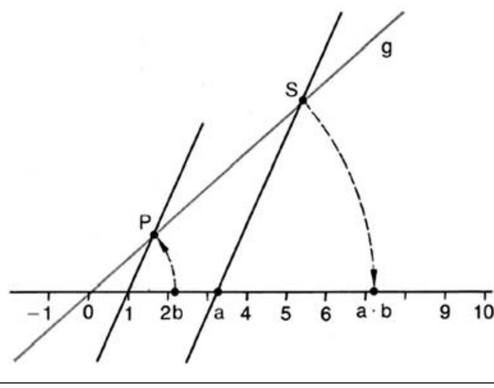
Es gilt $\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$.

Daraus ergibt sich $x = a \cdot b$.
Für rationale Zahlen konnten wir also Produkte durch Konstruktion bestimmen.

Wir benutzen nun die Strahlensatzfigur zur Festlegung der Multiplikation in $\mathbb{R}$.

Wir multiplizieren zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ wie folgt: Wir zeichnen durch den Nullpunkt der Zahlengeraden eine Hilfsgerade g.
Auf der Zahlengeraden tragen wir a und b ein.
Auf g tragen wir von 0 aus eine Strecke der Länge b ab. Ihr Endpunkt sei P.
Wir verbinden „die 1“ der Zahlengeraden mit P und zeichnen eine Parallele zu dieser Verbindung durch a. Diese Parallele schneidet g in S. Der Strecke $\overline{OS}$ ordnen wir die Länge $a \cdot b$ zu und tragen sie auf der Zahlengeraden ein.





Aus: Hahn/Dzewas: Mathematik 9, Westermann, 1993.

[3] Empfohlen sei hierzu die entsprechende Passage in dem auch ansonsten sehr empfehlenswerten (hauptsächlich für Kinder geschriebenen) Buch „Der Zahlenteufel“ von Hans Magnus Enzensberger.

5 Elemente der Didaktik der elementaren Algebra

Literaturempfehlungen:

- VOLLRATH, H.-J.; WEIGAND, H.-G.: *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg, 2006 (3. Aufl.).
- MALLE, G.: *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig, 1993.

5.1 *Algebra* – Begriffsbestimmung und historischer Exkurs

Brockhaus: *Algebra [arabisch] die, Teilgebiet der Mathematik, im klassischen Sinn die Lehre von den Lösungsmethoden* ***algebraischer Gleichungen.*** *Für lineare und quadratische Gleichungen waren Lösungen schon im Altertum bekannt, im 16. Jahrhundert fand man die Lösungen der Gleichungen 3. und 4. Grades. Der Fundamentalsatz der Algebra »Jede algebraische Gleichung n-ten Grades besitzt genau n Lösungen« wurde 1799 von C. F. Gauß bewiesen. In der modernen Mathematik versteht man unter Algebra die Untersuchungen* ***algebraischer Strukturen*** *wie Gruppe, Ring, Körper und ihrer Verknüpfungen. Begriffe und Methoden der Algebra werden in vielen Bereichen der Mathematik (wie Analysis, Topologie), in der theoretischen Physik u. a. naturwissenschaftlichen Gebieten angewendet.*

Etwas detaillierter:

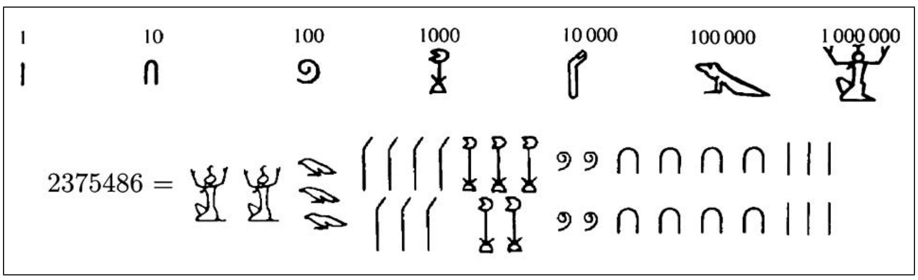
- Indisch: **Aryabhattiya**, mathematisches Lehrbuch des Mathematikers Aryabhatta (5. Jh.)
- Methode: **Bijaganitam** („symbolisches Lösen“ von Gleichungen)
- Im 13. Jahrhundert übernahmen und verfeinerten die Araber diese Methode und nannten sie **al-jabr** („das Zusammenfügen gebrochener Teile“), entnommen aus dem Titel des Rechen-Lehrbuchs von Al-Khwarizmi

Unter Algebra versteht man:

- ***elementare Algebra*** – Algebra im Sinne der Schulmathematik. Sie umfasst die Rechenregeln der natürlichen, ganzen, gebrochenen und reellen Zahlen, den Umgang mit Ausdrücken, die Variablen enthalten, und Wege zur Lösung einfacher algebraischer Gleichungen.
- ***klassische Algebra*** – beschäftigt sich mit dem Lösen allgemeiner algebraischer Gleichungen über den reellen oder komplexen Zahlen. Ihr zentrales Resultat ist der Fundamentalsatz der Algebra, der besagt, dass jedes nichtkonstante Polynom n-ten Grades in n Linearfaktoren mit komplexen Koeffizienten zerlegt werden kann.
- ***lineare Algebra*** – behandelt das Lösen linearer Gleichungssysteme, die Untersuchung von Vektorräumen ...; Grundlage für die analytische Geometrie.
- ***abstrakte Algebra*** – Grundlagendisziplin der modernen Mathematik; beschäftigt sich mit algebraischen Strukturen wie Gruppen, Ringe, Körper ... .

5.1.1 Historisches zur elementaren Algebra

- Der Beschäftigung mit Algebra gingen Zählen und Rechnen (also „Arithmetik“ voraus.
- Im alten Ägypten ist erstmals „elementare Algebra“ nachweisbar, die ältesten überlieferten Schriften stammen von ca. 2000 v. Chr..
- Zahlensystem im alten Ägypten: „Dezimalsystem“



„Primitive Algebra"im alten Ägypten

Lösen linearer Gleichungen: *Methode des falschen Ansatzes*

$$a \cdot x = c \qquad (a \in \mathbb{Q}^+,\ c \in \mathbb{N})$$

- „Geeignete"Zahl x_1 wählen und in die Gleichung einsetzen: $a \cdot x_1 = c_1$
  (x_1 muss so gewählt werden, dass sich eine natürliche Zahl c_1 ergibt.)
- Um die richtige Lösung zu finden, muss gelten: $\dfrac{x}{x_1} = \dfrac{c}{c_1}$, also $x = x_1 \cdot \dfrac{c}{c_1}$.

Lösen (rein) quadratischer Gleichungen

- Gegeben: zwei Quadrate mit den Seiten x und y wobei $y = \frac{3}{4}x$ (im Text steht $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ anstelle $\frac{3}{4}$) sowie mit $x^2 + y^2 = 100$.
- Gesucht sind x und y.

Methode des einfachen falschen Ansatzes:

- Nimm ein Quadrat mit Seite 1 und nimm $\frac{3}{4}$ von 1 (das ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$) als Seite der anderen Fläche.
- Multipliziere $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ mit sich selbst, das ergibt $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$.
- Wenn also die Seite der einen Fläche als 1, die der anderen als $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ angenommen ist, addiere man die beiden Flächen.
- Ergebnis: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$. Ziehe daraus die Wurzel, das ist $1 + \frac{1}{4}$.
- Ziehe die Wurzel aus der gegebenen Zahl 100, das ist 10.
- Wie oft geht $1 + \frac{1}{4}$ in 10 auf? Es geht 8 mal.

  (Die Ägypter kannten bereits den Begriff „Wurzel", allerdings nur für Zahlen, deren Quadrat als Quadrat einer rationalen Zahl gegeben ist.)

Etwas „moderner"aufgeschrieben:

- $100 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\dfrac{3}{4}x\right)^2 = \dfrac{25}{16}x^2;$
- Sei $x = 1$, dann ist $\dfrac{25}{16}x^2 = \dfrac{25}{16}$, aber $\dfrac{25}{16}x^2$ soll 100 ergeben, also $\dfrac{5}{4}x = 10$.
- Somit ist $x = 8\,;\ y = 6$.

  siehe: ALTEN, H.-W., DJAFARI-NAINI, A., FOLKERTS, M., SCHLOSSER, H., SCHLOTE, K.-H., WUSSING, H.: *4000 Jahre Algebra - Geschichte, Kulturen, Menschen*. Springer, 2003.

5.1.2 Entwicklung des Schulunterrichts in Algebra

Der Unterricht in Algebra bis zum Ende des 19. Jahrhunderts

- Ein großer Teil der heute gebräuchlichen mathematischen Symbolik geht auf **LEONARD EULER** (1707-1783) zurück.
- Größten Einfluss auf den Schulunterricht in Algebra hatte das Buch *„**Vollständige Anleitung zur Algebra**"*(1770) von EULER.
- Enthält u. a. Grundlegung des Zahlenrechnens, Rechnen „mit den zusammengesetzten Größen"(Termumformungen u. a.), Verhältnisse, Verhältnisgleichungen, Gleichungen.
- Einführung von Variablen:

  „Wenn nun, um die Sache allgemein zu machen, anstatt der wirklichen Zahlen Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung, wie z. B.: a – b – c + d – e deutet an, daß die durch die Buchstaben a und d ausgedrückten Zahlen addirt und davon die übrigen b, c, e, welche das Zeichen – haben, sämtlich abgezogen werden müssen."

- Die Behandlung von Gleichungen wird eingeleitet durch die Hinweise:

  „Der Hauptzweck der Algebra sowie aller Theile der Mathematik besteht darin, den Werth solcher Größen zu bestimmen, die bisher unbekannt gewesen, was aus genauer Erwägung der Bedingungen geschieht. Daher wird die Algebra auch als die Wissenschaft definirt, welche zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet.

  Bei jeder vorkommenden Aufgabe wird nun diejenige Zahl, die gesucht werden soll, durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets bezeichnet, und alsdann werden alle vorgeschriebenen Bedingungen in Erwägung gezogen, durch welche eine Gleichheit zweier Werthe dargestellt wird. Aus einer solchen Gleichung muß sodann der Werth der gesuchten Zahl bestimmt werden, wodurch die Aufgabe aufgelöst wird. Bisweilen müssen auch mehrere Zahlen gesucht werden, was in gleicher Weise durch Gleichungen geschehen muß."

- Der Mathematikunterricht blieb (hinsichtlich der Behandlung der Algebra) bis zum Ende des 19. Jahrhunderts bei dem von Euler vorgegebenen Aufbau.

Erste Hälfte des 20. Jahrhunderts (Meraner Reformen)

- Ende des 19. / Anfang des 20. Jahrhunderts: grundlegende Reform des Mathematikunterrichts (großen Einfluss hatte Felix Klein, 1849-1925, erster Vorsitzender der IMUK).
- Aus den ***Reformvorschlägen der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte*** (Meran, 1905):

  „Einmal gilt es ..., den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen ..., die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen. ... Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: ... und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens. Die von je dem mathematischen Unterricht zugewiesene Aufgabe der logischen Schulung bleibt dabei unbeeinträchtigt."

Hauptimpulse für die Algebra (diese wirken bis heute):

- Der **Funktionsbegriff** wurde zu einem Leitbegriff, der Problemstellungen und Lösungsverfahren lieferte. Gleichungen ergeben sich z. B. bei der Suche nach Nullstellen von Funktionen. Diese können mithilfe der grafischen Darstellungen von Funktionen grafisch gelöst werden. Potenzen werden in Verbindung mit Potenzfunktionen behandelt.
- Der Funktionsbegriff ermöglicht eine **enge Verbindung zwischen Algebra und Geometrie**. Die grafischen Darstellungen von Funktionen führen auf geometrische Objekte. Geometrische Eigenschaften von Kurven, wie z. B. ihre Symmetrien, können als Funktionseigenschaften algebraisch begründet werden.
- Diese Ideen setzten sich im MU in den 20-er bis 40-er Jahren des 20. Jahrhunderts durch (nach den Meraner Lehrplänen).

1950 – 1980

- Fachwissenschaftliche Entwicklung der Algebra in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts: Theorie der algebraischen Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume, ...).
- In den 60-er Jahren begann eine „Revolution" des MU, vor allem in Frankreich und Belgien (Bourbaki, Dieudonne, Papy, Choquet, ...)
- OECD-Konferenz 1959 über „New Thinking in Mathematics" forderte für den Algebraunterricht die Behandlung von Gruppen, Ringen, Körpern und Vektorräumen und eine axiomatische Begründung der Zahlbereiche.

Reformen in der Bundesrepublik nach 1968 brachten u. a.:

- Betonung der Regeln in den Zahlbereichen (bis hin zur Axiomatik),

- Betrachtung neuer Verknüpfungen in den Zahlbereichen,
- Erarbeitung von Strukturbegriffen, wie Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum,
- Neugestaltung der Lehre von den Termen, Gleichungen und Ungleichungen mit den Begriffen der Mengenlehre und der Logik.
- Mitte der siebziger Jahre setzte – in Anbetracht der langsam sichtbar werdenden niederschmetternden Ergebnisse – eine Gegenbewegung ein.

Von Morris Kline geschilderte Episode „*Why Johnny Can't Add*“:

> *„Ein Vater fragte seinen achtjährigen Jungen: ‚Wieviel ist* $5+3$*?' und bekam zur Antwort, dass nach dem Kommutativgesetz* $5+3=3+5$ *sei. Etwas in Verwirrung geraten, wiederholt der Vater seine Frage in etwas anderer Form: ‚Aber wieviele Äpfel sind* 5 *Äpfel und* 3 *Äpfel?' Das Kind verstand nicht recht, dass ‚und' ‚plus' bedeutet und fragte: ‚Meinst Du* 5 *Äpfel plus* 3 *Äpfel?' Der Vater beeilte sich, dies zu bejahen und wartete gespannt auf die Antwort. ‚Ach', meint der Sohn, das spielt gar keine Rolle, ob Du Äpfel, Birnen oder Bücher meinst,* $5+3=3+5$ *stimmt immer.“*

Einige Schwerpunkte der gegenwärtigen Entwicklung

- Vieles von den Reformen der „New Math“ wurde noch in den 70-er Jahren zurückgenommen, gewisse Relikte konnten sich länger halten.
- Didaktische Theorien des Lehrens und Lernens von Mathematik gewannen an Bedeutung, u. a. Wittmann (Theorie des *genetischen Lernens*): Verbindung mathematischer, erkenntnistheoretischer, psychologischer, pädagogischer und soziologischer Betrachtungsweisen. Die genetische Methode berücksichtigt sowohl die Struktur des Gegenstandes als auch die kognitive Struktur der Lernenden.
- Gestufter Aufbau für die Entwicklung des Funktionsbegriffs im Unterricht.
- Systematische Studien über Fehler von Schülern (z. B. Radatz 1980, Padberg, 1996 und 2002). Für die Algebra liegen Studien vor (z. B. Malle, 1993), die deutlich machen, dass man Fehlern nicht durch bloßes Üben beikommen kann. Entscheidend ist vielmehr das Verstehen.
- In TIMMS und PISA wurde im Hinblick auf die Algebra deutlich, dass viele Schüler Schwierigkeiten im Verstehen der algebraischen Formelsprache haben und dass es ihnen schwer fällt, in neuartigen Situationen bzw. Anwendungssituationen algebraisch sinnvoll vorzugehen.
- Diskussion um den Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) sowie graphischen Taschenrechnern und Taschencomputern.

5.2 Propädeutik der elementaren Algebra (Grundschule)

- Arbeiten mit Platzhaltern
- Lösen einfacher Gleichungen (und auch Ungleichungen) mit Platzhaltern
- Beispiele: $36+\square=50$; $15\cdot\square=75$
- Strategien: Probieren, Anwenden von Umkehroperationen (ohne Lösungskalküle)
- Inhaltliches und versuchsweises Lösen einfacher Gleichungen, auch in Sachkontexten

3. Karola hat mit ihrer Freundin Emöke in Ungarn telefoniert. Das Gespräch kostete 24 DM.
Wie lange haben die Freundinnen miteinander gesprochen, wenn eine Minute 3 DM kostet?
Man erhält die Gleichung: $3\text{ DM} \cdot x = 24\text{ DM}$.

Lösungshilfe: Die Gleichung $3\text{ DM} \cdot x = 24\text{ DM}$ beschreibt die Situation.
Dabei gibt x die Anzahl der Minuten des Gesprächs an.

Hinweise zum Lösen von Textaufgaben

Text aufmerksam lesen!
Gegebenes? Gesuchtes? Wie hängt beides zusammen?
Skizze? Tabelle? Gleichung?
Ergebnis ermitteln!
Maßeinheiten?
Kann das Ergebnis stimmen?
Antwortsatz

Mathematik 5, Sachsen Mittelschule, Volk und Wissen, 1998

Lösen von Gleichungen durch Tabellen

x	2x+3
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13
...	...

Setze in die Gleichung $2x + 3 = 11$ *der Reihe nach alle natürlichen Zahlen von* 0 *bis* 10 *ein. Wann ergibt sich eine wahre Aussage?*

Lösung mithilfe einer Tabelle:

- Für $x = 4$ erhalten wir eine wahre Aussage.
- Eindeutigkeit der Lösung: Setzen wir für x eine Zahl kleiner als 4, so ist $2x + 3 < 11$, setzen wir für x eine Zahl größer als 4, so ist $2x + 3 > 11$.

Das Lösen von Gleichungen durch systematisches Probieren und durch die Verwendung von Tabellen sollten wichtige Strategien bleiben, auch nachdem Lösungskalküle behandelt wurden.

5.3 Veränderung von Bedeutungen und Sichtweisen beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra

Dieselben Schreib- und Sprechweisen werden in der Algebra teilweise anders gebraucht als beim reinen Rechnen mit Zahlen.

- So bedeutet $4\frac{3}{4}$ zunächst $4 + \frac{3}{4}$, es könnte aber später auch (wie z. B. $4x$) als $4 \cdot \frac{3}{4}$ ausgelegt werden; auf das Operationszeichen ist hier besonders zu achten.
- $4x$ bzw. $4\square$ bedeutet in der Arithmetik zunächst, dass der Platzhalter x bzw. $\square$ für eine Ziffer steht, also $4\square = 10 \cdot 4 + \square$. Später ist damit natürlich $4 \cdot x$ bzw. $4 \cdot \square$ gemeint.
- Operationszeichen wie „+“ werden in der Arithmetik zunächst als „Handlungsanweisungen“ aufgefasst, z. B. bei $3 + 9$: addiere 3 und 9. In der Algebra steht ein Term wie $x + 3$ für eine unbestimmte Zahl. Man operiert damit weiter. „Wie kann ich mit $x + 3$ rechnen, wenn ich x nicht kenne?“
- Das *Gleichheitszeichen* hat in der Grundschule vor allem eine einseitige Bedeutung: einer Aufgabe wird ihre Lösung zugewiesen.

  In der Algebra hat das Gleichheitszeichen mehrere Bedeutungen:

  - „=“ im Sinne numerischer Gleichheit, also als Beziehungszeichen bzw. Vergleichszeichen – lesbar in beide Richtungen.
  - „=“ im Sinne von „:=“, d. h. einer Variablen wird ein Wert zugewiesen wie $x := 3$.
  - Außerdem hat „=“ am Ende des Lösungsprozesses einer Gleichung auch noch die aus der Arithmetik bekannte Bedeutung (im Sinne von „Ausrechnen“).

In der Algebra gewinnen zudem *geschlossene Darstellungen von „Rechnungen“* an Bedeutung; im Zusammenhang damit sind u. a. Klammern wichtig. So sind Schreibweisen wie $(3+2)\cdot 4$ in der Arithmetik von untergeordneter Bedeutung, denn man rechnet zunächst $3+2=5$ und dann $5\cdot 4$. Wenn Variable auftreten, sind derartige Darstellungen jedoch unentbehrlich.

Der Zwang, Rechengänge „geschlossen“ aufzuschreiben, bringt allerdings Notationsprobleme mit sich, vor allem Probleme mit der Klammersetzung und Klammereinsparung (bzw. mit Bindungskonventionen wie Punktrechnung vor Strichrechnung).

> Zum Beleg führe ich eine wahre Begebenheit an. Vor kurzem besuchte ich eine Zirkusvorstellung, in der ein **rechnender Pudel** vorgestellt wurde. Der Pudel wählte jeweils aus einer Menge von Karten jene Karte aus, die mit dem Resultat der gestellten Rechnung beschriftet war. Das Publikum wurde aufgefordert, eine „komplizierte“ Rechnung anzusagen. Diese wurde auf eine Tafel geschrieben:
>
> $$5+2\cdot 3+4\cdot 2$$
>
> Dann wurde das Publikum zum gemeinsamen Ausrechnen aufgerufen. Das ganze Zirkuszelt brüllte: 5 plus 2 ist 7, mal 3 ist 21, plus 4 ist 25, mal 2 ist 50.
>
> Die Zeile auf der Tafel wurde ergänzt zu:
>
> $$5+2\cdot 3+4\cdot 2=50$$

Aus MALLE, G.: *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg, 1993, S. 143.

5.4 Einführung des Variablen- und des Termbegriffs (oft in Kl. 6)

5.4.1 Beispiel für einen Einstieg in das Stoffgebiet Terme

Die folgende Aufgabe diente als Einstieg in die Behandlung von Termen (Klasse 6, Realschule):

> Bei einem Telefonanbieter sind für einen Handyvertrag 11 € monatliche Grundgebühr und für jede SMS 0,20 € zu bezahlen.
> - Susi hat in einem Monat 10 SMS verschickt. Wie viel muss sie bezahlen?
> - Reicht Toms Taschengeld (15 € im Monat), um 30 SMS zu verschicken?

Im Unterrichtsgespräch wird nebenstehendes Tafelbild entwickelt.

> **Terme und Platzhalter**
>
> Handykosten:
>
> Grundgebühr: 11 € Kosten pro SMS: 0,20 €
>
> Monatliche Kosten: $\underbrace{11\,€ + \square \cdot 0{,}20\,€}_{\text{Term}}$ Platzhalter (Variable)
>
> Susi: 11 € + 10 · 0,20 € = 13 €
>
> Tom: 11 € + 30 · 0,20 € = 17 € > 15 €

Anhand dieses Beispiels:
- Diskussion der Begriffe Term, Platzhalter, Variable;
- Bearbeitung eines weiteren Beispiels;
- Erarbeitung eines Merksatzes als Lückentext und Besprechung:

> *Terme* sind *Rechenausdrücke*, in denen *Zahlen, Platzhalter (Variable)* und *Operationszeichen* vorkommen können. Als Variable können *Buchstaben* verwendet werden, aber auch *Zeichen / Symbole* wie z. B. Vierecke und Kreise.

5.4.2 Aspekte von Variablen (nach Malle)

- Variablen sind nicht nur in der Mathematik von Bedeutung;
- treten auch in der Umgangssprache auf z. B. „Ding“, „Sache“, „ein“, „irgendwelche“ usw.;
- sehr wichtig sind Variablen auch in der Informatik, sogar in Anwendungssoftware (z. B. Word-Formatvorlagen: „Überschrift 1“ ...).

Gegenstandsaspekt

- Variable als unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahl (allgemeiner: als unbekannter oder nicht näher bestimmter Denkgegenstand).
- *Beispiel: Zahlenrätsel*

  Denke dir eine Zahl. Addiere 10. *Verdopple das Ergebnis. Subtrahiere das Doppelte der ursprünglichen Zahl. Du erhältst* 20 *– egal, welche Zahl du gedacht hast.*

  Mögliche Lösung: Ist x die gedachte Zahl, dann gilt $2 \cdot (x + 10) - 2x = 2x + 20 - 2x = 20$.

Einsetzungsaspekt

- Variable als Platzhalter für Zahlen bzw. Leerstelle, in die man Zahlen (genauer: Zahlnamen) einsetzen darf.
- *Beispiel (siehe auch das bereits angegebene Beispiel zum Lösen von Gleichungen mit Tabellen):*

  Setze in die Gleichung $2x + 3 = 11$ *der Reihe nach die Zahlen von* 1 *bis* 6 *ein! Wann ergibt sich eine wahre Aussage?*

$$\begin{array}{llll} 2 \cdot 1 + 3 = 11 & \text{f} & 2 \cdot 4 + 3 = 11 & \text{w} \\ 2 \cdot 2 + 3 = 11 & \text{f} & 2 \cdot 5 + 3 = 11 & \text{f} \\ 2 \cdot 3 + 3 = 11 & \text{f} & 2 \cdot 6 + 3 = 11 & \text{f} \end{array}$$

Kalkülaspekt (Rechenaspekt)

- Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert werden darf.
- *Beispiel: Löse die Gleichung* $3x + 8 = 26$.

$$\begin{array}{lcll} 3x + 8 & = & 26 & \mid -8 \\ 3x & = & 18 & \mid : 3 \\ x & = & 6 & \end{array}$$

Die drei Aspekte sind eng miteinander verbunden. Man kann bei verschiedenen Aufgaben zwei oder drei dieser Aspekte anwenden, wobei sich einer der Aspekte stärker betonen lässt.

Beispiel: $m = \frac{x + y}{2}$ (Mittelwert m zweier Zahlen x und y)

- Man denkt vermutlich an nicht näher bestimmte Zahlen, betont also den *Gegenstandsaspekt*.
- Setzt man anschließend für x und y Zahlen ein, um verschiedene Mittelwerte auszurechnen, betont man eher den *Einsetzungsaspekt*.
- Formt man die Formel um, etwa zu $x = 2m - y$, wendet man einfach gewisse Regeln an und betont damit den *Kalkülaspekt*.

5.4.3 Einige Aufgaben zur Arbeit mit Variablen und Termen

Zahlentrick:

- *Denke dir eine Zahl, schreibe sie auf. Addiere 3. Verdopple das Ergebnis. Subtrahiere 4. Halbiere das Ergebnis. Subtrahiere die ursprünglich gedachte Zahl. Welche Zahl erhältst du?*

  (Das Ergebnis ist immer Eins, was durchaus Erstaunen hervor ruft.)

denke dir eine Zahl	□
addiere 3	□•••
verdopple das Ergebnis	□••• □•••
subtrahiere 4	□□••
halbiere	□•
subtrahiere die gedachte Zahl	•

Ein Schüler denkt sich eine Zahl und führt folgenden Zahlentrick aus:

- *Verdopple die Zahl, addiere zum Ergebnis 5, verdreifache das neue Ergebnis, subtrahiere das Sechsfache der gedachten Zahl.*

  Welches Ergebnis bekommt jeder Schüler heraus?

Erraten einer gedachten Zahl:

- *Denke dir eine Zahl. Addiere die um 3 größere Zahl, multipliziere das Ergebnis mit 5, subtrahiere 15. Wenn du mir dein Ergebnis sagst, sage ich dir, welche Zahl du dir gedacht hast.*

  Welche Operation muss ich am Ende durchführen, um die gedachte Zahl zu finden?

Ziffernrätsel:

- *Links soll die gleiche Zahl stehen wie rechts:* $9 + \clubsuit = 25 - \clubsuit$. Für welche Zahl steht $\clubsuit$?

Arbeit mit Tabellen

Termwettrennen: *Wann überholen die Zahlen des Ausdrucks* $x \cdot x$ *die Zahlen des Ausdrucks* $x + 30$?

x	$x+30$	$x \cdot x$
1	31	1
2	32	4
3	33	?
...	...	...

→ Die Schüler gewinnen Erfahrung im Umgang mit Tabellen, im Einsetzen von Zahlen in Variablen, sie werden an eine dynamische Sichtweise herangeführt, sie gewinnen Vorerfahrungen zu Termen und Gleichungen.

→ Eine erweiterte Vorstellung des Variablenbegriffs wird angebahnt: Die Variable x wird als *Veränderliche* gesehen, die einen ganzen Bereich durchläuft.

  (Hier steht der *Einsetzungsaspekt* von Variablen im Vordergrund.)

5.5 Lösen linearer Gleichungen

Wie Variablen können auch Gleichungen unter verschiedenen Aspekten gesehen werden:

- Gleichung als Beziehung zwischen den Variablen,
- Gleichung als Verpackung der Lösung (Lösen durch Auspacken),
- Gleichung als Schnittstellen der Graphen der linken und der rechten Seite.

In der Didaktik der Algebra gab es lange Debatten über die korrekte Behandlung von Gleichungen. In den 50er- und 60er-Jahren stand der *Gegenstandsaspekt* der Variablen im Vordergrund: Es wurde die Unbekannte gesucht. Das führte zu Problemen bei nicht lösbaren Gleichungen und bei Gleichungen mit mehr als einer Lösung. Deshalb wurde später stärker der *Einsetzungsaspekt* betont. Unter ihm ist es naheliegend, Gleichungen danach einzuteilen, wie sie sich bei Einsetzungen verhalten: Jede Einsetzung macht die Gleichung wahr (allgemeingültig); einige Einsetzungen machen sie wahr (lösbar) oder keine Einsetzung macht sie war (unlösbar).

Herangehensweise an die Behandlung von Gleichungen

- Einfache Gleichungen werden durch inhaltliche Überlegungen, Probieren, Nutzen von Umkehroperationen bereits in der Grundschule gelöst (z. B. $36 + \square = 50$);
- systematische Behandlung der Gleichungslehre meist ab Klasse 7;
- dabei oft zu schnell Einführung und (mechanische) „Einübung“ der Umformungsregeln.

5.5.1 Inhaltliches Lösen einfacher Gleichungen

- $3 \cdot x = 12$ — Mit welcher Zahl muss ich 3 multiplizieren, um 12 zu erhalten?
- Erkennen von „Gegenaufgaben“ (Umkehroperationen): $5 + x = 7 \Rightarrow x = 7 - 5$; $5 \cdot x = 15 \Rightarrow x = 15 : 5$

Systematisches Probieren sollte auch bei und nach der Einführung der Äquivalenzumformungen zu den Strategien der Schüler gehören.

- Fülle die Lücken: *Zu Beginn liegt ____ in Führung aber ______ holt schnell auf. Bei $x =$__ liegen beide Terme gleichauf. Dann übernimmt ____ die Spitze und gibt sie nicht mehr ab.*
  - An der Stelle $x = 5$ holt der Term $3 \cdot x$ den Term $x + 10$ ein.
  - $x = 5$ ist also Lösung von $3 \cdot x = x + 10$.

x	$3 \cdot x$	$x+10$
1	3	11
2	6	12
3	9	13
4	12	14
...	...	...

- Suche die Lösung der Gleichung $2 \cdot x + 1 = x + 74$.
  - In den Spalten $2 \cdot x + 1$ und $x + 74$ muss dieselbe Zahl stehen.
  - Grenze die Möglichkeiten für x planvoll ein, bis du für $2 \cdot x + 1$ und $x + 74$ dieselbe Zahl erhältst.

→ Schüler sollen erkennen: *„Das dauert noch lange! Ich mache einen großen Sprung und probiere $x = 100$.“*

x	$2 \cdot x+1$	$x+74$
1	3	75
2	5	76
3	7	77
4	9	78
5	11	79
...	...	...

Beispiel für die Entwicklung sehr anspruchsvoller Strategien systematischen Probierens

Löse die Gleichung $3 \cdot x - 5 = x + 45$.

a) Lege eine Tabelle an und setze für x die natürlichen Zahlen von 2 bis 6 ein.

b) In welchen Schritten wachsen die Werte in der Spalte $3 \cdot x - 5$, in welchen Schritten in der Spalte $x + 45$?

c) In welchen Schritten fallen die Werte in der Spalte „Unterschied“?. Wann wird in dieser Spalte 0 stehen? Wie heißt also die Lösung der Gleichung?

x	$3 \cdot x - 5$	$x + 45$	Unterschied
2	1	47	46
3	4	48	44
4	7	49	42
5	10	50	40
6	13	51	38
...	...	...	...

- Bei Vorgehensweisen dieser Art kommen *wichtige Aspekte funktionalen Denkens* zum Tragen.
- Funktionale Überlegungen sollten beim Lösen von Gleichungen stets einbezogen werden.

5.5.2 Lösen linearer Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

- Umformungen, welche die Lösungsmenge einer Gleichung unverändert lassen, heißen *Äquivalenzumformungen*.
- Durch geeignete Schritte von Äquivalenzumformungen lassen sich lineare Gleichungen lösen (bzw. es stellt sich heraus, dass sie nicht lösbar sind oder unendlich viele Lösungen besitzen):

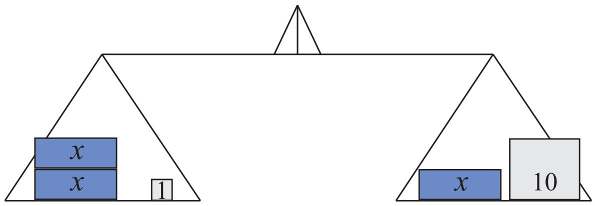
$$2x - 4 = x + 4 \;\Leftrightarrow\; x - 4 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = 8 \;\rightarrow\; \text{eindeutig erfüllbare Gleichung}$$
$$2x - (x - 4) = x + 4 \;\Leftrightarrow\; x + 4 = x + 4 \;\rightarrow\; \text{mehrdeutig erfüllbare Gleichung}$$
$$2x - (x - 7) = x + 5 \;\Leftrightarrow\; x + 7 = x + 5 \;\rightarrow\; \text{unerfüllbare Gleichung}$$

- Schüler lernen *Algorithmen*, mit deren Hilfe sie lineare Gleichungen lösen können. Deren sichere Beherrschung setzt verschiedene Fähigkeiten voraus:

    - Wissen, dass die Addition desselben Terms auf beiden Seiten einer Gleichung eine Äquivalenzumformung ist;
    - Wissen, dass Multiplikation mit einer von 0 verschiedenen Zahl auf beiden Seiten einer Gleichung eine Äquivalenzumformung ist;
    - Terme durch äquivalente Terme ersetzten können;
    - Vereinfachungsstrategien für Terme kennen und anwenden können;
    - Beherrschen der Grundrechenarten für rationale Zahlen.
- Beispiel: $2x - 3 \cdot (x - 4) = -4 \cdot x + 8$

Das Modell der Waage

- Gleichungen und Äquivalenzumformungen lassen sich am Waagemodell veranschaulichen.



Schreibe die Gleichung zu dieser Waagestellung auf. Wie schwer ist jedes Paket?

- Sehr einfache Gleichungen können mithilfe der Waage dargestellt werden. Der Lösungsweg entspricht konkreten Handlungen an der Waage. Die (Balken-)Waage kann wirklich benutzt werden oder auch nur als Vorstellungshilfe dienen.

Grundgedanke:

- Eine Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn auf beiden Waagschalen dasselbe geschieht.

→ *Ebenso bleibt eine Gleichung bestehen, wenn auf beide Seiten dieselbe Operation angewendet wird.*

Daraus lassen sich **mögliche Umformungsschritte beim Lösen von Gleichungen** begründen:

- Auf beiden Seiten denselben Term addieren oder subtrahieren.
- Beide Seiten mit derselben Zahl (außer 0) multiplizieren oder dividieren.
- Die beiden Seiten der Gleichung vertauschen.

Bemerkungen:

- Die Umformungen nicht an sehr einfachen Beispielen wie $2 \cdot x + 3 = 9$ einführen. Solche Gleichungen lösen Schüler im Kopf es besteht keine Notwendigkeit, ein neues Verfahren einzuführen. Die Umformungsregeln sind vor allem dann notwendig, wenn die *Variable auf beiden Seiten* des Gleichheitszeichens *auftritt*.
- Die „Waageregeln" auch *in umgekehrter Richtung anwenden*.

  Beispiel: Gib 5 Gleichungen an, die alle $x = 3$ als Lösung haben.

  ⇒ Die Umformungsregeln werden benutzt, um eine einfache Gleichung „aufzuplustern":

$$\begin{aligned} x &= 3 && \mid +5 \\ x+5 &= 8 && \mid \cdot 2 \\ 2 \cdot (x+5) &= 16 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x &= 3 && \mid +x \\ 2x &= 3+x && \mid -1 \\ 2x-1 &= x+2 \end{aligned}$$

Umformungsregeln sollten den Schülern (mit Unterstützung anschaulicher Vorstellungen, z. B. Waage) allgemein als Eigenschaften rationaler Zahlen plausibel und dann mit Variablen formuliert werden.

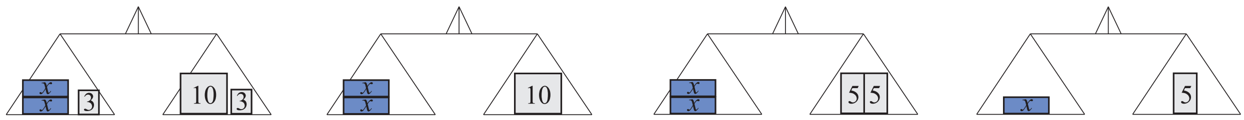
$a = b$	ist äquivalent* zu	$a + c = b + c$
$a = b$	ist äquivalent zu	$a - c = b - c$
$a = b$	ist für $c \neq 0$ äquivalent zu	$a \cdot c = b \cdot c$
$a = b$	ist für $c \neq 0$ äquivalent zu	$a : c = b : c$

* äquivalent – gleichwertig – wenn die eine Aussage gilt, dann gilt auch die andere und umgekehrt

Lösen von Gleichungen mit Äquivalenzumformungen

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 13 \quad &| -3 \\ 2x &= 10 \quad &| :2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Auf beiden Seiten der Gleichung werden jeweils *dieselben Umformungsschritte* vorgenommen.



Probe: $2 \cdot 5 + 3 = 13$

Zur Schreibweise bei Gleichungsumformungen

Ausführliche Notation

$$\begin{aligned} 3x - 3 &= x + 5 \quad &| -x \\ 3x - 3 - x &= 5 \\ 2x - 3 &= 5 \quad &| +3 \\ 2x &= 5 + 3 \\ 2x &= 8 \quad &| :2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Verkürzt

$$\begin{aligned} 3x - 3 &= x + 5 \quad &| -x \\ 2x - 3 &= 5 \quad &| +3 \\ 2x &= 8 \quad &| :2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Bemerkung zur Probe

*Die **Probe** nicht vergessen;*
sinnvoll: in jede Seite getrennt einsetzen:

Links: ___________

Rechts: ___________

x = __ ist (bzw. ist keine) Lösung

Insbesondere zu Beginn ist es beim Lösen von Gleichungen wichtig, die *Form sorgfältig zu beachten*:

- Gleichungen untereinander und zwar „="–Zeichen unter „="–Zeichen;
  falls Bruchstrich vorkommt, dieser in Höhe des Gleichheitszeichens;
- benutzte Umformungen notieren;
- keine vorschnellen Verkürzungen;
- fehleranfällige Sprechweisen vermeiden („ $3x$ *auf die andere Seite bringen*").

„Merkkasten" zum Lösen von Gleichungen		
$5 \cdot (3x-2) - 5 = 12x - 3 \cdot (x-21)$ $15x - 10 - 5 = 12x - (3x-63)$ $15x - 15 = 12x - 3x + 63$ $15x - 15 = 9x + 63 \quad \vert -9x$ $6x - 15 = 63 \quad \vert +15$ $6x = 78 \quad \vert : 6$ $x = 13$	**Vereinfachen:** Klammern auflösen, Zusammenfassen **Die Variable isolieren:** Verwende dazu die Umformungsregeln	**Probe:** Setze den gefundenen Wert für x ein: *Links*: $5 \cdot (3 \cdot 13-2) - 5 = 5 \cdot 37 - 5$ $= \underline{180}$ *Rechts*: $12 \cdot 13 - 3 \cdot (13 - 21)$ $= 156 - 3 \cdot (-8) = 156 + 24$ $= \underline{180}$ $x = 13$ *ist Lösung.*

Bemerkung:
Das Lösen von Gleichungen durch Umformen bedingt sichere Kenntnisse einiger Termumformungsregeln. In der Praxis werden diese zum großen Teil parallel zur Gleichungslehre entwickelt.

Eine *allzu starke Vereinfachung der Sprache ist nicht sinnvoll*, sie kann zu Verwechslungen, Unexaktheiten und Fehlern führen.

Häufig verwendete Floskel: *„Auf die andere Seite bringen."*

Typischer Schülerfehler dabei:

- Gegebene Gleichung: $x + 3 = 5$
- „Ich muss 3 auf die andere Seite bringen, dabei geht das, was oben ist, nach unten."
- Es ergibt sich $x = \frac{5}{3}$.
- Auch in umgekehrter Richtung kann dieser Trugschluss auftreten.

Sinnvolle Übungen zur Schulung von Teilfertigkeiten

Die folgenden Übungen greifen häufige Schülerfehler auf und reduzieren die Komplexität des Gleichungslösens durch die Konzentration auf Teilaspekte.

1. **Zu vorgegebenen Gleichungen Umformungen notieren**

   Wie wurde umgeformt?

   $\boxed{}\ x+2=10 \downarrow x=8\ \boxed{}$ $\quad$ $\boxed{}\ 2x=10 \downarrow x=5\ \boxed{}$

   $\boxed{}\ 3x=15 \downarrow x=5\ \boxed{}$ $\quad$ $\boxed{}\ \frac{x}{3}=15 \downarrow x=45\ \boxed{}$

2. **Zu notierten Umformungen die Umformung einer einfachen Gleichung durchführen**

   Führe die Umformung zu Ende. Welche Umformung führt zum Ziel?

   $\boxed{-4}\ 4x=12 \downarrow\ \boxed{-4}$ $\quad$ $\boxed{:4}\ 4x=12 \downarrow\ \boxed{:4}$

   $\boxed{:3}\ 3x=18 \downarrow\ \boxed{:3}$ $\quad$ $\boxed{-3}\ 3x=18 \downarrow\ \boxed{-3}$

3. **Richtig begonnene Umformungen zu Ende führen**

   $$\begin{aligned} 2x+4 &= x+7 \quad | -x \\ x+4 &= \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4-2x &= x+7 \quad | +2x \\ 4 &= \end{aligned}$$

4. **Fehler finden:** *Hier wurden Fehler gemacht, finde und korrigiere sie.*

   $$\begin{aligned} 2x &= 5 \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x-3 &= 15 \\ 2x &= 12 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10 &= 2x \\ -2x &= 10 \end{aligned}$$

5. **Probeeinsetzungen:** *Überprüfe durch Einsetzen, ob die angegebene Zahl die Gleichung löst.*

   $2 \Rightarrow 5-2x = 4x-7 \qquad -1 \Rightarrow 7-x = 5+3x \qquad 2{,}5 \Rightarrow 2x+5 = 4x$

6. **Gleichungen mit vorgegebener Lösung finden**

   Schreibe fünf Gleichungen auf, die alle die Lösung $x = 2$ haben.

7. **Verschiedene Namen für die Variable verwenden (nicht nur x)**

8. **Verschiedene Lösungswege vorgeben, zu Ende führen, darüber sprechen**

   $\frac{1}{2}x = 15 + \frac{1}{5}x \quad | -\frac{1}{5}x \qquad \frac{1}{2}x = 15 + \frac{1}{5}x \quad | \cdot 10$

5.5.3 Sonderfälle linearer Gleichungen

Die meisten linearen Gleichungen, die Schüler lösen, haben genau eine Lösung (dies ist bei linearen Gleichungen in einer Variablen auch der Regelfall). Allerdings sollte *nicht der Eindruck* entstehen, dass Gleichungen *in jedem Falle eindeutig lösbar* sind. Beispiele zu unlösbaren Gleichungen und zu Gleichungen mit unendlich vielen Lösungen sind daher immer wieder „einzustreuen".

Unerfüllbare Gleichungen

Beispiel:	$2(x+1) = 2x+3$
Als Rätsel:	*Gibt es Zahlen, für die gilt: Verdoppelt man die um 1 vergrößerte Zahl, so erhält man dasselbe, wie wenn man das Doppelte der Zahl um 3 vergrößert?* Die gewohnten Umformungsregeln führen zu einem Widerspruch (z. B. $2 = 3$); es kann also keine Lösungen geben.

Allgemeingültige Gleichungen

Beispiel:	*Gibt es Zahlen, für die gilt: Verdoppelt man die um 1 vergrößerte Zahl, so erhält man dasselbe, wie wenn man das Doppelte der Zahl um 2 vergrößert?*
Als Gleichung:	$2 \cdot (x+1) = 2x+2$ Vereinfacht man, so erhält man eine Gleichung wie $2x = 2x$ oder $0 = 0$.

5.6 Schülerschwierigkeiten beim Algebraisieren von Sachsituationen

Viele Schwierigkeiten bereitet allgemein das *Aufstellen von Termen bzw. Gleichungen*. Häufig gelingt es Schülern nicht, Gleichungen aufzustellen, die gegebene Sachsituationen adäquat beschreiben. Wenn dies gelingt, bereitet die Lösung der Gleichung dann oft weniger Probleme.

Ein vielfach auftretender Fehler ist das „negative Übersetzen" in Gleichungen.

Beispiel 1:	Das Bett ist um 10 cm länger als der Tisch: $B + 10 = T$
Beispiel 2:	(aus MALLE: *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*): An einer Universität sind P Professoren und S Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Dafür stellen auch viele Akademiker eine falsche Gleichung auf: $P = 6S$.
Hilfen:	– Variablen genau benennen: Nicht P = Professoren, sondern P = Anzahl der Prof. – graphisch veranschaulichen (z. B. Köpfe)

Natürlich lassen sich Situationen auch von vornherein so formulieren, dass weniger Schwierigkeiten bei der „Übersetzung" in Gleichungen auftreten, z. B.:[4]

Beispiel 2*:	Die Zahl S der Studenten ist sechs mal so groß wie die Zahl P der Professoren.

Bei dieser Formulierung liegt die richtige Gleichung auf der Hand. Allerdings sollten Schüler auch lernen, weniger „mundgerechte" Formulierungen richtig zu übersetzen.

Ein Student untersuchte im Rahmen einer wissenschaftlichen Hausarbeit das Lösungsverhalten von Schülern 7., 8. und 9. Klassen einer Realschule bei (u. a.) der folgenden Aufgabe:

- Laut Fernsehkommentator waren bei der Fußball-Europameisterschaft 2008 beim letzten Gruppenspiel der Deutschen gegen Österreich mehr österreichische als deutsche Fans im Ernst-Happel-Stadion in Wien. Insgesamt verfolgten 51000 Zuschauer die Partie live im Stadion. Die Polizei, die Erfahrung im Schätzen großer Menschenmengen hat, berichtete, dass doppelt so viele Österreicher wie Deutsche im Stadion waren. Die Anzahl der übrigen Zuschauer betrug drei Viertel der Deutschen. Wie viele Deutsche, Österreicher und übrige Zuschauer waren jeweils im Stadion?

[4] Vgl. Vollrath, H.-J.; Weigand, H.-G.: *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum, 2007 (3. Aufl.).

Musterlösung (gekürzt):

- Anzahl der deutschen Zuschauer: x
  Anzahl der österreichischen Zuschauer: $2x$
  Anzahl der übrigen Zuschauer: $\frac{3}{4}x$
- $x + 2x + \frac{3}{4}x = 51000$

  $x = 13600$
- Es waren 13600 Deutsche, 27200 Österreicher und 10200 übrige Zuschauer im Stadion.

Nur ein geringer Teil der beteiligten Schüler fand für diese Aufgabe einen richtigen Ansatz.[5] Im Folgenden wird die in der Hausarbeit vorgenommene Analyse von Schülerfehlern wiedergegeben.

Klasse 7

Die Mehrheit der Schüler probierte, die Aufgabe durch mehrere einzelne Berechnungen zu lösen.

51.000 : 2 = 25500 Österreicher
25500 : $\frac{3}{4}$ = Deutsche
...... +2250

Sehr auffallend war der Lösungsansatz eines Schülers, der die Anzahl aller Zuschauer als „Grundwert" notierte und dann einen „Prozentwert" angeben wollte. Er bemerkte wohl, dass es sich doch nicht um eine Prozentrechenaufgabe handelte, und brach die Aufgabe ab.

Grundwert = 51.000
Pr

Klasse 8

Auch die Achtklässler versuchten fast alle, mithilfe von einzelnen Überlegungen und Berechnungen zur Lösung zu kommen.

$x : 2 = \frac{51.000}{2}$
$\frac{51.000}{2} \div \frac{1}{3}$

51.000 : 4 = 12,75 übrige Fans
38,25 : 2 = 19,125 deutsche und Österreichische Fans

Nur vereinzelt stellten Schüler eine Gleichung auf. Dabei wurden die Zahlenbeziehungen jedoch falsch übersetzt. Ein Schüler war sehr nah an der richtigen Gleichung. Sein Fehler lag nur im Term für die Anzahl der übrigen Zuschauer, die er durch $x : \frac{3}{4}$ statt durch $x \cdot \frac{3}{4}$ ausdrückte.

$51600 = x \cdot 2 + x + x : \frac{3}{4}$
$51\,000 = 2x + x + \frac{x}{0,75}$
$51000 = 3x + \frac{x}{0,75}$

Ein anderer Schüler hatte auch Probleme, die Anzahl der übrigen Zuschauer formal anzugeben. Er gab sie mit „$x \cdot \frac{1}{3}$" an. Darüber hinaus ergaben bei ihm auch die beiden weiteren Summanden keinen Sinn. „$x \cdot 2$" könnte man als Anzahl der Österreicher deuten, wenn „x" für die Anzahl der Deutschen steht, „$x \cdot \frac{1}{2}$" könnte man als Anzahl der Deutschen sehen, wenn mit „x" die Anzahl der Österreicher gemeint ist. Die beiden ersten Summanden würden also nur dann zum Text passen, wenn die Variable jeweils unterschiedlich belegt wäre. Beim Lösen der Gleichung trat ein weiterer Fehler auf: Er dividierte beide Seiten nacheinander durch die einzelnen Koeffizienten der rechten Seite, statt dort zuerst zusammenzufassen. Besonders auffällig ist zudem die Deutung der erhaltenen Lösung (1416,67 Personen).

4) $51.000 = x \cdot 2 + x \cdot \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{3} \quad | \cdot 6$
$51.000 \cdot 6 = x \cdot 2 \cdot 6 + x \cdot \frac{1 \cdot \cancel{6}^3}{\cancel{2}} + x \cdot \frac{1 \cdot \cancel{6}^2}{\cancel{3}}$
$306000 = x \cdot 12 + x \cdot 3 + x \cdot 2 \quad | :2$
$153000 = x \cdot 12 + x \cdot 3 + x \quad | :3$
$51000 = x \cdot 12 + x + x \quad | :12$
$4250 = x + x + x$
$4250 = 3x$
$1416{,}67 = x$
Deutsche + übrige Zuschauer = 1416,67

Klasse 9

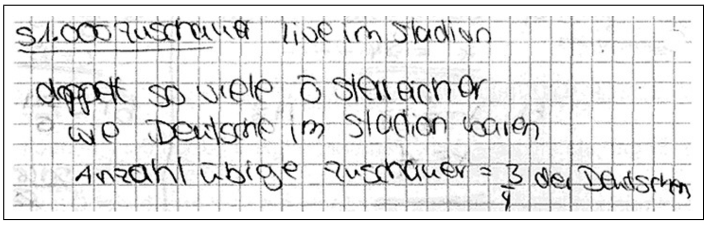
Die meisten Schüler notierten lediglich die Informationen aus dem Text und konnten daraus aber anscheinend keine Gleichung aufstellen.

Insgesamt → 51.000
Östr. Fan. $\xrightarrow{\text{doppelt}}$ wie Deu.
übrg. $\frac{3}{4}$ Deutscher Fans.

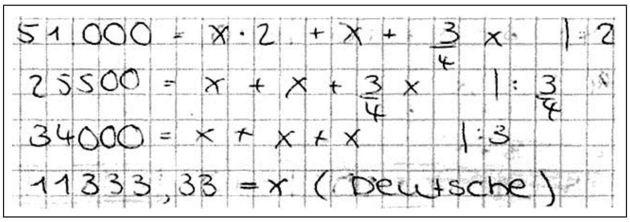
---

[5]Nur 55% der Schüler nahmen die Aufgabe überhaupt in Angriff, knapp 5% gelang eine vollständig richtige Lösung.

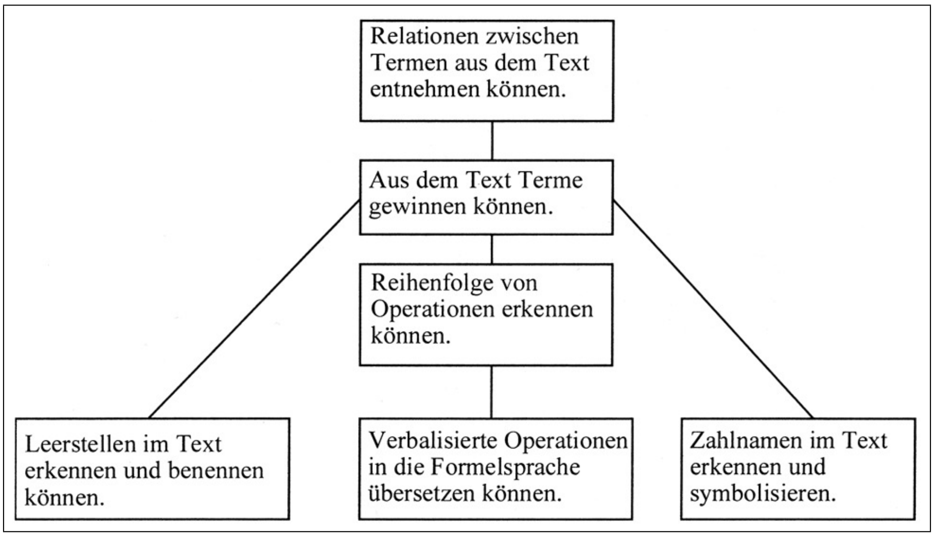
Ein Schüler hatte dabei deutliche Schwierigkeiten, nur das Wichtigste herauszufiltern und übernahm teilweise Passagen aus dem Text.



Mehrere Schüler konnten zwar eine korrekte Gleichung aufstellen, lösten aber die Gleichung, ohne die Terme zusammenzufassen bzw. ohne die Äquivalenzumformung auf alle Teilterme anzuwenden.



Diese vielfältigen Fehlerursachen zeigen, dass viele Schüler sowohl Schwierigkeiten beim Mathematisieren (Aufstellen adäquater Gleichungen zu Sachsituationen), als auch hinsichtlich innermathematischer Aspekte des Lösens von Gleichungen haben. Für den Übergang von einer Sachaufgabe zu einer Gleichung (oder Ungleichung) gibt VOLLRATH folgende Hierarchie von Fähigkeiten, die Schüler erwerben müssen, an:[6]



VOLLRATH stellt zwei Strategien für das Algebraisieren von Text- bzw. Sachaufgaben heraus:[7]

A. Der Schüler entscheidet, welche Größe gefragt ist; er bezeichnet sie (in der Regel) mit x.

   Damit werden Terme zusammengesetzt.
   Die Terme werden in Relation gesetzt.

   Im Vordergrund steht also die gesuchte Größe.

B. Der Schüler erkennt eine Relation, die der Aufgabe zugrunde liegt, etwa:
   Eine Größe ist das 3-fache der anderen Größe.

   Es werden Terme in Relationen zueinander gebildet, etwa: x und $3x$.
   Die Relation wird mit Hilfe der Terme ausgedrückt.

   Im Vordergrund stehen die Beziehungen zwischen den auftretenden Größen.

[6] Vollrath, H.-J.; Weigand, H.-G.: *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum, 2007 (3. Aufl.), S. 230.
[7] Die folgenden Ausführungen sind dem o. g. Buch von Vollrath/Weigand entnommen (S. 231f.).

Betrachten wir die beiden Aufgaben:

a) Zwei Zahlen unterscheiden sich um 2. Vermehrt man jede der beiden Zahlen um 3, so nimmt ihr Produkt um 45 zu. Wie heißen die beiden Zahlen?

b) Ein gleichschenkliges Dreieck hat einen Umfang von 15 cm. Jeder Schenkel ist doppelt so lang wie die Grundlinie. Wie lang sind die Seiten?

Bei Aufgabe a) wird man die kleinere Zahl x nennen, die andere ist dann $x+2$. Ihr Produkt ist $x(x+2)$. Nun werden die Zahlen um 3 vermehrt. Man erhält dann $x+3$ und $x+5$ als neue Zahlen und $(x+3)(x+5)$ als neues Produkt. Das Produkt hat bei der Vergrößerung der Zahlen um 45 zugenommen, also erhält man durch Vergleich der Produkte

$$(x+3)(x+5) = x(x+2) + 45.$$

Die Beziehung, die zur Gleichung führt, wird erst am Ende erfasst. Die Terme werden schrittweise von unten aufgebaut. Wir sind also der Strategie A gefolgt.

Bei Aufgabe b) hat man sogleich die Formel

$$U = g + 2s.$$

Nun werden die Daten eingesetzt: Für U die Zahl 15, für s setzt man $2g$, also ergibt sich die Gleichung

$$15 = g + 4g.$$

Hier steht also die Beziehung im Vordergrund, die Terme schälen sich erst im Laufe der Überlegungen heraus. Dies entspricht der Strategie B.

Häufig ist es zweckmäßig, sich bei der Übersetzung zunächst einen Überblick über die Sachverhalte zu verschaffen. Das kann ein Schema oder eine Skizze sein. Für Aufgabe a) bietet sich folgende Darstellung an:

	Zu Anfang:	Nach Änderung:
Kleinere Zahl:	x	$x+3$
Größere Zahl:	$x+2$	$x+5$
Produkt:	$x(x+2)$	$(x+3)(x+5)$ bzw. $x(x+2)+45$

6 Funktionales Denken und Arbeiten mit Funktionen

„The true mathematical wealth is created by the perspective of function." FREUDENTHAL (1983)[8]

6.1 Funktionales Denken

3 Aspekte funktionalen Denkens:[9]

1. *Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so dass die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen.*
2. *Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.*
3. *Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.*

<u>Zu Aspekt 1 (Zuordnungscharakter):</u>

- Aspekt betont die eindeutige Zuordnung und die Abhängigkeit von Größen;
- Schreibweisen $x \to y$ und $y = f(x)$;
- In senkrecht notierten Tabellen: „waagerechter Zusammenhang" zwischen x und y.

  Beispiele:

  Preis in Abhängigkeit von der Masse

Masse in kg	Preis in Euro
1	1,49
2	2,98
3	4,47
4	5,96
...	...

  Zurückgelegter Weg bei gleichförmiger Bewegung

Zeit in h	Weg in km
1	80
2	160
3	240
4	320
...	...

  Fallhöhe beim freien Fall

Zeit in s	Fallhöhe
1	4,905
2	19,62
3	44,15
4	78,48
...	...

- Aspekt (1) ist sicherlich entscheidend für die große Fruchtbarkeit des Funktionsbegriffs in der Mathematik und den Anwendungen.
- DU BOIS-REYMOND (1877) sieht in der Betrachtung funktionaler Zusammenhänge *„eine der fruchtbringendsten Methoden, durch welche der menschliche Geist seine Leistungsfähigkeit erhöhte."* Die Einführung in diese Methode wird nach seiner Meinung für den *„einigermaßen Begabten: ein für das Leben epochemachender Lichtblick"*.[10]
- Inhaltliches Verständnis funktionaler Zusammenhänge kann formales Abarbeiten von Kalkülen ersetzen und macht oft das Auswendig-Lernen von Formeln überflüssig.
- Für *die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt* ist *die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens* von fundamentaler Bedeutung.
- Didaktische Schwierigkeiten ergaben sich vor allem aus der Natur der voneinander abhängigen Größen und aus der Art des Zusammenhanges: *„empirische"* und *„mathematische"* Funktionen. In der Realität werden oft *„empirische"* durch *„mathematische"* Funktionen angenähert.
- Arbeit mit funktionalen Zusammenhängen erfordert *nicht immer Funktionsterme*.
- Für EULER konnte eine Funktion durch einen „analytischen Ausdruck" oder durch eine „freihändig gezeichnete Kurve" im Koordinatensystem gegeben sein.

[8] FREUDENTHAL, H.: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: D. Reidel, 1983.

[9] VOLLRATH, H.-J.: Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 10 (1989), S. 3–37; siehe auch: http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/vollrath/papers/052.pdf

[10] DU BOIS-REYMOND, E.: Kulturgeschichte und Naturwissenschaft, 1877.

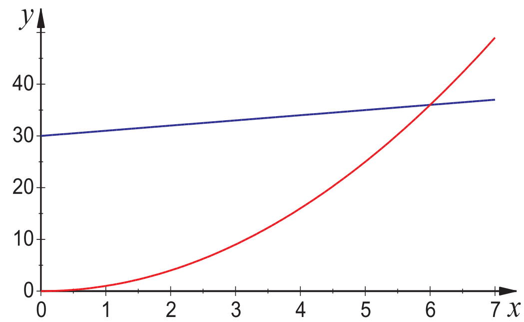
- Funktionen beschreiben beobachtete oder vermutete Zusammenhänge, z. B.:
  - die Abhängigkeit des Umfangs vom Durchmesser eines Kreises,
  - die Abhängigkeit der Dehnung einer Schraubenfeder von der Belastung,
  - die Abhängigkeit des Weges von der Zeit bei verschiedenen Arten von Bewegungen,
  - die für einen Weg benötigte Zeit in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit,
  - die Größe der Weltbevölkerung in Abhängigkeit vom Datum.
- Funktionen schaffen auch „neue“ Zusammenhänge, etwa wenn man durch $y = x^2$ jeder Zahl x ihr Quadrat zuordnet.
- Finden einer geeigneten Funktion: „Entdecken“;
- Aufstellen von Funktionen: „Erfinden“.

<u>Zu Aspekt 2 (Änderungsverhalten):</u>

- Das Änderungsverhalten drückt sich in Beziehungen aus wie:
  - Je größer x wird, desto größer wird y.
  - Verdoppelt (verdreifacht, ...) sich x, so verdoppelt (verdreifacht, ...) sich auch y.
  - Verdoppelt (verdreifacht, ...) sich x, so wird y halbiert (gedrittelt, ...).
  - Verdoppelt sich x, so vervierfacht sich y.
  - Erhöht sich x um 1, so verdoppelt sich y.
- In senkrecht notierten Tabellen interessieren auch „senkrechte Zusammenhänge“.
- Änderungsverhalten: interessant in der Arithmetik, der Geometrie und in Anwendungen.

  Beispiel: „Termwettrennen“

x	$x + 30$	$x \cdot x$
1	31	1
2	32	4
3	33	9
4	34	16
5	35	25
6	36	36
...	...	...



- *„Mit der Forderung einer Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens ist in die klassische Ruhe des geometrischen Unterrichts Bewegung gekommen; ... . Linien, Flächen und Körper entstehen, wachsen und schwinden; sie bestehen aus beweglichen Elementen. Mit der wachsenden oder schwindenden Größe des einen wächst oder mindert sich die Größe des anderen. Die Seite ändert den Winkel, der Winkel die Seite, die Höhe den Inhalt, der Radius den Kreis, die Kante den Körper.“*

  (ENGEL, 1922)
- Verstärkt wird dieser Trend durch die Nutzung dynamischer Geometriesoftware (DGS).
- Betrachtung systematischer Änderungen als Unterrichtsmethode – Weg, um mathematische Einsicht zu vermitteln und Verständnis zu erzielen.
- Wird in einer Sachsituation eine Funktion betrachtet, die den Zusammenhang zwischen Größen beschreibt, dann kann man als Gesetzmäßigkeit entdecken, dass bestimmte Änderungen der einen Größe zu bestimmten Änderungen der anderen führen.
- Das Änderungsverhalten von Funktionen kann besonders elegant durch *Funktionalgleichungen* zum Ausdruck gebracht werden.
- In der Sekundarstufe II wird das Änderungsverhalten mit der Ableitung dann quantifizierbar.

Zu Aspekt 3 (Sicht auf Funktionen als Ganzes):

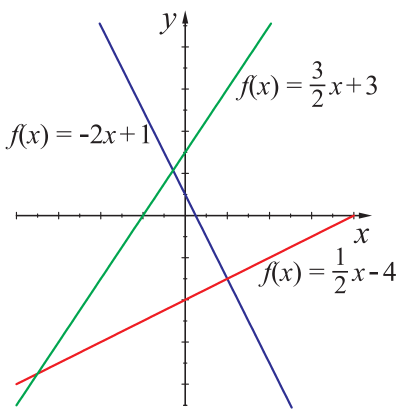
- Man betrachtet nicht nur einzelne Wertepaare, sondern die Menge aller Wertepaare – also gesamte Funktion – als neues Objekt.
- *„Mathematische Sachverhalte, die zu einem sinnvollen geschlossenen Ganzen gehören und in irgendeiner Weise eine verstehbare Einheit bilden, lassen sich leichter merken als eine gleiche Anzahl von Sachverhalten, die ihrem Sinne nach wenig oder nichts miteinander zu tun haben.“* (STRUNZ, 1949)
- Definitionen des Funktionsbegriffs aus Schulbüchern:
    - Eine Zuordnung, bei der jedem Element einer Menge D *genau ein* Element einer Menge W zugeordnet wird, nennt man *Funktion*.

      Mathematik 8 (Brandenburg, Real- und Gesamtschule). Berlin: Paetec 2003.
    - Unter einer *Funktion* versteht man eine Zuordnung, bei der zu jeder Größe aus einem ersten Bereich *genau eine* Größe aus einem zweiten Bereich gehört.

      Schnittpunkt 8 (Baden-Württemberg, Realschule). Stuttgart: Klett 2006.
    - Eine Zuordnung x $\mapsto$ y, die jedem x-Wert genau einen y-Wert zuordnet, heißt *Funktion*.

      Lambacher Schweizer 8 (Baden-Württemberg, Gymnasium). Stuttgart: Klett 2006.
- Funktionen werden zu neuen Objekten; es werden *Funktionsnamen* benötigt:
    - lineare Funktion
    - f mit $f(x) = 3x + 1{,}8$
    - die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$
    - die quadratische Funktion mit der Gleichung ... usw.
- Unterscheidung zwischen *Funktionsnamen* und *Funktionswerten*:
    - *Funktionsname*: sin
    - *Funktionswerte*: $\sin x$
    - die Funktion f mit $f(x) = ...$
- Unter den verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen eröffnet sich der Blick für das Ganze besonders deutlich bei den *grafischen Darstellungen*.
- Durch verschiedene Werte für den Anstieg m und den Achsenabschnitt n ergeben sich verschiedene lineare Funktionen f mit Gleichungen der Form $f(x) = mx + n$.

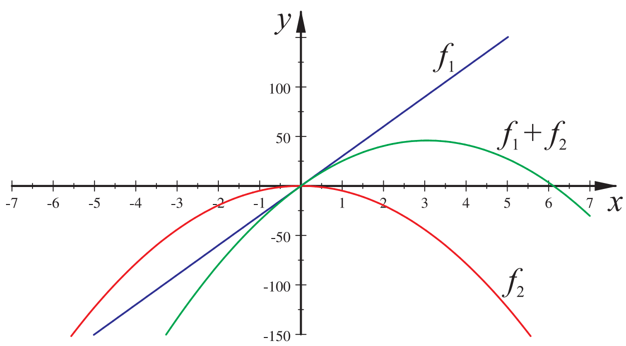
→ Funktionen als *Objekte*, die durch *Attribute* (bei linearen Funktionen Anstieg und Achsenabschnitt) gekennzeichnet sind.



- Mit Funktionen als ganzheitlichen „Objekten“ lassen sich Operationen ausführen, z. B.:
    - Addition von Funktionen,
    - Multiplikation von Funktionen mit reellen Zahlen.

  Beispiel:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 30\,x \\ f_2(x) &= -\frac{9{,}81}{2}x^2 \\ f_1 + f_2\,(x) &= -\frac{9{,}81}{2}x^2 + 30\,x \end{aligned}$$



- Funktionen mit Parametern: $a \mapsto f_a$; Scharen von Funktionsgraphen
- Verkettung von Funktionen $f_2 \circ f_1$
- Ableitungen und Stammfunktionen: $f \mapsto f'$, $f \mapsto F$
- In Differenzialgleichungen treten Funktionen selbst als gesuchte Objekte auf.

6.2 Entwicklung funktionalen Denkens; Propädeutik des Funktionsbegriffs

- Funktionales Denken beginnt bei intuitiven Vorstellungen über funktionale Zusammenhänge wie: „*Wenn man die eine Größe ändert, dann ändert sich die andere*".
- Teilweise werden die frühen Ausprägungen noch nicht als funktionales Denken, sondern als „*funktionale Anschauung*" oder „*funktionale Vorstellungen*" bezeichnet.
- Elementare funktionale Vorstellungen sind Voraussetzungen für funktionales Denken bei Kindern.

  „Schon das vorschulpflichtige Kind schließt, daß der Vater ein immer größeres Stück vom Garten umgegraben haben wird, je länger er daran arbeitet, daß der Milchtopf umso voller wird, je länger die Mutter aus der Kanne Milch hineingießt. Es hat dazu nicht nötig, den Vorgang in seinen Einzelheiten immer wieder zu beobachten, sondern es arbeitet mit der Vorstellung dieser Vorgänge."

  (RUDERT, 1919)
- Bereits RUDERT forderte, intuitive funktionale Vorstellungen zu fördern, z. B.:

  Kinder zeigen bei geschlossenen Augen mit der Hand auf den Kopf einer Person in der Ferne und deuten an, wie sich die Stellung des Armes ändert, wenn sich die Person nähert.

  $\rightarrow$ Vermittlung von Erfahrungen und Vorstellungen.
- Die elementarste funktionale Vorstellung bezieht sich auf *Monotonie*: Wenn eine Größe größer wird, so wird eine andere größer (kleiner).
- Schritt von der Monotonie zur *Proportionalität* (speziellerer, präziser beschriebener Zusammenhang): Verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ..., halbiert, ... sich eine Größe, so verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ..., halbiert, ... sich die andere Größe.
- Piaget beobachtete, dass vor dem Erfassen der Proportionalität häufig fälschlicherweise eine additive Änderung angenommen wird, also z. B. $f(x+a) = f(x) + a$.

  Beispiele (insbesondere auch Zusammenhänge der Art Stückzahl/Masse $\rightarrow$ Preis) können derarartige Fehlvorstellungen überwinden helfen.
- Entwicklung funktionalen Denkens erfordert, folgende Fähigkeiten zu entwickeln:
  (1) Zusammenhänge zwischen Größen festzustellen, anzugeben, anzunehmen und zu erzeugen;
  (2) Hypothesen über die Art eines Zusammenhanges und über den Einfluss von Änderungen zu bilden, zu kontrollieren und gegebenenfalls zu revidieren.

$\rightarrow$ Es müssen dazu Gedankenverbindungen hergestellt, Blickrichtungen verändert und Handlungen konkret und in Gedanken durchgeführt werden.

- Geeignete Handlungen sind z. B. Experimente mit Bewegungen (Laufen, Fahrrad fahren, Verwendung von Spielzeug wie Eisenbahnen, Murmeln etc.):
  – Welcher Weg wurde nach 10 s, 20s, ... zurück gelegt?
  – Wie lange brauche ich, um einen Weg zurückzulegen?
  – Wo muss ich starten, um zu einer gegebenen Zeit ein bestimmtes Ziel zu erreichen?

Phasen bei der Herausbildung des Verständnisses funktionaler Zusammenhänge

1. Monotonie (qualitativ: x größer $\rightarrow$ y größer)
2. Proportionale Zusammenhänge (s. o.) sowie der umgekehrte Fall Antiproportionalität sind in der Schule lange von besonderer Bedeutung; sicheres Verständnis hierfür zu entwickeln, ist ein wichtiges Ziel.
   Aber: Es sollte den Schülern immer wieder deutlich werden, dass nicht jeder monotone Zusammenhang proportional (bzw. antiproportional) ist.
3. Beschreibung andersartiger funktionaler Zusammenhänge:

   SUAREZ *beobachtete, dass Kinder z. B. bei einem Versuch, dem eine quadratische Funktion zugrunde liegt, zunächst einen proportionalen Zusammenhang annahmen, um die gestellte Aufgabe (Bestimmung eines unbekannten Wertes) zu lösen. Viele Kinder haben dann Probleme, sich von dieser Annahme zu trennen, selbst wenn sie zu offensichtlich falschen Ergebnissen führt.*

   Rein spontane Erkenntnisse sind hierbei nicht mehr zu erwarten; Schüler benötigen ein „Repertoire“ an Funktionen, um komplexere Zusammenhänge exakt zu beschreiben.

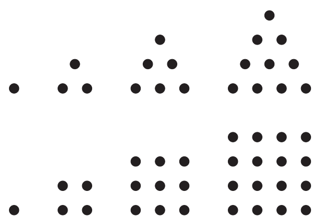
   Propädeutik ist dennoch möglich, z. B. Vergleich von Bewegungsverläufen: gleichförmige Bewegung, beschleunigte Bewegung (Fall, Herunterrollen).

Weitere Möglichkeiten zur Propädeutik des Funktionsbegriffs in der Grundschule

- *Rechenoperationen* sind naturgemäß als Funktionen zweier Variabler interpretierbar:
  $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}.$

  „Festhalten“ eines Operanden $\Rightarrow$ Betrachtung von Funktionen in einer Variablen (genauer: *Zahlenfolgen*, z. B. „Malfolgen“).
- Untersuchung einfacher funktionaler Zusammenhänge an Mustern, z. B. *figurierte Zahlen*.
- Beispiele aus der Geometrie, z. B. *Flächeninhalte* von Quadraten.

1	6
2	12
3	18
4	24
5	30
...	...



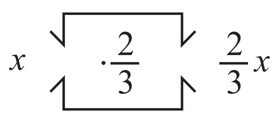
Seitenlänge	Flächeninhalt
1 cm	1 cm^2
2 cm	4 cm^2
3 cm	9 cm^2
4 cm	16 cm^2
...	...

Propädeutik des Funktionsbegriffs bei der Behandlung der Bruchrechnung

- Brüche werden meist als Größen eingeführt ($\frac{1}{2}$ Pizza, $\frac{1}{4}$ Liter, ...); für die Veranschaulichung der Addition von Brüchen ist das *„Größenkonzept“* eine sinnvolle Grundlage.
- Die Multiplikation von Brüchen lässt sich mithilfe des *„Operatorkonzepts“* verdeutlichen.

  Beispiel: $\frac{2}{3}$ *von* 6 kg sind 3 kg.

  Deutung: „$\frac{2}{3}$ *von*“ ordnet der Größe 6 kg die Größe 4 kg zu.
- Multiplikationsoperator ($\cdot m$): Größe $a \rightarrow$ Größe $a \cdot m$
  Divisionsoperator ($: n$): Größe $a \rightarrow$ Größe $a : n$
- Konkretisierung z. B. über Streckung bzw. Zerteilung von Stäben.
- Verkettung von Operatoren – „Hintereinanderschalten“
- Bruchoperator $\cdot\frac{m}{n}$ wird als Verkettung aufgefasst: $\cdot\frac{m}{n} := (\cdot m) \circ (: n)$



6.3 Proportionale (und andere) Zuordnungen

Die Behandlung von Zuordnungen ist ein besonders wichtiger Bestandteil der Propädeutik des Funktionsbegriffs. Vor allem proportionale Zuordnungen können sogar bereits weit vor der expliziten Behandlung der Proportionalität (Klasse 6 oder 7) auftreten.

Beispiel:
Drei Karten für ein Fußballspiel kosten 54 €. Wie viel Geld kosten die Karten für alle 27 Schüler der Klasse 4b?[11]
Schülerlösungen:

- Eine Karte kostet 18 €. 27 Karten kosten $27 \cdot 18$ € = 486 €.
- 27 Karten kosten 9 mal so viel wie 3 Karten, also $9 \cdot 54$ € = 486 €.

Lösungsgedanken enthalten Ansätze funktionaler Überlegungen: naive funktionale Charakterisierung der direkten Proportionalität. Später (Kl. 7) erfolgt oft eine Schematisierung:

- Dreisatzschema
- Umstellen einer Verhältnisgleichung nach der gesuchten Größe

Die sinnvollen „naiven" Vorstellungen der Schüler sollten dabei nicht vollständig durch Schematismus ersetzt werden.

Eigenschaften von proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen
(in engem Zusammenhang zum Sachrechnen)

(1) Grundeigenschaft **proportionaler Zuordnungen**: $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$
Beispiel: f: Gewicht einer Ware → Preis der Ware

(2) Grundeigenschaft **antiproportionaler Zuordnungen**: $f(a \cdot x) = \frac{1}{a} \cdot f(x)$
Beispiel: f: Anzahl der Arbeiter → Zeit zur Erledigung der Arbeit

Die *Eigenschaften* sollten zunächst im Vordergrund stehen, nicht die Funktionsgleichungen. Aufgrund inhaltlichen Verständnisses der Eigenschaften lassen sich viele Sachrechenaufgaben lösen.

Wichtig ist die Darstellung von Zuordnungen in Tabellen (vgl. die Beispiele auf S. 40). Hierbei sind bereits die beiden ersten Aspekte funktionalen Denkens von Bedeutung. (In senkrecht notierten Tabellen machen „waagerechte Zusammenhänge" das *Zuordnungsverhalten* und „senkrechte Zusammenhänge" das *Änderungsverhalten* deutlich.)

Wichtig ist es natürlich, bei der Behandlung der Proportionalität die *Identifikation von Monotonie und Proportionalität zu vermeiden*. Die Problematik wird bereits in dem Zitat von SUAREZ (siehe S. 44) angedeutet, sie besteht auch bei Schülern der Mittelstufe noch oft.

Bei der Behandlung der Proportionalität sind somit zwei scheinbar *gegensätzliche Ziele* im Auge zu behalten:

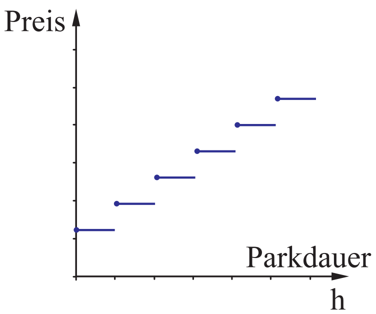
- Herausbildung und Festigung von Fähigkeiten im Umgang mit proportionalen Zuordnungen (die auch die Grundlage vieler Sachaufgaben bilden).
- Schüler dürfen aus (wachsender) Monotonie „erhöht sich der eine Wert, so erhöht sich auch der andere Wert" nicht automatisch auf Proportionalität schließen.
- Antiproportionale Zuordnungen sind zwar ein Gegenbeispiel zur Proportionalität, reichen aber nicht aus, um Gleichsetzungen „monoton wachsend = proportional" zu konterkarieren.

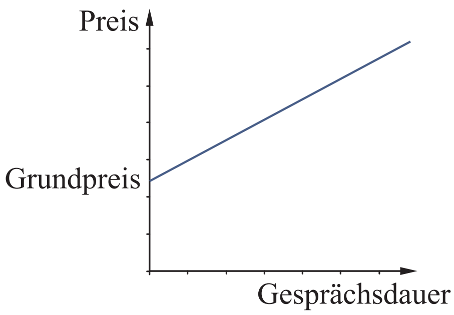
⇒ Bereits weit vor ihrer expliziten Behandlung sollten weitere Klassen von Funktionen (Zuordnungen) betrachtet werden.

[11] Die Aufgabe wurde in einer 4. Klasse einer Mannheimer Grundschule im Zeitraum der Fußball-EM 2004 gestellt. Sie war nicht in eine Unterrichtsreihe zu proportionalen Zuordnungen eingebettet, sondern wurde in einer Übungsstunde zur Beherrschung der Rechenoperationen gestellt.

Beispiele von Zuordnungen, die sich eignen, um eine „Übergeneralisierung“ der Proportionalität bei Zuordnungen zu vermeiden

- Zuordnung: *Seitenlänge* ⇒ *Flächeninhalt* bei Quadraten.
- Weitere *Quadratische (oder annähernd quadratische) Funktionen*
  Beispiele: Freier Fall: Falldauer → Fallhöhe
  Herunterrollen: Rolldauer → zurückgelegter Weg
- *Stückweise konstante Funktionen (Treppenfunktionen)*
  Beispiele: Postgebühren in Abhängigkeit vom Gewicht,
  Parkhausgebühren in Abhängigkeit von der Parkdauer.
- *Lineare (aber nicht proportionale) Funktionen*:
  Beispiel: Preise: Grundpreis + „Arbeitspreis“ (Telefon, Handy, etc.).





Experimentelle Zugänge zu Funktionen

Beispiele für lineare Funktionen, die aus Experimenten hervorgehen[12]

- Gewicht von Papprechtecken in Abhängigkeit vom Flächeninhalt
  Materialien: Briefwaage, Lineal, Papprechtecke gleicher Stärke
  Problem: Der Flächeninhalt eines krummlinig begrenzten Pappstücks soll bestimmt werden.
- Längen von Kerzen in Abhängigkeit von der Brenndauer
  Materialien: Lineal, Uhr, dünne Geburtstagskerzen
  Problem: Wie lange hat eine Kerze gebrannt, wenn sie neu 12 cm lang war? Wann wird die Kerze ganz abgebrannt sein?

Die gemessenen Werte werden zuerst in Tabellen, dann in ein Koordinatenkreuz mit geeigneten Einheiten eingetragen. Die gestellten Probleme lassen sich jeweils mit der Zeichnung lösen.

Beispiele für nichtlineare Funktionen, die aus Experimenten hervorgehen[13]

- Abhängigkeit der Fallhöhe von der Fallzeit.
- Hinabrollen von Kugeln oder Fahrzeugen auf einer geneigten Ebene: Zeit → Weg.

  Umkehrfragestellung: Wie lange benötigt ein Wagen, um einen bestimmten Weg zurückzulegen? (Kovariationsaspekt)
- Abhängigkeit der Beleuchtungsstärke vom Abstand von der Lichtquelle.
- Eintauchen von Kugeln verschiedener Radien in Wassergefäße:
  Radius → Volumen.

[12] VOLLRATH, H.-J.: Schülerversuche zum Funktionsbegriff. In: *MU* 24 (1978), 4, S. 60-101.

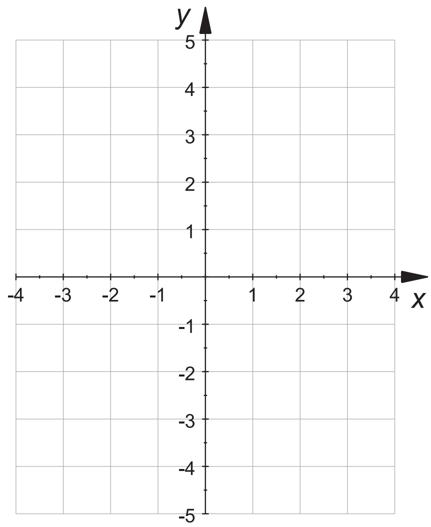
[13] BECKMANN, A.: Nichtlineare Funktionen in der Hauptschule. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006*. Hildesheim: Franzbecker 2006.

6.4 Formalisierung des Funktionsbegriffs (ab Kl. 8, z. T. schon Kl. 7)

- Nicht mehr hauptsächlich konkrete Größen (Gewichte, Preise usw.) werden einander zugeordnet, sondern zunehmend (rationale, später reelle) Zahlen ohne konkreten Größenbezug. Dennoch sollten Beispiele, die auf konkrete Sachverhalte Bezug nehmen, nicht vernachlässigt werden.
- Zu Definitionen des Begriffs „Funktion“ in einigen Schulbüchern siehe S. 42.
- Behandelte Funktionstypen: lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, trigonometrische Funktionen (erst in Klasse 10)
- Darstellungen: Funktionsgleichungen, Wertetabellen, Schaubilder im Koordinatensystem

Begriffe und Sprechweisen zum Koordinatensystem

- Kartesisches Koordinatensystem (statt „Gitternetz“)
- x-Achse, y-Achse (statt „Rechtsachse“, „Hochachse“)
- Koordinatenursprung
- Koordinaten eines Punktes
- 1. – 4. Quadrant



Aufgabentypen zur Orientierung im Koordinatensystem (bereits vor Klasse 7, z. B. in Kl. 5, 6)

- Eintragen von Punkten, Ablesen der Koordinaten eingetragener Punkte
- Figuren zeichnen, z. B.:
  Zeichne das Dreieck mit den angegebenen Eckpunkten. Ergänze es zu einem Parallelogramm. Gib die Koordinaten des fehlenden Punktes D an. Gibt es mehrere Lösungen? $A(-2;-3)$, $B(4;0)$, $C(-1;2)$.

Einige wichtige Begriffe zu Funktionen

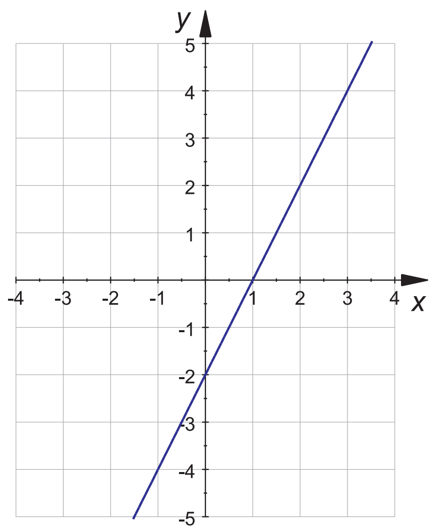
- Funktionsgleichung
- Wertetabelle
- Funktionsgraf (oder Graph? – das ist ein Streitpunkt, nach Duden ist beides erlaubt)

Unverzichtbare Grundaufgabe zu Funktionen

Zu gegebener Funktionsgleichung Wertetabelle erstellen und diese in das Koordinatensystem übertragen.

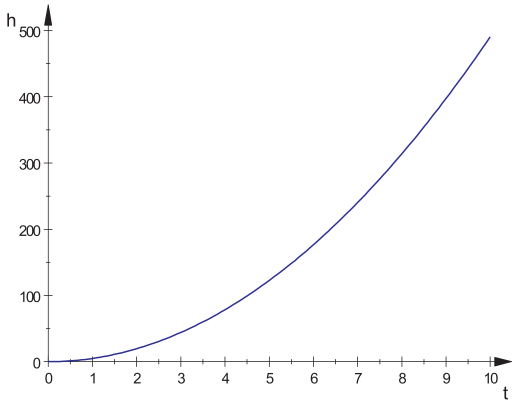
$$f(x) = 2x - 2$$

x	$f(x)$
-4	-10
-3	-8
-2	-6
-1	-4
0	-2
1	0
2	2
3	4
4	6



Weitere Aufgaben

1. Ablesen an Grafen von Funktionen
   Beispiel: Graf zum Fallgesetz
   Wie lange fällt ein Stein vom Ulmer Münster, Berliner Fernsehturm, ... ; aus welcher Höhe muss ein Stein fallen, damit er nach 2 Sekunden aufschlägt?
2. Welche der Punkte $A(*;*)$, ... liegen auf dem Grafen einer (gegebenen) Funktion?
3. In welchen Punkten schneidet der Graf der Funktion die x-Achse (y-Achse)?



6.5 Einige Bemerkungen zur Behandlung der linearen Funktionen

- Funktionsgleichungen der Form $y = m \cdot x + n$
- m – Steigung, Anstieg; n – y-Achsenabschnitt

Spezialfall: Proportionale Funktion $y = m \cdot x$

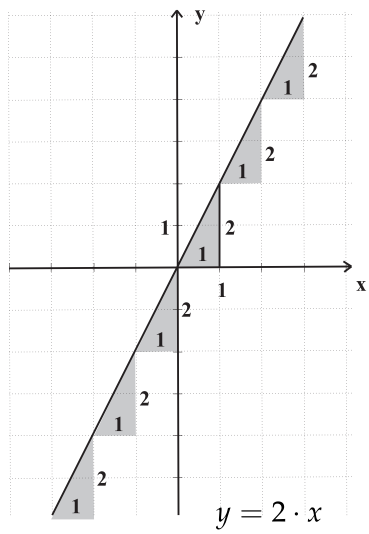
Erkenntnisse:

- Funktionsgrafen sind Geraden durch den Ursprung, der Faktor m bestimmt die „Steilheit“ des Grafen.
- Bedeutung des Steigungsdreiecks, Standardform: 1 nach rechts, m nach oben (falls m negativ ist, also nach unten).
- Wächst x um 1, so nimmt der Funktionswert um m zu.

+1 +1 +1 +1 +1 +1 +1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2x$	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

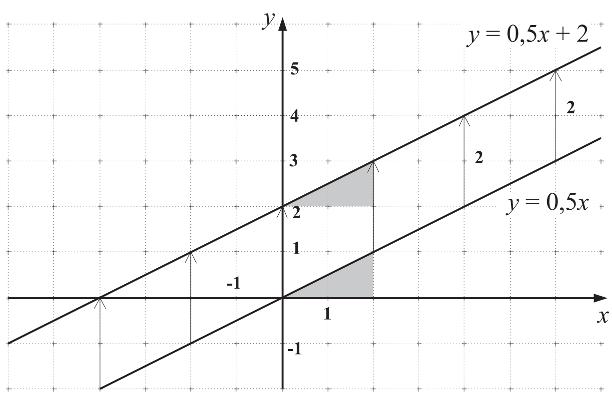
+2 +2 +2 +2 +2 +2 +2



Anmerkung:
Die Steigung ist der Tangens des Steigungswinkels, also das Verhältnis Gegenkathete zu Ankathete im Steigungsdreieck; der Tangens eines Winkels und der Steigungsbegriff werden erst in Klasse 10 in der Trigonometrie behandelt; sie können hier jedoch bereits sinnvoll vorbereitet werden.

Lineare Funktion (allgemein: $y = m \cdot x + n$)

x	$y = 0{,}5 \cdot x$	$y = 0{,}5 \cdot x + 2$
-4	-2	0
-3	-1,5	0,5
-2	-1	1
-1	-0,5	1,5
0	0	2
1	0,5	2,5
2	1	3
3	1,5	3,5
4	2	4



Feststellung:
Der Summand n bewirkt eine Verschiebung des Grafen von $y = m \cdot x$ um n nach oben, n ist ablesbar am Schnitt des Grafen mit der y-Achse: (y-Achsenabschnitt).

6.6 Weitere Klassen von Funktionen (Kl. 8-10)

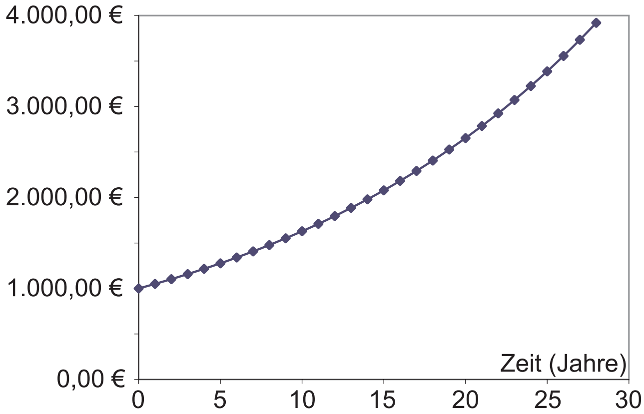
- Quadratische Funktionen, Wurzelfunktion (Klasse 9, teilweise bereits 8)
- Potenzfunktionen (Klasse 9 oder 10)
- Exponenential- und Logarithmusfunktionen (Klasse 10, Gymnasium)
- Trigonometrische Funktionen (Klasse 10)

6.6.1 Anmerkungen zu Exponenential- und Logarithmusfunktionen

- Exponentialfunktionen (bzw. eingeschränkt auf geom. Folgen) haben vielfältige Anwendungen, vor allem Wachstumsprozesse.
- Auch wenn die explizite Behandlung von Exponentialfunktionen nur am Gymnasium vorgesehen ist, so treten sie auch im Mathematikunterricht der anderen Schularten auf.

  Beispiel Zinsrechnung: Entwicklung eines Sparguthabens von 1000,- € bei 5% Zinsen.

Jahr	Guthaben
0	1.000,00 €
1	1.050,00 €
2	1.102,50 €
3	1.157,63 €
4	1.215,51 €
5	1.276,28 €
6	1.340,10 €
7	1.407,10 €
8	1.477,46 €
9	1.551,33 €
10	1.628,89 €



- Innermathematisch besonders interessant sind Exponentialfunktionen u. a. unter dem Blickwinkel *Änderungsverhalten*, das durch die Funktionalgleichung zum Ausdruck kommt:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$$

- Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion
  - Geometrische Betrachtungen zum Anstiegsverhalten anhand von Funktionsgraphen
  - Umkehrung anhand der Funktionalgleichung

$$\log(x_1 \cdot x_2) = \log(x_1) + \log(x_2)$$

  - Praktisches Operieren: Multiplizieren durch Addieren ...

    ... auch mittlerweile antiquiert anmutende Hilfsmittel können interessant sein und inhaltliches Verständnis unterstützen.