Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2015/16

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis I** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 7

Abgabe am 07. 12. 2015

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 7.1

Stellen Sie eine Vermutung für eine explizite Darstellung der rekursiv gegebenen Folge (a_n) mit

$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} \quad \text{und} \quad a_1 = 1,\ a_2 = 3$$

auf und zeigen Sie deren Richtigkeit mittels vollständiger Induktion. **2 Pkt.**

Aufgabe 7.2

4 Pkt.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.
  - (i) Eine Folge (a_n) mit $a_n > n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) kann keinen Grenzwert haben.
  - (ii) Eine Folge (a_n) mit $a_{n+1} > a_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) kann keinen Grenzwert haben.
  - (ii) Wenn eine Folge, die nur negative Folgenglieder hat, konvergiert, so ist ihr Grenzwert negativ.
  - (iv) Eine Folge, in der die Zahl 0,1 unendlich oft als Folgenglied auftritt, kann keine Nullfolge sein.

(b) Untersuchen Sie die Folgen (a_n), (b_n), (c_n) und (d_n) mit den unten angegebenen Gliedern auf Konvergenz.

$$a_n = \frac{n^2}{n^3-2}, \qquad b_n = \frac{n^3-2}{n^2}, \qquad c_n = n-1, \qquad d_n = b_n - c_n.$$ **3 Pkt.**

Hinweis: Formen Sie die Ausdrücke so um, dass in Zähler und Nenner nur bekannte Nullfolgen oder Konstanten stehen und wenden Sie die Rechenregeln (Grenzwertsätze) an.

Aufgabe 7.3

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge (x_n), falls dieser existiert:

(a) $x_n = \dfrac{1-n+n^2}{n(n+1)}$ **1 Pkt.**

(b) $x_n = \dfrac{n^3-1}{n^2+3} - \dfrac{n^3(n-2)}{n^2+1}$ **2 Pkt.**

(c) $x_n = \sqrt{4n^2+n+2} - \sqrt{4n^2+1}$ **2 Pkt.**

(d) $x_n = \dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2}$ **2 Pkt.**

Hinweis: Kürzen Sie höchste Potenzen in Zähler und Nenner. Bei Differenzen von Wurzeln führt das Erweitern mit der Summe der Wurzeln zum Ziel.

Aufgabe 7.4

(a) Zeigen Sie, dass für zwei beliebige positive reelle Zahlen $x, y > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} = \max\{x, y\}.$$ **2 Pkt.**

Hinweis: Schätzen Sie die Folgenglieder nach unten und oben durch Terme ab, in denen nur die größere der beiden Zahlen vorkommen und verwenden Sie das „Sandwich-Lemma“ (Einschließungskriterium).

(b) Bestimmen Sie mithilfe des „Sandwich-Lemmas“ Grenzwerte zu den Folgen (a_n) und (b_n), die durch

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{3n+2}{n+1}}, \qquad b_n = \sqrt{\frac{1}{2^n} + n} - \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gegeben sind. **2 Pkt.**

Hinweis: Bei (a_n) können Sie den Bruch in der Wurzel verkleinern bzw. vergrößern. Bei (b_n) sollte man mit der Summe der Wurzeln erweitern und dann eine obere Schranke bestimmen.

Insgesamt: **20 Pkt.**