Verfolgungsprobleme

Eine Abituraufgabe und ihre Lösung(en)

Andreas Filler, Humboldt-Universität zu Berlin

Kolloquium zur Didaktik der Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

12. Mai 2016

Modellieren in Abituraufgaben?

Hamburg: Seebad Rutiba

Berlin/Brandenburg: Verhungerte Raubvögel

Verfolgungsprobleme – diskret

Ein sinnvoller Modellierungsansatz: Diskretisierung

Verfolgungsprobleme – stetig

Die Differentialgleichung einer speziellen Verfolgungskurve

Schlussbemerkungen

Modellieren in Abituraufgaben?

Entwicklung von Abituraufgaben (am Beispiel Hamburg):

> *Wegen der Spezialisierung auf wenige Aufgabentypen sagen auch gute Ergebnisse bei diesen Klausuren nicht viel über das tatsächliche mathematische Verständnis insgesamt sowie über die Studierfähigkeit in MINT-Fächern aus.*
>
> *Statt mit mathematischen Problemen müssen die Abiturienten mit Formulierungsproblemen kämpfen. Sie müssen umfangreiche, relativ schwer verständliche . . . Texte in Mathematik umsetzen, die dann selbst gar nicht mehr so schwierig ist und die von Jahr zu Jahr weiter vereinfacht wird.*

Jahnke, Th,; Klein, H. P.; Kühnel, W.; Sonar, T.; Spindler, M. [2014]: Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik – Entwicklung von 2005 bis 2013. Mit einem Diskussionsbeitrag von G. Kaiser und A. Busse. In: Mitteilungen der DMV, 22(2014)2, S. 115-122.

http://www.mathematik.de/ger/presse/ausdenmitteilungen/artikel/dmvm-2014-0046.pdf

Modellieren in Abituraufgaben?

Die Einsicht, dass bei Anwendung mathematischer Theorie auf reale Probleme notwendigerweise Vereinfachungen vorzunehmen sind und mathematisch gewonnene Resultate daher immer einen Interpretations- und Beurteilungsschritt nach sich ziehen müssen, um die Tragweite eines Ergebnisses abschätzen zu können, ist eine zentrale Komponente einer Erziehung zur Mündigkeit. . . .

Ein Realitätsbezüge und Modellierungen einbeziehender Unterricht, wie er in Hamburg seit vielen Jahren praktiziert wird, ist vielmehr angemessen und zielführend. Dabei hat in den letzten zehn Jahren (nicht nur) in Hamburg eine Akzentverschiebung in diesem Sinne sowohl im Unterricht als auch in den Prüfungsaufgaben stattgefunden.

Kaiser, G.; Busse, A. in Erwiderung auf Jahnke et al.: Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik – Entwicklung von 2005 bis 2013. In: Mitteilungen der DMV, 22(2014)2, S. 115-122.

http://www.mathematik.de/ger/presse/ausdenmitteilungen/artikel/dmvm-2014-0046.pdf

Modellieren in Abituraufgaben?

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung
Abitur 2009

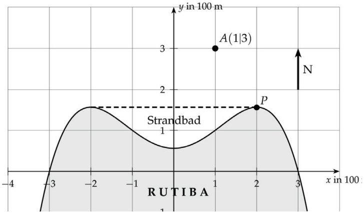
Gymnasien, Gesamtschulen, Berufliche Gymnasien
Haupttermin

Grundkurs Mathematik

I.1 Seebad Rutiba

ANALYSIS 1

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Nordküste der künstlich angelegten Insel Rutiba (1 LE entspricht 100 m). Direkt am Strand führt eine Uferstraße (durchgezogene Linie) entlang.



Rutiba hat ein Strandbad, das durch eine Absperrkette von der offenen See getrennt ist (gestrichelte Linie).

Die Uferstraße ist durch die Funktion *f* mit

$$f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16}, \quad x \in [-4;4],$$

gegeben.

Der Nordküste vorgelagert ist ein Felsen A, der als Anlegestelle für Ausflugsdampfer dient. Diese Anlegestelle ist bisher nur durch eine Bootsverbindung von der östlichen Spitze der Insel (Punkt P) zu erreichen.

a) Bestätigen Sie: P ist ein Maximum der Funktion f mit den Koordinaten $P\left(2\middle|\frac{25}{16}\right)$.

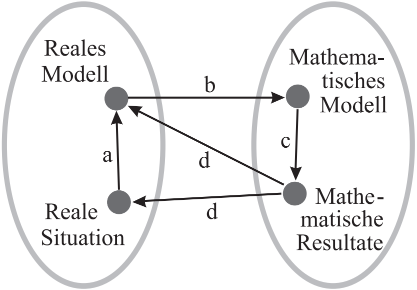
Berechnen Sie die Länge der Absperrkette und die breiteste Stelle des Strandbades in Nord-Süd-Richtung. **(15P)**

Modellieren in Abituraufgaben?

„zentrale Komponente einer Erziehung zur Mündigkeit"

?

Mathematische Modellierung / Modellbildung



Modellierungskreislauf

a – Idealisierung/
Strukturierung

b – Mathematisierung

c – Modelluntersuchung
(innermath. Arbeiten)

d – Rückinterpretation

Blum, W.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion.
in: Mathematische Semesterberichte 32 (1985), 2, S. 195-232

Abitur Berlin/Brandenburg (LK 2012): „Raubvogel“

Ein Raubvogel gleitet geradlinig gleichförmig in der Morgensonne über den Frühnebel. Er befindet sich in einer Höhe von 830 m im Punkt $P_0(3260 \mid -1860 \mid 830)$ und eine Sekunde später in $P_1(3248 \mid -1848 \mid 829)$. Im selben Zeitraum fliegt ein Singvogel geradlinig gleichförmig im morgendlichen Frühnebel von $Q_0(800 \mid -600 \mid 200)$ nach $Q_1(796 \mid -592 \mid 201)$, 1 LE = 1 m.

a) Geben Sie für die Flugbahnen je eine Geradengleichung an. Bestätigen Sie, dass die Vögel mit Geschwindigkeiten von 61,2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bzw. 32,4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fliegen.
Zeigen Sie, dass die Fluggeraden windschief zueinander verlaufen, indem Sie die lineare Unabhängigkeit der Richtungsvektoren nachweisen und den Abstand der beiden Geraden berechnen.

b) Die obere Grenze des Frühnebels verläuft in einer Ebene E. Die Ebene E ist orthogonal zu $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ und verläuft durch den Punkt $A(0 \mid 0 \mid 280)$.
Berechnen Sie, in welchem Punkt, nach welcher Zeit und unter welchem Winkel der Singvogel den Frühnebel verlässt, wenn sein Flug ungestört verläuft.
[Kontrollergebnis: Der Singvogel würde den Nebel in $S(-400 \mid 1800 \mid 500)$ verlassen.]

c) Berechnen Sie den Abstand des Raubvogels vom Singvogel in dem Moment, in dem der Singvogel den Frühnebel verlassen möchte.
Der Raubvogel erspäht den Singvogel beim Erscheinen in der Ebene E und schlägt sofort einen Haken in Richtung auf den Singvogel. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die ursprüngliche und die neue Flugstrecke des Raubvogels einschließen.

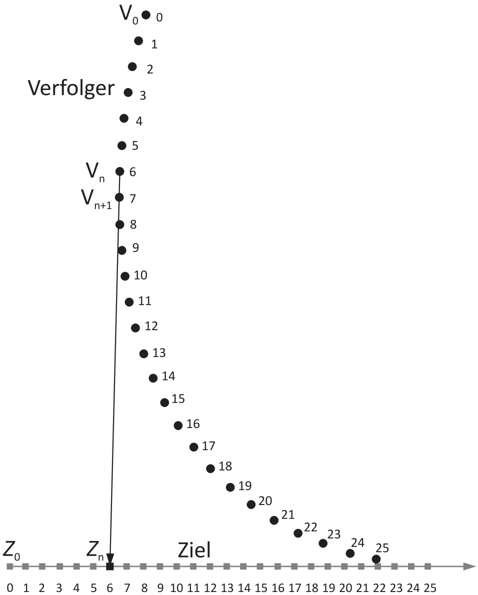
d) In diesem Moment flieht der Singvogel (vom Punkt S aus) zurück in den Frühnebel auf derselben Geraden, auf der sich der Raubvogel nähert. Berechnen Sie die im Frühnebel mindestens erforderliche Sichtweite, damit der Raubvogel den Singvogel nicht aus den Augen verliert, wenn jetzt Singvogel und Raubvogel jeweils dreimal so schnell fliegen wie zuvor.
Hinweis: Es wird darauf verwiesen, dass es sich bei diesem Modell um einen nicht realistischen Beschleunigungsvorgang handelt, weil ein realer Vogel die dreifache Geschwindigkeit nicht in Nullzeit erreicht.

Wenn ein Verfolger ein bewegliches Ziel verfolgt, so wird er sich möglichst in jedem Moment in Richtung auf das Ziel zu bewegen (es sei denn, er weiß, was das Ziel später macht).

$\rightarrow$ i. Allg. kontinuierliche Richtungsänderung des Verfolgers

Ansatz:

Betrachtung diskreter Zeitintervalle, innerhalb derer sich die Richtung des Verfolgers nicht ändert, er sich also auf Strecken bewegt.



Beginn der Verfolgungsjagd:

Zeitpunkt:	t_0
Startposition (Verfolger):	V_0
Startposition (Ziel):	Z_0

Geradlinige Bewegung während des Zeitintervalls $[t_0; t_1]$ auf Z_0 zu.

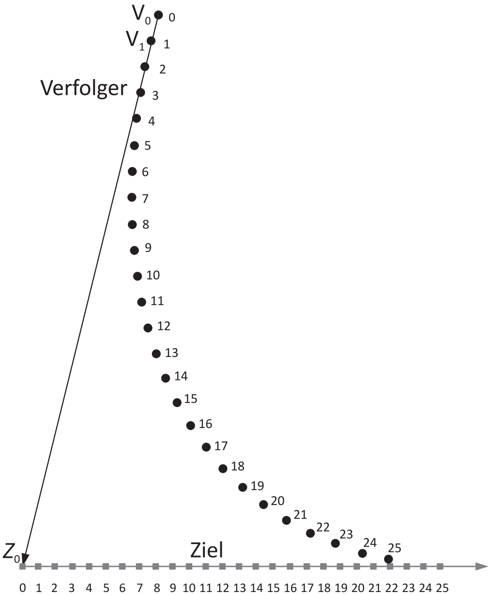
normierte Zeitintervalle

$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = 1$

Position des Verfolgers zum Zeitpunkt t_1:

$$V_1 = V_0 + v_V \frac{\overrightarrow{V_0 Z_0}}{\left|\overrightarrow{V_0 Z_0}\right|} ,$$

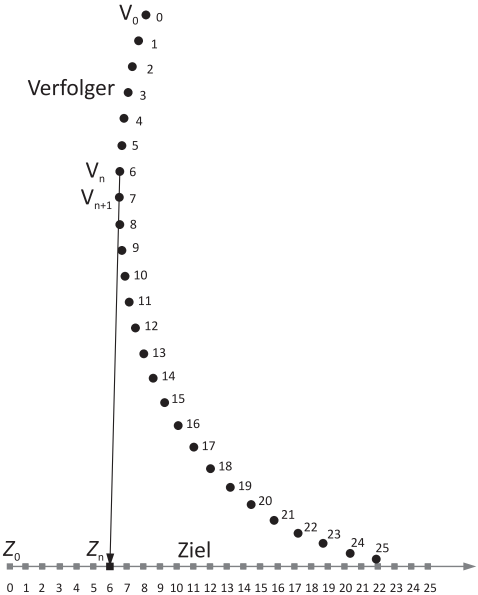
v_V – Geschwindigk. d. Verfolgers



Verfolgungsprobleme – Diskretisierung

Position V_{n+1} des Verfolgers zu einem beliebigen Zeitpunkt t_{n+1} in Abhängigkeit von seiner Position V_n und der des Ziels Z_n zum jeweils vorherigen Zeitpunkt t_n:

$$V_{n+1} = V_n + v_V \frac{\overrightarrow{V_n Z_n}}{\left|\overrightarrow{V_n Z_n}\right|}$$



Verfolgungsprobleme – Diskretisierung

Einfachster Fall: Ziel bewegt sich auf einer Koordinatenachse, z. B.

$$Z_n = \begin{pmatrix} x_{Z_n} \\ y_{Z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot v_Z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anfangspunkt des Verfolgers: beliebiger Punkt $V_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$V_{n+1} = V_n + v_V \frac{\overrightarrow{V_n Z_n}}{\left|\overrightarrow{V_n Z_n}\right|}$$

$$\begin{pmatrix} x_{V_{n+1}} \\ y_{V_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{V_n} \\ y_{V_n} \end{pmatrix} + \frac{v_V}{\sqrt{(x_{Z_n} - x_{V_n})^2 + (y_{Z_n} - y_{V_n})^2}} \begin{pmatrix} x_{Z_n} - x_{V_n} \\ y_{Z_n} - y_{V_n} \end{pmatrix}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Ziel	xZ0=	0	yZ0=	0	vZ=	0,3	
2	Verfolger	xV0=	2	yV0=	10	vV=	0,5	
3								
4	Zeit	x_Ziel	y_Ziel	x_Verf	y_Verf	x_Z - x_V	y_Z - y_V	Abstand
5	0	=$C$1	0	=$C$2	=$E$2	=B5-D5	=C5-E5	=WURZEL(F5^2+G5^2)
6	=A5+1	=A6*$G$1	0	=D5+$G$2*F5/H5	=E5+$G$2*G5/H5	=B6-D6	=C6-E6	=WURZEL(F6^2+G6^2)

Verfolgungsprobleme – Diskretisierung

Verfolgung eines sich auf einer beliebigen Geraden bewegenden Ziels

Variation der Bahn des Ziels leicht möglich:
Parameterdarstellung für Z_n ändern (Spalten B, C)

Aber: Mit

$$Z_n = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + n \cdot v_Z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (n - \text{Zeit})$$

bewegt sich das Ziel in jeder Zeiteinheit um $v_Z \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}$ Längeneinheiten also mit der $\sqrt{10}$-fachen Geschwindigkeit.

Für Vergleichbarkeit der Geschwindigkeiten von Ziel und Verfolger:
Richtungsvektoren normieren, z. B.

$$Z_n = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + n \cdot \frac{v_Z}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verfolgungsprobleme – Diskretisierung

Verfolgung eines sich auf einer Kreisbahn bewegenden Ziels

Ausgangspunkt: trigonometrische Funktionen am Einheitskreis:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Winkel α im Bogenmaß entspricht der zurückgelegten Bogenlänge

α durch $n \cdot v_Z$ ersetzen

$\rightarrow$ (Bahn-)Geschwindigkeit des Ziels: v_Z Längeneinheiten/Zeiteinheit

$\rightarrow$ Geschwindigkeiten von Ziel und Verfolger vergleichbar

Realisierung in Excel:

x_Ziel	y_Ziel
=COS($G$1*A*n*)	=SIN($G$1*A*n*)

(*n*: Zeilennummer)

Mit $v_Z = \frac{2\pi}{36}$ legt das Ziel nach 36 Zeiteinheiten genau einen vollständigen Kreisumfang zurück.

Andere Kurven als Bahnen des Ziels?

Die Differentialgleichung einer speziellen Verfolgungskurve

- Analytische Beschreibung der Verfolgungskurve?
- Genaue Berechnung von Zeiten und Orten, wann das Ziel eingeholt wurde?

Ziel: zeitfreie Beschreibung der Verfolgungskurve

Die Differentialgleichung einer speziellen Verfolgungskurve

- Spezialfall: Startpunkt des Verfolgers auf der y-Achse

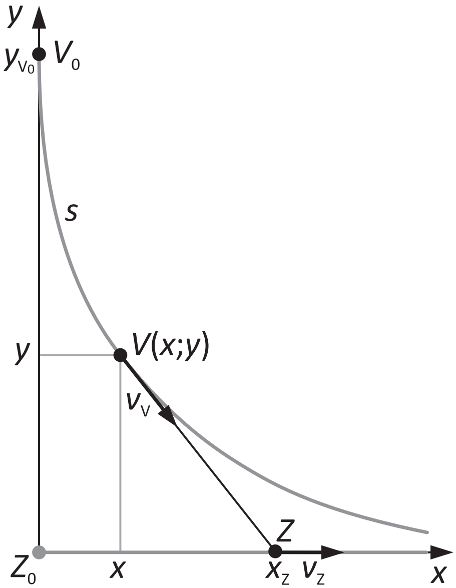
→ Verfolgungskurve als Funktionsgraph $x_{\text{Verfolger}} \mapsto y_{\text{Verfolger}}$

Zu einem beliebigen Zeitpunkt t:

- Verfolger sei im Punkt $V(x;y)$
- hat zu diesem Zeitpunkt Strecke s (Bogenlänge der Verfolgungskurve von V_0 nach V) zurückgelegt.
- Die Tangente an die Verfolgungskurve in dem Punkt V schneidet die x-Achse an der Stelle x_Z.

Während der Verfolger die Strecke s zurückgelegt hat, hat das Ziel die Strecke x_Z zurückgelegt:

$$t = \frac{s}{v_V} = \frac{x_Z}{v_Z} \quad \text{bzw.} \quad s = \frac{v_V}{v_Z} x_Z \qquad (1)$$



$v_Z = 0{,}3,\ v_V = 0{,}4,\ V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Differentialgleichung einer speziellen Verfolgungskurve

$$s = \frac{v_V}{v_Z} x_Z \qquad (1)$$

Anstieg $y'(x)$ der Tangente an die Verfolgungskurve in $V(x;y)$:

$$y'(x) = \frac{-y}{x_Z - x}$$

bzw.

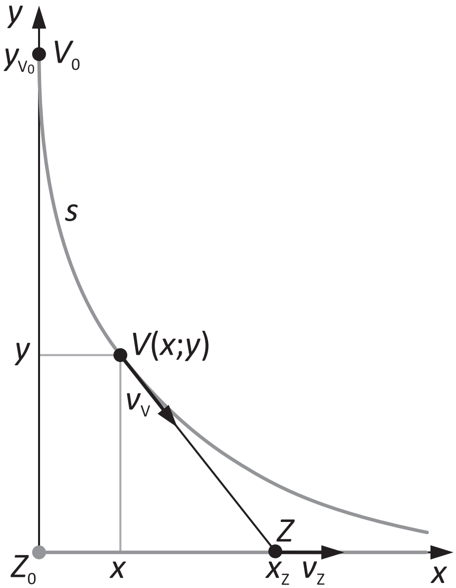
$$x_Z = x - \frac{y}{y'(x)} \qquad (2)$$

Einsetzen von (2) in (1):

$$s = \frac{v_V}{v_Z} \left(x - \frac{y}{y'(x)} \right) \qquad (3)$$

Mit Bogenlänge $s = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(u))^2} \mathrm{d}u$:

$$\int_0^x \sqrt{1 + (y'(u))^2} \mathrm{d}u = \frac{v_V}{v_Z} \left(x - \frac{y}{y'(x)} \right)$$



$v_Z = 0{,}3,\ v_V = 0{,}4,\ V_0 = \binom{0}{5}$

$$\int_0^x \sqrt{1+(y'(u))^2}\,\mathrm{d}u \;=\; \frac{v_V}{v_Z}\left(x - \frac{y}{y'(x)}\right)$$

Ableiten:

$$\sqrt{1+(y'(x))^2} \;=\; \frac{v_V}{v_Z}\left(1 - \frac{(y'(x))^2 - yy''(x)}{(y'(x))^2}\right) \;=\; \frac{v_V}{v_Z}\,\frac{yy''(x)}{(y'(x))^2}$$

Kleinere Umformungen, Kurzschreibweise:

Differentialgleichung der Verfolgungskurve

$$\frac{v_V}{v_Z}yy'' - \;y'^2\sqrt{1+y'^2} \;=\; 0 \tag{4}$$

Differentialgleichung der Verfolgungskurve

$$\frac{v_V}{v_Z} y y'' - y'^2 \sqrt{1 + y'^2} = 0 \tag{4}$$

Lösen der DGl. (nicht ganz einfach[1]) für $v_V \neq v_Z$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(0) = y_{V_0}$:

$$x = \frac{v_V}{v_Z} \frac{y}{2} \left(\frac{1}{\frac{v_V}{v_Z} + 1} \left(\frac{y}{y_{V_0}} \right)^{\frac{v_Z}{v_V}} - \frac{1}{\frac{v_V}{v_Z} - 1} \left(\frac{y}{y_{V_0}} \right)^{-\frac{v_Z}{v_V}} \right) + y_{V_0} \frac{\frac{v_V}{v_Z}}{\left(\frac{v_V}{v_Z}\right)^2 - 1} \tag{5}$$

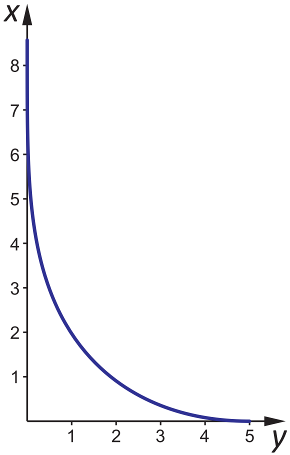
[1] siehe u. a.

– Gray, A. et al. [2006]: Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

– Schierscher, Georg [1995]: Verfolgungsprobleme. Berichte über Mathematik und Unterricht, No. 95-06. ETH Zürich.

Die Differentialgleichung einer speziellen Verfolgungskurve

$$x = \frac{v_V}{v_Z}\frac{y}{2}\left(\frac{1}{\frac{v_V}{v_Z}+1}\left(\frac{y}{y_{V_0}}\right)^{\frac{v_Z}{v_V}} - \frac{1}{\frac{v_V}{v_Z}-1}\left(\frac{y}{y_{V_0}}\right)^{-\frac{v_Z}{v_V}}\right) + y_{V_0}\frac{\frac{v_V}{v_Z}}{\left(\frac{v_V}{v_Z}\right)^2-1} \quad (5)$$



$v_Z = 0{,}3$

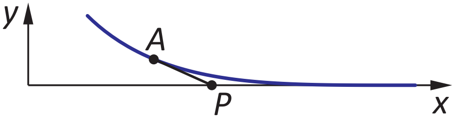
$v_V = 0{,}4$

$V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Differentialgleichung einer speziellen Verfolgungskurve

Wann hat der Verfolger sein Ziel gefangen?

$\rightarrow$ genau dann, wenn er die *x*-Achse erreicht: $y_{\text{Verfolger}} = 0$



$$x = \frac{v_V}{v_Z}\frac{y}{2}\left(\frac{1}{\frac{v_V}{v_Z}+1}\left(\frac{y}{y_{V_0}}\right)^{\frac{v_Z}{v_V}} - \frac{1}{\frac{v_V}{v_Z}-1}\left(\frac{y}{y_{V_0}}\right)^{-\frac{v_Z}{v_V}}\right) + y_{V_0}\frac{\frac{v_V}{v_Z}}{\left(\frac{v_V}{v_Z}\right)^2 - 1} \qquad (5)$$

In (5) $y = 0$ setzen:

$$x_{V_{\text{end}}} = y_{V_0}\frac{\frac{v_V}{v_Z}}{\left(\frac{v_V}{v_Z}\right)^2 - 1}$$

Berechnung der benötigten Zeit (mittels $x_Z = x = x_{V_{\text{end}}}$, also $t = \frac{x_Z}{v_Z}$):

$$t_{\text{end}} = \frac{x_{V_{\text{end}}}}{v_Z} = y_{V_0}\frac{\frac{v_V}{{v_Z}^2}}{\left(\frac{v_V}{v_Z}\right)^2 - 1}$$

Die Differentialgleichung einer speziellen Verfolgungskurve

Im betrachteten Beispiel:

$$x_{V_{\text{end}}} = \frac{60}{7} \approx 8,57$$

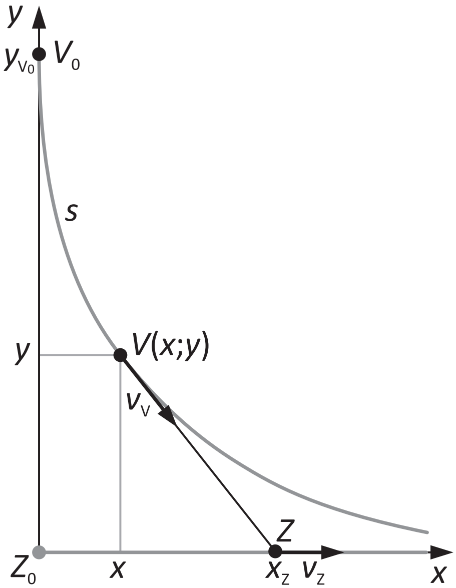
$$t_{\text{end}} = \frac{200}{7} \approx 28,57$$

Mittels

$$s = \frac{v_V}{v_Z} x_Z \qquad (1)$$

Berechnung der Weglänge *s*, die der Verfolger zurückgelegt hat:

$$s = x_{V_{\text{end}}} \frac{v_V}{v_Z} = \frac{80}{7} \approx 11,43$$



$v_Z = 0{,}3,\ v_V = 0{,}4,\ V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Schlussbemerkungen

Didaktisches Potenzial von Verfolgungsproblemen für den MU der S II:

Anschlussfähigkeit

- Lösungsweg mittels Diskretisierung mit Standardverfahren der analytischen Schulgeometrie
- Aufstellen der Differentialgleichung mit Mitteln der Schulanalysis
- Grenzen dessen, was mit Mitteln der Schulmathematik leistbar ist
- Ausblicke auf Möglichkeiten der „höheren“ Mathematik (Differentialgeometrie, Lösen von Differentialgleichungen).

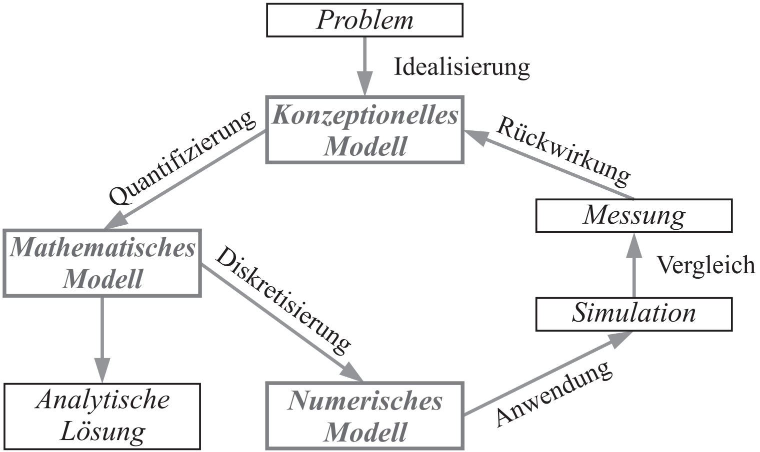
Vernetzung

- Bezüge zwischen analytischer Geometrie und Analysis anhand der Ansätze zur Lösung von Verfolgungsproblemen

Modellierung

- *Diskretisierung*: fundamentale Modellierungsstrategie
- *Differentialgleichungen*: wichtigstes Werkzeug der angewandten Mathematik
  (allerdings nur in Ausnahmefällen analytisch lösbar; erfordern meist numerische Lösungsverfahren also letztendlich Diskretisierungen)

Ein Modellierungszyklus aus der Sicht eines Numerikers[2]



[2] Sonar, T.: *Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik*. Braunschweig: Vieweg, 2001, S. 29.

Schlussbemerkungen

Eignen sich „ernsthafte“ Modellierungsprobleme für Abituraufgaben?

→ Im Allgemeinen nicht!

- Zeitbedarf nicht minutiös zu kalkulieren
- Diskussionen über sinnvolle Lösungsansätze nötig

→ Rahmen, der durch eine Klausur vorgegeben ist, wird gesprengt.

Abituraufgaben der vergangenen ca. zehn Jahre:
überschaubar viele Anwendungskontexte wiederholen sich (leicht variiert) im Abstand von wenigen Jahren

→ Standard-„Anwendungs“kontexte + math. Standardverfahren

Tatsächlich modelliert wird in der Prüfung nicht, warum dann die (oft albernen) Verpackungen?

Warum keine „klassischen Mathematikaufgaben“?

(die gibt es im Abitur z. B. in Bayern und Thüringen,
teilweise auch in B/W)